Wettrollen

Zwei identische Kugeln rollen in gleicher Höhe los und kommen auf gleicher Höhe wieder ins Ziel. Welche der Kugeln ist aber zuerst im Ziel? Dabei sollen beide Kugeln niemals rutschen, sondern immer rollen! Die schiefe Ebene stellt natürlich eine Zwangsbedingung dar. Jede der Kugeln ist als eigenes System zu betrachten.

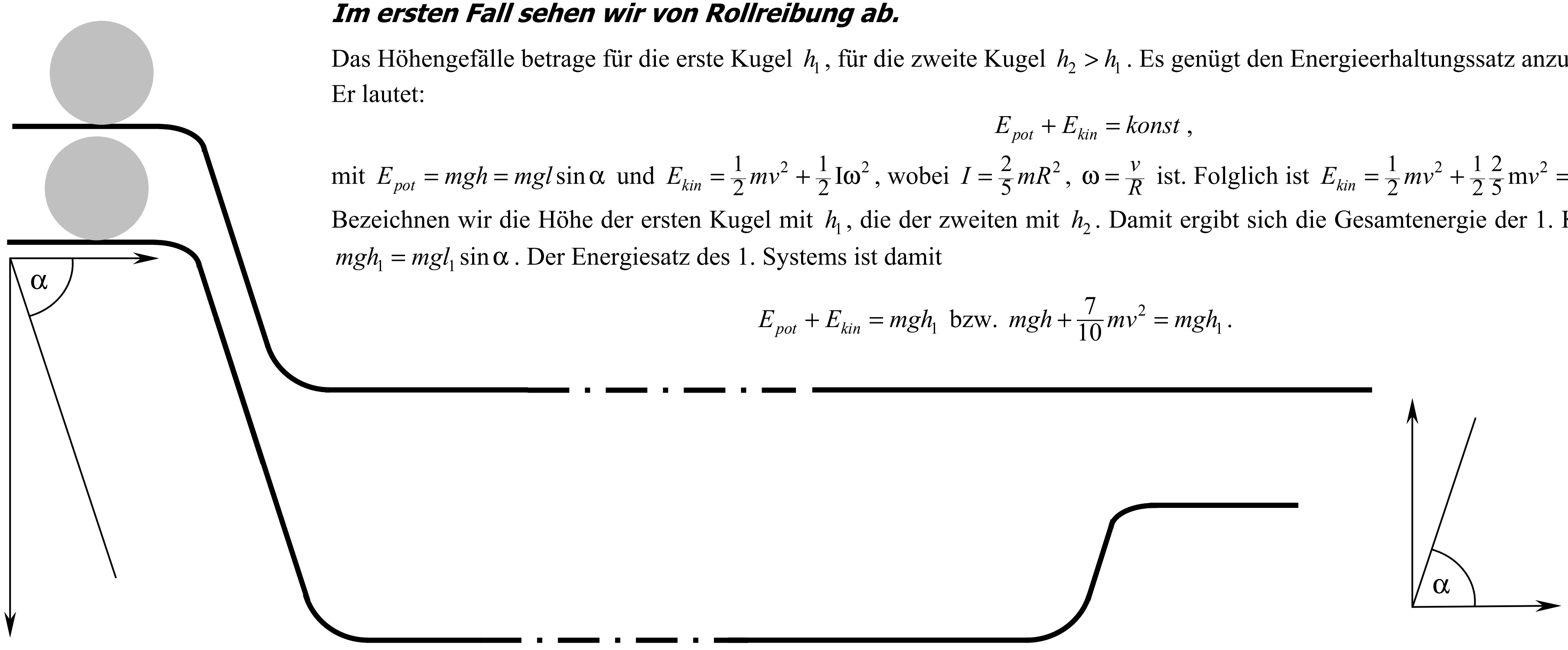
Im ersten Fall sehen wir von Rollreibung ab.

Das Höhengefälle betrage für die erste Kugel h_1, für die zweite Kugel $h_2 > h_1$. Es genügt den Energieerhaltungssatz anzuwenden. Er lautet:

$$E_{pot} + E_{kin} = konst\ ,$$

mit $E_{pot} = mgh = mgl\sin\alpha$ und $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\mathrm{I}\omega^2$, wobei $I = \frac{2}{5}mR^2$, $\omega = \frac{v}{R}$ ist. Folglich ist $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}\mathrm{m}v^2 = \frac{7}{10}mv^2$. Bezeichnen wir die Höhe der ersten Kugel mit h_1, die der zweiten mit h_2. Damit ergibt sich die Gesamtenergie der 1. Kugel zu $mgh_1 = mgl_1\sin\alpha$. Der Energiesatz des 1. Systems ist damit

$$E_{pot} + E_{kin} = mgh_1 \text{ bzw. } mgh + \frac{7}{10}mv^2 = mgh_1\ .$$



Entsprechend erhalten wir für das zweite System: $E_{pot} + E_{kin} = mgh_2$ bzw. $mgh + \frac{7}{10}mv^2 = mgh_2$. Für die Geschwindigkeiten am Fußpunkt der schiefen Ebenen, $h = 0$, erhalten wir:

$$1.\ \text{Kugel: } v_1^2 = \frac{10}{7}gh_1 \qquad \text{und} \qquad 2.\ \text{Kugel: } v_2^2 = \frac{10}{7}gh_2\ .$$

Also ist $v_1 = \sqrt{\frac{10}{7}gh_1}$ und $v_2 = \sqrt{\frac{10}{7}gh_2}$. Hierbei ist nur der Betrag der Geschwindigkeit berücksichtigt.

Jetzt ist im Vergleich zu berücksichtigen, dass die 2. Kugel noch auf der schiefen Ebene rollt, während sich die 1. Kugel sich bereits auf der Horizontalen bewegt. Rechnen wir also die Zeit für die 2. Kugel aus, die sie für Teil $h_2 - h_1 =: h_{21}$ der schiefen Ebene benötigt. Da die Geschwindigkeit v über g zunimmt, sind nun das Vorzeichen der Geschwindigkeit und die Anfangsgeschwindigkeit der 2. Kugel zu berücksichtigen.

Mit $-v = \frac{dh}{dt}$ folgt $dt = -\frac{dh}{v} = -\frac{dh}{\sqrt{\frac{10}{7}g(h_2 - h)}} = -\sqrt{\frac{7}{10g}}\frac{dh}{\sqrt{h_2 - h}}$ und durch Integration $t(h) = 2\sqrt{\frac{7(h_2 - h)}{10g}}$ wobei $h_2 < h < 0$ ist. Wir erhalten am Fußpunkt der 2. Kugel $t_2 = t(h = 0) = 2\sqrt{\frac{7h_2}{10g}}$. Die Zeitdifferenz der 2. Kugel für die Höhendifferenz $h_2 - h_1$ beträgt somit

$$\Delta t = 2\sqrt{\frac{7}{10g}}(\sqrt{h_2} - \sqrt{h_1})\,.$$

Da die Geschwindigkeit auf der Horizontalen konstant bleibt, hat somit die 1. Kugel mit $w(t) = vt$ den Weg

$$v_1 \cdot \Delta t = \sqrt{\frac{10}{7}gh_1} \cdot 2\sqrt{\frac{7}{10g}}(\sqrt{h_2} - \sqrt{h_1}) = 2\sqrt{h_1} \cdot (\sqrt{h_2} - \sqrt{h_1}) = 2(\sqrt{h_1 h_2} - h_1)$$

auf der Horizontalen zurückgelegt, während die 2. Kugel am Fußpunkt angelangt ist. Das entspricht der Strecke $(h_2 - h_1)\cot\alpha$ der 1. Kugel.

Die Länge der Horizontalen für die 2. Kugel betrage w. Da die Geschwindigkeit der 2. Kugel nun auch konstant ist, beträgt die Zeit für diese Strecke $t = \frac{w}{v_2}$. In dieser Zeit hat die 1. Kugel die Strecke $w_1 = v_1 t = v_1 \frac{w}{v_2} = \frac{v_1}{v_2} w = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} w$ zurückgelegt.

Die 2. Kugel muss nun wieder auf die Höhe $h_{21} = h_2 - h_1$ aufsteigen. Die Zeit, die dafür benötigt wird, ist dieselbe wie für den Abstieg. Die 1. Kugel legt folglich wieder den Weg $2(\sqrt{h_1 h_2} - h_1)$ zurück. Da sie jetzt auch die Geschwindigkeit der 1. Kugel hat, wird sich am Abstand der beiden Kugeln nichts mehr ändern. Er bleibt konstant.

Fassen wir die Ergebnisse zusammen.

Der horizontale Weg, der zu betrachten ist, wird durch die 2. Kugel nach dem Aufstieg festgelegt. Er beträgt $h_2 \cot\alpha + w + (h_2 - h_1)\cot\alpha$.

Die 1. Kugel hat in dieser Zeit den Weg $h_1 \cot\alpha + 2(\sqrt{h_1 h_2} - h_1) + \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} w + 2(\sqrt{h_1 h_2} - h_1) = h_1 \cot\alpha + 4(\sqrt{h_1 h_2} - h_1) + \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} w$ zurückgelegt.

Der Wegvorsprung der 2. vor der 1. Kugel auf der „Zielgeraden" beträgt somit:

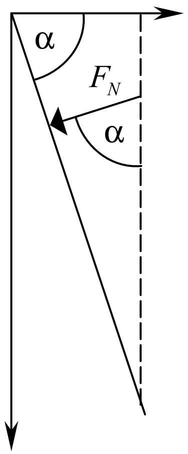
$$2(h_2 - h_1)\cot\alpha + (1 - \sqrt{\frac{h_1}{h_2}})w - 4(\sqrt{h_1 h_2} - h_1)\,.$$

Berechnen wir einen konkreten Fall. Es sei $h_2 = 4h_1$. Dann ist der Wegvorsprung

$$2(h_2 - h_1)\cot\alpha + (1 - \sqrt{\frac{h_1}{h_2}})w - 4(\sqrt{h_1 h_2} - h_1) = 6h_1\cot\alpha + 0{,}5w - 4h_1 = (6\cot\alpha - 4)h_1 + 0{,}5w\,.$$

Ist $\alpha < 56{,}31°$, so ist $6\cot\alpha - 4 \geq 0$.

Im zweiten Fall nehmen wir eine Rollreibung μ_r (Stahl auf Stahl 0,01) an.



Der Energiesatz lautet für das 1. System (1. Kugel) hier: $E_{pot} + E_{kin} + E_{\mu_r} = mgh_1$ bzw. $mgh + \frac{7}{10}mv^2 + \mu_r F_N s = mgh_1$. Entsprechend für das 2. System (2. Kugel): $E_{pot} + E_{kin} + E_{\mu_r} = mgh_2$ bzw. $mgh + \frac{7}{10}mv^2 + \mu_r F_N s = mgh_2$. Die Normalkraft F_N steht senkrecht auf der Rollstrecke. Den Systemen wird Energie in Form von Wärme entzogen. Für die schiefe Ebene gilt: $F_N = mg\cos\alpha$. Die Strecke der schiefen Ebene ist für die 1. Kugel $s_1 = \frac{h_1}{\sin\alpha}$, die für die 2. Kugel $s_2 = \frac{h_2}{\sin\alpha}$ lang. Hieraus folgt $F_N \cdot s_1 = mgh_1\cot\alpha$ bzw. $F_N \cdot s_2 = mgh_2\cot\alpha$.

Für die Geschwindigkeit auf der schiefen Ebene in der Höhe *h* gilt folglich für die 1. Kugel:

$$v_1(h) = \sqrt{\frac{10}{7}g(h_1 - h) - \mu_r g\cot\alpha(h_1 - h)} = \sqrt{(\frac{10}{7} - \mu_r\cot\alpha)g(h_1 - h)}$$

Für die 2. Kugel gilt entsprechendes. Die Geschwindigkeiten am jeweiligen Fußpunkt der schiefen Ebenen sind folglich:

1. Kugel: $v_{11} = v_1(h=0) = \sqrt{\frac{10 - 7\mu_r\cot\alpha}{7}gh_1}$, **2. Kugel:** $v_{21} = v_2(h=0) = \sqrt{\frac{10 - 7\mu_r\cot\alpha}{7}gh_2}$

Berechnen wir die Zeit, die während des Rollens auf der schiefen Ebene vergeht.

Aus $dt = -\frac{dh}{v} = -\frac{dh}{\sqrt{(\frac{10}{7} - \mu_r\cot\alpha)g(h_1 - h)}} = -\sqrt{\frac{7}{(10 - 7\mu_r\cot\alpha)g}}\frac{dh}{\sqrt{h_1 - h}}$ folgt $t_1(h) = 2\sqrt{\frac{7(h_1 - h)}{(10 - 7\mu_r\cot\alpha)g}}$. Für die 1. Kugel ist die Zeit $t_1 = t_2(h=0) = 2\sqrt{\frac{7h_1}{(10 - 7\mu_r\cot\alpha)g}}$ vergangen, wenn sie die Horizontale erreicht. Für die 2. Kugel ist die Zeit $t_2 = t_2(h=0) = 2\sqrt{\frac{7h_2}{(10 - 7\mu_r\cot\alpha)g}}$ vergangen, wenn sie die Horizontale des 2. Systems erreicht.

Bis zum Zeitpunkt t_2 ist die 1. Kugel auf der Horizontalen eine Strecke gerollt. Zu beachten ist, dass die Geschwindigkeit aufgrund der Reibung weiter abnimmt. Demnach ist $v_{12}(t) = v_{11} - \mu_r gt$, da $F_G = F_N$ ist.

Berechnen wir den Weg der 1. Kugel auf der Horizontalen. Er beträgt

$$w_1 = \int_{t_1}^{t_2} (v_{11} - \mu_r g\tau)\, d\tau = v_{11} \cdot (t_2 - t_1) - \frac{1}{2}\mu_r g(t_2^2 - t_1^2)\,.$$

Demnach legt die 1. Kugel folgenden Weg zurück:

$$v_{11} \cdot (t_2 - t_1) = \sqrt{\frac{10-7\mu_r \cot\alpha}{7} g h_1} \cdot 2 \, \sqrt{\frac{7h_2}{(10-7\mu_r \cot\alpha)g}} - \sqrt{\frac{7h_1}{(10-7\mu_r \cot\alpha)g}}$$

$$= 2(\sqrt{h_1 h_2} - h_1)$$

und

$$\frac{1}{2}\mu_r g(t_2^2 - t_1^2) = \frac{1}{2}\mu_r g \cdot 4 \, \frac{7h_2}{(10-7\mu_r \cot\alpha)g} - \frac{7h_1}{(10-7\mu_r \cot\alpha)g}$$

$$= \frac{14\mu_r (h_2 - h_1)}{10-7\mu_r \cot\alpha}$$

Insgesamt hat folglich die 1. Kugel den Weg $2(\sqrt{h_1 h_2} - h_1) - \frac{14\mu_r (h_2-h_1)}{10-7\mu_r \cot\alpha}$ auf der Horizontalen zurückgelegt, wenn die 2. Kugel den Fußpunkt erreicht. Die Geschwindigkeit beträgt dann

$$v_{12} = v_{11} - \mu_r g(t_2 - t_1)$$

$$= \sqrt{\frac{10 - 7\mu_r \cot\alpha}{7} g h_1} - \mu_r g \cdot 2 \, \sqrt{\frac{7h_2}{(10-7\mu_r \cot\alpha)g}} - \sqrt{\frac{7h_1}{(10-7\mu_r \cot\alpha)g}}\,.$$

$$= \sqrt{\frac{10 - 7\mu_r \cot\alpha}{7} g h_1} - \sqrt{\frac{28 h_2 \mu_r^2 g}{10-7\mu_r \cot\alpha}} + \sqrt{\frac{28 h_1 \mu_r^2 g}{10-7\mu_r \cot\alpha}}$$

Zu diesem Zeitpunkt befindet sich die 2. Kugel, bezogen auf die Horizontale der 1. Kugel, an der Stelle $(h_2 - h_1)\cot\alpha$.

Längs des Weges w verringert sich auch die Geschwindigkeit der 2. Kugel weiter. Die Zeit für diese Strecke sei t_3. Dann ist die Geschwindigkeit am Ende der Strecke $v_{22} = v(t_3) = v_{21} - \mu_r g t_3$. Es ist $w = \int_0^{t_3} (v_{21} - \mu_r g\tau)\, d\tau = v_{21} \cdot t_3 - \frac{1}{2}\mu_r g t_3^2$ nach t_3 aufzulösen. Dies liefert $t_3 = \frac{1}{\mu_r g}(v_{21} - \sqrt{v_{21}^2 - 2\mu_r w g})$. Am Ende der Strecke w beträgt die Geschwindigkeit der 2. Kugel $v_{22} = v_{21} - \mu_r g \cdot \frac{1}{\mu_r g}(v_{21} - \sqrt{v_{21}^2 - 2\mu_r w g}) = \sqrt{v_{21}^2 - 2\mu_r w g}$. Die 1. Kugel hat in dieser Zeit den Weg $w_2 = \int_0^{t_3} (v_{12} - \mu_r g\tau)\, d\tau = v_{12} \cdot t_3 - \frac{1}{2}\mu_r g \cdot t_3^2$ zurückgelegt. Berechnen wir im Einzelnen.

$$v_{12}\,t_3 = v_{12}\cdot\frac{1}{\mu_r g}\left(v_{21}-\sqrt{v_{21}^2-2\mu_r wg}\right) = \frac{1}{\mu_r g}\left(v_{12}v_{21}-v_{12}\sqrt{v_{21}^2-2\mu_r wg}\right)$$

$$\frac{1}{2}\mu_r g\cdot t_3^2 = \frac{1}{2}\mu_r g\cdot\frac{1}{(\mu_r g)^2}\left(v_{21}-\sqrt{v_{21}^2-2\mu_r gw}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_r g}\left(v_{21}^2-2v_{21}\sqrt{v_{21}^2-2\mu_r gw}+v_{21}^2-2\mu_r gw\right) = \frac{1}{\mu_r g}\left(v_{21}^2-v_{21}\sqrt{v_{21}^2-2\mu_r gw}\right)-w$$

Also ist

$$w_3 = \frac{1}{\mu_r g}\left(v_{12}v_{21}-v_{12}\sqrt{v_{21}^2-2\mu_r wg}-v_{21}^2+v_{21}\sqrt{v_{21}^2-2\mu_r gw}\right)+w = w-\frac{1}{\mu_r g}\left(v_{21}^2-v_{12}v_{21}-(v_{21}-v_{12})\sqrt{v_{21}^2-2\mu_r wg}\right)$$

Die 2. Kugel muss nun noch aufsteigen. Der Energiesatz lautet: $mgh+\frac{7}{10}mv^2+\mu_r F_N s=\frac{7}{10}mv_{21}^2$

Die Zeit, die dafür vergeht ist