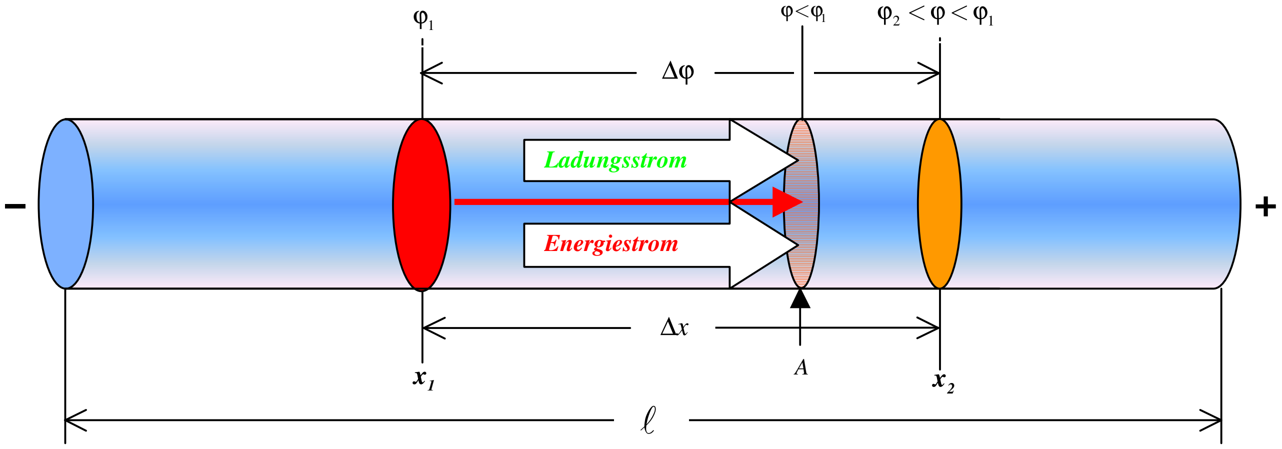
Der stationäre Ladungsstrom

Als ***Ladung*** Q wird die Menge an **geladenen Teilchen** (Elektronen, Protonen, Ionen, usw.) in einem Stoff oder System bezeichnet, die von außen gemessen wird. Die Ladung ist eine **additive Größe** $Q_{\text{ges}} = Q_1 + Q_2$ mit der Einheit $[Q] = 1\,\text{C}$ (Coulomb) und ist **Träger der Energie** E. Das ***Potential*** φ gibt an, auf welchem Spannungsniveau sich ein Punkt gegenüber der Masse befindet. Das Potential ist ***keine*** **additive Größe** $\varphi_{\text{ges}} \neq \varphi_1 + \varphi_2$. Es hat die Einheit $[\varphi] = 1\,\text{V}$ (Volt).

Ladungs- und Energiestrom

Bezeichnungen

$\lvert\Delta\varphi\rvert = U$	:	**Potentialgefälle oder elektrische Spannung**
ΔQ	:	**Ladungsdifferenz**
Δx	:	**Längendifferenz**
Δt	:	**Zeitdifferenz**



Im obigen Bild wird der Ladungs- und Energiestrom dargestellt, wie er typischerweise auf einer elektrischen Leitung stattfindet. Zwischen x_1 und x_2 kann sich auch ein Gerät oder Bauelement befinden. Damit würde die Potentialdifferenz noch deutlicher. **Beachte**, dass die **Elektronenbewegung** und die **technische Stromrichtung entgegengesetzt** sind, sich also um ein **Vorzeichen** unterscheiden.

Der ***Ladungsstrom*** I_Q gibt an, welche **Ladungsmenge** ΔQ **pro Zeitabschnitt** Δt durch die Fläche A geströmt ist. Er hat die Einheit $[I_Q] = 1\,\text{A}$ (Ampère). Durch einen Einheitenvergleich folgt $1\,\text{A} = 1\frac{\text{C}}{\text{s}}$.

$$I_Q = \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Die ***Ladungsleitfähigkeit*** σ_Q gibt an, wie gut ein Stoff oder Material die Ladung leitet.

$$I_Q = \sigma_Q \cdot A \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}.$$

Die Größe $L_Q = \sigma_Q \frac{A}{\Delta x}$ heißt ***Ladungsleitwert*** und ihr Kehrwert $R_Q = \frac{1}{\sigma_Q}\frac{\Delta x}{A}$ ***Ladungswiderstand***. Hieraus folgt $I_Q = \frac{\Delta\varphi}{R_Q}$, d.h. Strom ist Spannung durch Widerstand. Damit erhalten wir

$$I_Q = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \sigma_Q \cdot A \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} \Rightarrow \Delta Q = \sigma_Q \cdot A \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} \cdot \Delta t.$$

In der folgenden Tabelle sind einige Metalle aufgeführt.

Ladungsleitfähigkeit σ_Q bei 20 °C in $\frac{\text{S}\cdot\text{m}}{\text{mm}^2}$			
Silber	62,5	Zink	16,5
Kupfer	57	Messing Ms 63	14
Gold	45	Kadmium	13,1
Aluminium	36	Nickel	11,5
Magnesium	23	Eisen (rein)	10
Wolfram	17	Platin	9,0
Messing Ms 58	17	Konstantan	2,08

Der ***Energiestrom*** $I_E = P$ gibt an, welche **Energiemenge** ΔE **pro Zeitabschnitt** Δt durch die Fläche A geströmt ist.

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t}.$$

Da die Ladung Träger der Energie ist, besteht der Zusammenhang

$$P = \varphi \cdot I_Q \Leftrightarrow \frac{\Delta E}{\Delta t} = \varphi \cdot I_Q \Leftrightarrow \Delta E = \varphi \cdot I_Q \cdot \Delta t \quad \Leftrightarrow \quad \Delta E = \varphi \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta t} \cdot \Delta t$$

oder unabhängig von der Zeit (φ das Potential an der Stelle A)

$$\Delta E = \varphi \cdot \Delta Q .$$

Regeln zur Berechnung

1. Knotenregel (Kirchhoff)

Die Summe aller zu einem Knoten hinfließenden Ströme ist gleich der Summe aller vom Knoten wegfließenden Ströme.

$$I_{\text{hin}} = I_{\text{weg}}$$

Daraus folgt: In einem Knoten können sich keine Ladungen anhäufen.

2. Maschenregel (Kirchhoff)

Die Summe aller gemessenen Spannungen (mit Vorzeichen) in einer Masche ist null. Dabei zählt die Spannung in Pfeilrichtung positiv und in Gegenpfeilrichtung negativ. Anders ausgedrückt: Die Spannungen der Pfeile in Gegenuhrzeiger addiert ist gleich der Spannungen der Pfeile im Uhrzeigersinn. Der Spannungspfeil zeigt stets vom hohen zum niedrigen Potential.

$$\overrightarrow{U}_1 + \cdots + \overrightarrow{U}_n = \overleftarrow{U}_1 + \cdots + \overleftarrow{U}_m$$

3. Die Zweigregel (Ohm)

Zwei beliebige Knoten, zwischen denen der Strom I fließt, heißt Zweig. Liegt genau ein Bauelement oder Gerät dazwischen, so heißt der Zweig elementar.
Ist U die Spannung über einem Zweig, I der Strom in diesem Zweig und R der Widerstand des Zweiges, so gilt:

$$U = I \cdot R .$$

Der Widerstand kann aus einem Kennlinienfeld entnommen werden.

Zum Abschluss noch einige wichtige Größen der Elektrotechnik

Die ***Ladungsstromdichte*** J_Q sagt aus, wie dicht der Ladungsstrom im Leiter fließt. Sie ist festgelegt als $J_Q = \frac{I_Q}{A}$ und ist nur von der betrachteten Stelle abhängig, nicht aber von der Fläche A. Entsprechend haben wir die ***Energiestromdichte*** $J_E = \varphi \cdot J_Q$. Hierbei ist φ das Potential an der betrachteten Stelle.

Mit dem Energiestrom kann die Energiestromdifferenz zwischen diesen Stellen oder eines Gerätes berechnet werden.

$$\begin{aligned} \Delta I_E &= \Delta\varphi \cdot I_Q \\ &= \frac{U_Q^2}{R_Q} \\ &= R_Q \cdot I_Q^2 \end{aligned}$$

Physikalisch und mathematisch richtige Festlegung

Bisher haben wir uns nur für die positiven Größen, nicht aber für die Richtungen interessiert. Die Differenz $\Delta x = x_2 - x_1$ ist wegen der Ladungsstromrichtung positiv. Betrachten wir die Ladungsdifferenz ΔQ. Nun sind die Ladungen negativ gesetzt. Folglich ist auch I_Q negativ. Dies ist von daher wichtig, da auch Positronenströme (positive Ladungen) und Ionenströme (positive und negative Ladungen) existieren. Da die Fläche zwei Seiten besitzt, gibt es auch zwei Möglichkeiten eine Richtung für die Fläche und zwar unabhängig von der Strömungsrichtung festzulegen. Legen wir die Richtung entgegen der Stromrichtung fest, so ist der Strom immer positiv, somit die Technische Stromrichtung. Im anderen Fall ist der Strom gleich dem Vorzeichen der Ladungen. Welche ist nun aber die Richtige? Nun kann aber noch das Potential hinzugezogen werden. Auch hier ist die Festlegung willkürlich.

Betrachten wir dazu eine aufgeladene Batterie und beachten, dass wir die Energieerhaltung annehmen. „Die Summe **aller** Energien ist konstant.“ Die Batterie trägt folglich positive Energie. Die Geräte im Stromkreis laden folglich Energie der Batterie vermöge des Energiestroms um. Die Energie der Batterie nimmt ab. Damit ist $\Delta E_{\text{Batt}} - P \cdot \Delta t$ die nach der Zeit Δt

in der Batterie verbliebene Energie. Wäre nun $I_E = P$ negativ, so hätten wir den Widerspruch, dass die Batterie Energie aufgenommen hätte.
Hieraus schließen wir auf eine gegen die Ladungsstromrichtung orientierte Fläche. Insbesondere ist diese Orientierung (entgegengesetzte innere und äußere [transversale] Orientierung Spiegelungsinvariant.
Es gilt folglich genau $\frac{\Delta Q}{\Delta t} + I_Q = 0$, denn Q ist negativ.

Gehen wir nun zur differentiellen Schreibweise über, so erhalten wir $\frac{dQ}{dt} + I_Q = 0$. Dies ist die Kontinuitätsgleichung.
Wir lassen die Fläche A „mitströmen". An der Stelle x_2 nennen wir die Fläche A_2 und an der Stelle x_1 nennen wir die Fläche A_1. $\Delta A \cdot \Delta x$ stellt folglich ein Volumen dar. Wir haben also mit der Raumladungsdichte $\rho_Q := \frac{\Delta Q}{\Delta V}$ die Gleichung $\Delta Q = \rho_Q \cdot \Delta V$. Der elektrische Strom kann somit durch $I_Q = \rho_Q \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}$ beschrieben werden. Setzen wir $\Delta Q = \rho_Q \cdot \Delta V = \rho_Q \cdot \Delta A \cdot \Delta x$, so erhalten wir mit $J_A = \frac{I_Q}{A}$: $\rho_Q \cdot \frac{\Delta A \cdot \Delta x}{\Delta t} + J_Q \cdot \Delta A = 0 \Leftrightarrow \rho_Q \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + J_Q = 0$.

Für den Differenzenquotienten gilt nun $\frac{\Delta \varphi}{\Delta x} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{x_2 - x_1}$. Betrachten wir eine der beiden Stromrichtungen (egal welche), so ist er negativ. Für die ***Ladungsstromdichte*** J_Q muss es folglich korrekt $J_Q = -\frac{\Delta \varphi}{\Delta x} \cdot \sigma_Q$ heißen. Setzen wir $\mathbf{E}_Q = -\frac{\Delta \varphi}{\Delta x}$, so erhalten wir die Gleichung $J_Q = \sigma_Q \cdot \mathbf{E}_Q$ (Ohmsches Gesetz). $\mathbf{E}_Q$ heißt ***Ladungsfeldstärke*** (**elektrische Feldstärke**) und $\frac{\Delta \varphi}{\Delta x}$ heißt ***Potentialgradient***. Hieraus folgt für die ***Energiestromdichte*** $J_E = \varphi \cdot \sigma_Q \cdot \mathbf{E}_Q$.