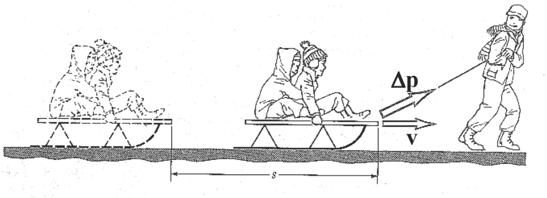
Die Energie

Nachfolgend einige Betrachtungen der klassischen Physik. Der Autor identifiziert sich nicht in allen Teilen der Schrift.

Die dynamische Energie (klassischer Fall nach NEWTON)



Wir haben bisher für einen bewegten Körper die Bewegungsmenge bzw. den Impuls als eine wichtige Größe in der Physik erkannt. Nun möchte man aber zusätzlich eine Größe haben, die es gestattet direkt gemessen zu werden. Messen bedeutet aber eine reelle Zahl zuzuordnen. Der Impuls ist jedoch eine gerichtete Größe. Folglich darf die Richtung keine Rolle spielen. Um die gesamte Bilanz zu erhalten, verlangen wir noch zusätzlich, dass sich die einzelnen Messgrößen addieren lassen sollen.
Fazit: Wir brauchen eine neue Größe, die unseren Anforderungen genügt und vom Impuls getragen wird. Es ist die **Energie** und bezeichnen sie mit dem Buchstaben ***E***.

Betrachten wir das obige Beispiel. Hier zieht der Junge den Schlitten mit den beiden Kindern. Der Schlitten bewegt sich mit der Geschwindigkeit v. Zusätzlich wird durch das Zugseil dem Schlitten eine Impulsänderung Δp zugeführt, damit er die Geschwindigkeit v beibehält. Wir schreiben $v = \frac{p}{m}$.

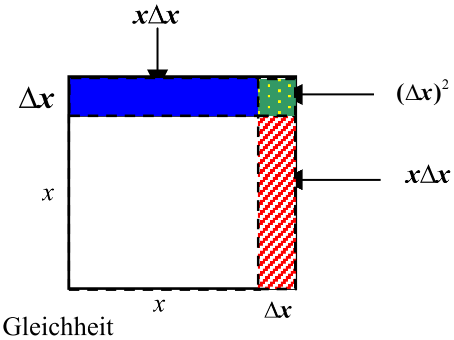
Da p von der Richtung im Raum abhängt, eliminieren wir die Richtung, indem wir $p \cdot p =: p^2$ betrachten. Dieser Wert ist eine Zahl.

Forderung: Die Energieänderung soll proportional der quadratischen Impulsänderung sein, also

$$\Delta E \approx \Delta(p^2)\,.$$

Mathematischer Exkurs:

Wir wollen überlegen, dass die Gleichheit $\Delta(x^2) = 2x\Delta x$ gilt, solange $\boldsymbol{\Delta x}$ extrem klein ist. Dazu betrachten wir folgende Skizze.



Aus der Zeichnung entnehmen wir die Gleichheit

$$\Delta(x^2) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2\,.$$

Da $\boldsymbol{\Delta x}$ extrem klein ist, kann $\boldsymbol{\Delta(x)^2}$ vernachlässigt werden.

Dieses Verfahren heißt numerisches Differenzieren; die Umkehrung numerisches Integrieren.

Ende des Exkurses.

Es zeigt sich nun durch Messungen, dass die Äquivalenz $\Delta E \approx \Delta(p^2)$ bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist. Die Konstante ist $\frac{1}{2m}$. Mithin gilt

$$\Delta E = \frac{1}{2m}\Delta(p^2)\,. \qquad \textbf{(1)}$$

Zu beachten ist lediglich, dass wir nur sehr kleine Impulsänderungen zulassen wollen. Ersetzen wir nun $\Delta(p^2) = 2p\Delta p$, so geht die Gleichung $\Delta E = \frac{1}{2m}\Delta(p^2)$ über in die

Fundamentalgleichung der klassischen Mechanik

$$\Delta E = \frac{p}{m}\cdot\Delta p \qquad \textbf{(2)}$$

Dies ist unsere gesuchte Größe, von der sich gezeigt hat, dass sie allen Anforderungen genügt.
Wegen $\frac{p}{m} = v$ kann (2) auch als

$$\Delta E = v\cdot\Delta p \qquad \textbf{(3)}$$

geschrieben werden.
Leider wissen wir immer noch nicht, was letztlich ***E*** selbst ist. Dazu verwenden wir die Gleichung (1) und beachten, das die Masse eine konstante Zahl ist.

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta E - \frac{1}{2m}\cdot\Delta(p^2) \\ &= \Delta E - \Delta(\frac{1}{2m}\cdot p^2) \\ &= \Delta(E - \frac{p^2}{2m}) \end{aligned}$$

Da die Differenz null ist, muss es sich um eine Konstante handeln.

Erkenntnis: $E - \frac{p^2}{2m} = E_0$, wobei die Konstante E_0 die sogenannte **„Ruheenergie“** für $p = 0$ ist.
Hier müssen wir insbesondere das System betrachteten, indem wir uns befinden. Insgesamt haben wir das angestrebte Ergebnis.

Die dynamische Energie der klassischen Mechanik

$$E = \frac{p^2}{2m} + E_0 \qquad \textbf{(4)}$$

Für den außenstehenden Beobachter ist die Energie null, wenn kein Impuls vorhanden ist, also gilt in diesem Fall $E_0 = 0$.

Wegen $p = m\cdot v$ gilt mithin: $\frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2$ und $E_0 = 0$.

Die dynamischen Erhaltungssätze der klassischen Mechanik

Für bewegte Körper müssen folgende Bilanzen überprüft werden. In der klassischen Mechanik setzen wir voraus, dass sich alle Körper mit einer gegenüber der Lichtgeschwindigkeit (300 000 000 $\frac{m}{s}$) kleinen Geschwindigkeit bewegen. Dann gelten in einem abgeschlossenen System folgende Sätze.

1. **Der Massenerhaltungssatz:** Die Gesamtmasse bleibt erhalten.
   Da keine Massen entfernt noch hinzugefügt werden, gilt in der klassischen Mechanik der Massenerhaltungssatz als gesichert. Dies ist auch in der Chemie für Ionenbewegungen und Molekülbewegungen richtig.
2. **Der Impulserhaltungssatz:** Die Summe aller linearen Impulse (mit Richtungen) bleibt erhalten, solange keine Rotationen vorhanden sind.
3. **Der Energieerhaltungssatz:** Die Summe aller Energien bleibt erhalten.

Vorsicht: Dies gilt nicht mehr so ohne weiteres, wenn Licht(quanten) als Teilchen betrachtet beteiligt sind. In der klassischen Mechanik ist ihr Impuls null, da $m = 0$ ist. Wir kommen bald darauf zurück.

Für den Impuls- und Energieerhaltungssatz müssen zwei Fälle unterschieden werden.

A) Die Körper trennen sich nach dem Stoß und behalten ihre ursprüngliche Form bei (Elastischer Stoß).

B) Die Körper trennen sich nicht oder behalten ihre Form nach dem Stoß nicht bei (Unelastischer Stoß).

Für zwei beteiligte bewegte Körper gelten folgende Aussagen in Abwesenheit von anderen Feldern.

Impulserhaltungssatz: $p_1 + p_2 = P_1 + P_2$ Energieerhaltungssatz: $\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{P_1^2}{2M_1} + \frac{P_2^2}{2M_2}$

In allen Fällen ist der Impulserhaltungssatz erfüllt. Der Energiesatz nur für elastische Stöße.
Was ist mit der Energie in den unelastischen Stößen passiert? Wohin ist sie entschwunden?
Zur Verformung der Körper ist Energie umgewandelt worden. Diese kannst du nun berechnen, indem du diese abgeführte Energie E_D als Differenz der Energie vorher und nachher ansetzt (z. B. „Innere Energie").

$$E_D = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} - \frac{P_1^2}{2M_1} - \frac{P_2^2}{2M_2}$$

Der allgemeine Energiesatz der klassischen Mechanik

In unseren bisherigen Versuchen waren wir immer darauf bedacht das Gravitationsfeld zu umgehen, indem wir Luftkissen verwendet haben, um den Gravitationsimpuls auszuschließen. Was geschieht aber, wenn das nicht mehr möglich ist?
Betrachten wir dazu einen Ball, den wir aus einer Höhe h auf den Boden fallen lassen und untersuchen die einzelnen Zeitabschnitte.
In der Höhe h hat der Ball die Geschwindigkeit **null**. Während er fällt, nimmt seine Geschwindigkeit laufend zu, bis er den Boden erreicht. Hier wird er deformiert und springt mit derselben Geschwindigkeit wieder zurück. In der Aufstiegsphase nimmt nun seine Geschwindigkeit laufend ab, bis er die Höhe h wieder erreicht. Dort ist seine Geschwindigkeit wieder **null**.
Da dem Ball von außen weder Energie zu- noch abgeführt wurde (außer innere Energie), hat er seine dynamische Energie aus dem Gravitationsfeld geholt.

Fazit: Ein Gravitationsfeld enthält Energie.

Diese Energie nennen wir **potentielle Energie**, da sie erst dann in Erscheinung tritt, wenn sich ein Körper im Gravitationsfeld bewegt.

Was ist nun mit dem **Energieerhaltungssatz**?

Die Energie hat keine Richtung. Folglich kann der Energiesatz in Anwesenheit von Gravitation allein in der dynamischen Form nicht mehr gelten. In der Höhe h ist die dynamische Energie **null**, also nicht vorhanden. Andererseits hat der Ball kurze Zeit später wieder dynamische Energie, die sogar zunimmt.

Die Energie

Was können wir tun?

Erinnern wir die Gleichung $E = \frac{p^2}{2m} + E_0$, in der wir die Ruheenergie E_0 gleich **null** setzen, wenn $p = 0$ ist. Man könnte also für den Fall, dass Gravitationsfelder anwesend sind, die Gleichung korrigieren.

Schreiben wir jetzt E für die gesamte Energie, E_{dyn} für die dynamische Energie und U für die potentielle Energie. Es gilt folglich

$$E = E_{\text{dyn}} + U.$$

Diese gesamte Energie muss nun eine Konstante, also eine Zahl mit einer Einheit sein. Folglich gilt

$$\Delta E = 0, \text{ also } \Delta U = -\Delta E_{\text{dyn}} = -v \cdot \Delta p$$

nach dem Fundamentalsatz der klassischen Mechanik.

Die Geschwindigkeit v des Balles ist aber $v = \frac{\Delta h}{\Delta t}$, denn als Weg legt er einen Teil der Höhe zurück.

Die Impulsänderung Δp des Gravitationsfeldes ist durch $\Delta p = -m \cdot g \cdot \Delta t$ gegeben. Somit gilt:

$$\Delta U = -\Delta E_{\text{dyn}} = -v \cdot \Delta p = \frac{\Delta h}{\Delta t} \cdot m \cdot g \cdot \Delta t = m \cdot g \cdot \Delta h.$$

Also ist $\Delta(U - m \cdot g \cdot h) = 0$ und damit $U = m \cdot g \cdot h + U_0$, für eine Konstante U_0. Wir setzen wieder $U_0 = 0$ für $h = 0$.

Für die klassische Energie eines Körpers im Gravitationsfeld erhalten wir den Erhaltungssatz

$$E = E_{\text{dyn}} + U.$$

In anderer Gleichung folglich

$$E = \frac{p^2}{2m} + m \cdot g \cdot h\,.$$

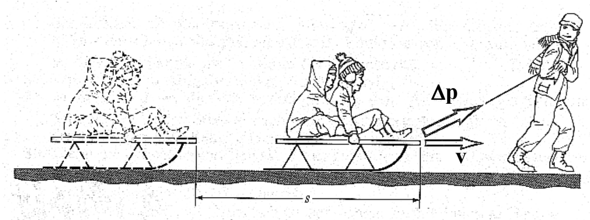
Energien mit anderen Trägern

Betrachten wir noch einmal den Ball beim Aufprall. Wenn wir den Vorgang in Zeitlupe betrachten, stellen wir fest, dass die potentielle Energie und die dynamische Energie gleich null sind, also $U = 0$ und $E_{\text{dyn}} = 0$, denn der Ball hat keine Geschwindigkeit mehr und auch keine Höhe für einen winzigen Augenblick. Da der Ball elastisch ist, nimmt er seine ursprüngliche Form wieder an. Die Energie, die er zur Verformung aufgewandt hat, nimmt er wieder vollständig zurück. Diese Form heißt (elastische) **Deformationsenergie**.

Verliert oder gewinnt der Körper an Entropie, so wird Energie zu- oder abgeführt. Diese Form heißt **Entropieenergie** (Wärmeenergie).

Arbeit ist Energie.

Betrachten wir unseren Schlitten im Ausgangsbeispiel.



Welche Energie W **(Work out)** muss aufgebracht werden, um den Schlitten die Strecke Δs weiter zu bewegen.

Die Energie

Mit der Fundamentalgleichung $\Delta W = v \cdot \Delta p$, der Geschwindigkeit $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ und dem Impulsstrom (Kraft) $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ finden wir durch Einsetzen:

$$\Delta W = v \cdot \Delta p = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \Delta p = \Delta s \cdot \frac{\Delta p}{\Delta t} = \Delta s \cdot F.$$

Ist nun der Impulsstrom F konstant, so folgt wieder $\Delta(W - s \cdot F) = 0.$, also

$$W = s \cdot F + W_0.$$

Hierbei ist W_0 die Ruhearbeit für $F = 0.$ Wir setzen wieder $W_0 = 0.$

Fließt ein Impulsstrom *F* längs des Weges *s*, so wird Energie *W* auf einen anderen Träger geladen.

Diese Form der Energie wird meist im folgenden Zusammenhang verwendet.

Wirkt eine Kraft *F* längs eines Weges *s* auf einen Körper (System), so wird Arbeit *W* verrichtet.

Der Begriff Arbeit ist umgangssprachlich irreführend, da viele unter Arbeit „etwas in einer Zeit verrichten“ verstehen. Den präzisen Begriff hierzu werden wir jetzt kennen lernen.

Der Energiestrom (Die Leistung)

Fließt Energie ***E*** von einem System zu einem anderen System oder von einem Körper zu einem anderen Körper, so nennen wir dies den **Energiestrom.**

Die **Energiestromstärke *P*** ist definiert durch

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

Die Energiestromstärke heißt in der Physik auch **Leistung**.

Hat sich der Aufwand gelohnt, den wir hier betrieben haben? Betrachten wir dazu ein Arbeitsbeispiel.

Aufgabe
Eine Eisenkugel wird aus einer Höhe von $20m$ über der Erdoberfläche fallen gelassen.

a) Welche Geschwindigkeit hat sie in $10m$ Höhe und welche Zeit ist bis jetzt vergangen?
b) Mit welcher Geschwindigkeit trifft sie auf die Erde?
c) Wie groß ist ihre Beschleunigung in $10m$ Höhe?
d) Wie groß ist ihre Beschleunigung beim Auftreffen auf die Erde?
e) Wie lautet die Funktion des Weges in Abhängigkeit der Zeit $s(t)$?

Jetzt wird die Eisenkugel zusätzlich waagerecht mit einer Geschwindigkeit von $3\frac{m}{s}$ weggeworfen.

f) Welche Geschwindigkeit hat sie in $10m$ Höhe und welche Zeit ist bis jetzt vergangen?
g) Mit welcher Geschwindigkeit trifft sie auf die Erde?
h) Wie groß ist ihre Beschleunigung in $10m$ Höhe?
i) Wie groß ist ihre Beschleunigung beim Auftreffen auf die Erde?
j) Welche Flugbahn beschreibt die Eisenkugel?

Lösung
Zunächst befindet sich die Eisenkugel im Gravitationsfeld und besitzt daher Gravitationsenergie (potentielle Energie). Außerdem bewegt sie sich nach unten, wenn sie losgelassen wird. Wir wenden daher den Energieerhaltungssatz $E = \frac{p^2}{2m} + m \cdot g \cdot h$ an. In $20m$ Höhe besitzt die Eisenkugel die

Energie $E = m \cdot g \cdot h = m \cdot 10 \cdot 20 \frac{J}{kg} = m \cdot 200 \frac{J}{kg}$. Diese bleibt jetzt erhalten. Den Energieerhaltungssatz schreiben wir als $E = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h$. Es gilt folglich $m \cdot 200 \frac{J}{kg} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h$.

a) Setzen wir das Datum $10m$ ein.

$$
\begin{aligned}
m \cdot 200 \tfrac{J}{kg} &= \frac{1}{2} m \cdot v^2 + m \cdot 10 \cdot 10 \tfrac{J}{kg} \\
200 \tfrac{J}{kg} &= \frac{1}{2} v^2 + 100 \tfrac{J}{kg} \\
200 \tfrac{J}{kg} &= v^2 \\
v &= \sqrt{200 \tfrac{J}{kg}} \\
v &= 14{,}14 \tfrac{m}{s}
\end{aligned}
$$

In $10m$ Höhe besitzt die Eisenkugel eine Geschwindigkeit von $14{,}14 \frac{m}{s}$ bzw. $50{,}9 \frac{km}{h}$.

Es ist die Höhe $0\ m$ einzusetzen. Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
m \cdot 200 \tfrac{J}{kg} &= \frac{1}{2} m \cdot v^2 + m \cdot 10 \cdot 0 \tfrac{J}{kg} \\
200 \tfrac{J}{kg} &= \frac{1}{2} v^2 \\
400 \tfrac{J}{kg} &= v^2 \\
v &= \sqrt{400 \tfrac{J}{kg}} \\
v &= 20 \tfrac{m}{s}
\end{aligned}
$$

Die Eisenkugel trifft mit einer Geschwindigkeit von $20 \frac{m}{s}$ bzw. $72 \frac{km}{h}$ auf die Erdoberfläche.

b) Die Durchschnittsbeschleunigung beträgt $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. In $10m$ Höhe besitzt die Eisenkugel eine Geschwindigkeit von $14{,}14 \frac{m}{s}$. Folglich beträgt die Beschleunigung $a = \frac{14{,}14 \frac{m}{s}}{\Delta t}$. Aber welche Zeit ist vergangen? Während des Fallens ist ein Energiestrom in die Eisenkugel geflossen. Bemühen wir daher unsere Formel , $W = s \cdot F + W_0$, wobei $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = m \cdot a$ ist. Die Energie in $10m$ Höhe beträgt $m \cdot 100 \frac{J}{kg}$. Folglich erhalten wir

$$
\begin{aligned}
m \cdot 100 \tfrac{J}{kg} &= s \cdot F \\
m \cdot 100 \tfrac{J}{kg \cdot m} &= 10 \cdot m \cdot a \\
10 \tfrac{J}{kg \cdot m} &= a \\
a &= 10 \tfrac{m}{s^2}
\end{aligned}
$$

c) Die Beschleunigung beim Auftreffen beträgt nun (die gesamte Energie ist in die Eisenkugel geflossen)

$$a = 20 \tfrac{m}{s^2}.$$

d) $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, $v = \sqrt{200 \frac{J}{kg}}$ $\quad \Delta s = \sqrt{200 \frac{J}{kg}} \cdot \Delta t$ $\quad s = \sqrt{200 \frac{J}{kg}} \cdot t + s_0$.

Die Energie

Die dynamische Energie (relativistischer Fall nach EINSTEIN)

Wir wissen bereits, dass sich im klassischen Fall die Geschwindigkeiten addieren, wenn sich zwei Körper aufeinander zu bewegen und wir unseren Standort auf einen der Körper annehmen. Wir haben dies die Relativgeschwindigkeit genannt.
Wenn also zwei Teilchen mit 0,8*c*, *c* Lichtgeschwindigkeit, aufeinander zu bewegen, so wäre ihre Relativgeschwindigkeit 1,6*c*.

Michelson wollte in einen Versuch mit Licht nachweisen, das es einen Äther gibt. Alle Experimente zeigten jedoch ein negatives Ergebnis, so wird es behauptet. Er bekam heraus, das die Relativgeschwindigkeit auch *c* ist. Er glaubte jedoch an Messfehler und das seine Apparatur den Messungen nicht genügen würde.

Einstein zog jedoch daraus den Schluss, das sich kein Körper schneller als *c* bewegen kann und machte dies zu einem Gesetz.
Darüber hinaus sagte er sich, wenn doch nur Masse bewegt wird, so muss auch die Masse selbst eine Energie sein.
Wir wollen nun untersuchen, welche Konsequenzen diese Behauptungen nach sich ziehen.
Zunächst muss nach der Forderung folgende Gleichung gelten:

$$E = c^2 \cdot m(v)\,, \tag{1}$$

wobei c eine positive Zahl mit der Einheit einer Geschwindigkeit sein muss.

Der Impuls lautet nun:

$$p = m(v) \cdot v = \frac{E}{c^2} \cdot v\,.$$

Die Fundamentalgleichung der Mechanik lautet damit**:**

$$\Delta E = v \cdot \Delta(\frac{E}{c^2} \cdot v)\,.$$

Wir multiplizieren mit E und finden

$$E \cdot \Delta E = E \cdot v \cdot \Delta(\frac{E}{c^2} \cdot v)\,.$$

Hieraus folgt wieder

$$\Delta(E^2) = \Delta(\frac{E^2}{c^2} \cdot v^2) \Leftrightarrow E^2 - E^2\frac{v^2}{c^2} = E_0^2 \Leftrightarrow E^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) = E_0^2 \Leftrightarrow E^2 = \frac{E_0^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,.$$

Durch Wurzelziehen folgt

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{2}$$

Teilen wir beide Seiten durch c^2, so haben wir

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3}$$

Als letztes multiplizieren wir 2. mit v, so folgt

$$p = \frac{p_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4}$$

Dies sind die Gleichungen für die **EINSTEIN-Mechanik**. Jetzt gibt es nur noch einen Impulserhaltungssatz und einen Energieerhaltungssatz, da (2) und (3) bis auf eine Konstante identisch sind.

Interpretieren wir noch $\Delta(E^2) = \Delta(\frac{E^2}{c^2} \cdot v^2)$. Mit $p = m(v) \cdot v = \frac{E}{c^2} \cdot v$ folgt $c \cdot p = \frac{E}{c} \cdot v$, also

$$\Delta(E^2) = \Delta(\frac{E^2}{c^2} \cdot v^2) = \Delta((c \cdot p)^2).$$

Folglich gilt

$$\Delta(E^2) = \Delta((c \cdot p)^2) \Leftrightarrow \Delta(E^2 - (c \cdot p)^2) = 0 \Leftrightarrow E^2 - (c \cdot p)^2 = E_0^2 \Leftrightarrow E = \sqrt{E_0^2 + (c \cdot p)^2} \; .$$

Die dynamische Energie (quantentheoretischer Fall nach PLANCK)

Bei der Untersuchung von Interferenzen durch Elektronen, stellt sich heraus, dass das Produkt aus Impuls und Wellenlänge konstant ist. Diese Konstante wird als ***plancksche Konstante*** (h = $6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Js) identifiziert. Es gilt folglich

$$p \cdot \lambda = h \; . \qquad \textbf{(1)}$$

De Broglie interpretierte dies als Wellelänge des Teilchens, ***De-Broglie-Welle***.

Was ist aber, wenn die „Teilchen" keine Masse haben? Licht (sogenannte Photonen) hat keine Masse! Die Antwort ist $v = c$ nach Einstein. Aus der Fundamentalgleichung $\Delta E = c \cdot \Delta p$ folgt nun $\Delta E = \Delta(c \cdot p) \Leftrightarrow \Delta(E) - \Delta(c \cdot p) = 0 \Leftrightarrow \Delta(E - c \cdot p) = 0$, da c eine Konstante ist, also $E = c \cdot p + E_0$.

Hieraus folgt, dass jetzt der Impuls selbst „Energie" ist. Die Lichtgeschwindigkeit ist eine Proportionalitätskonstante. Ersetzen wir nun den Impuls $p = \frac{h}{\lambda}$ aus (1), so folgt

$$E = c \cdot p + E_0 = c \cdot \frac{h}{\lambda} + E_0.$$

Die „Wellenfront" der Lichtwelle breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit aus. Die Wellenlänge ist der senkrechte Abstand von einem Wellenberg zum nächsten Wellenberg. Da die Frequenz die Anzahl der Wechsel pro Sekunde angibt, gilt folglich für die Ausbreitungsgeschwindigkeit c der Zusammenhang $c = \lambda \cdot f$.

Hiermit folgt endlich

$$E = h \cdot f + E_0 \; .$$

Interpretation: Licht oder Elektromagnetische Signale (z.B. Radiosignale) können als räumliche Wellen aufgefasst werden. Wie dicht die Wellen beieinander liegen ist ein Maß für die Energie. Die Dichte der Wellen wird durch die Frequenz angegeben.

Die folgenden drei Fundamentalgleichungen bilden damit die Grundlage der klassischen Quantentheorie.

$$\boxed{E = h \cdot f + E_0 \, , \; p = \frac{h}{\lambda} \, , \; c = \lambda \cdot f}$$

Zu der modernen Quantentheorie kommt man durch die Festlegung von **HEISENBERG:**

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}, \; \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{h}{4\pi}, \; \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \frac{h}{4\pi}.$$

Die Orts- und Impulsänderung können nicht gleichzeitig exakt bestimmt werden. Man kann nur eine Wahrscheinlichkeit hierzu angeben. Sie wird deshalb als „Unschärferelation" bezeichnet. Die drei Gleichungen können auch durch $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}$ ausgedrückt werden.

Für kleine schnelle Masse-Teilchen (z.B. Elektronen) muss gleichzeitig der Impuls $p = mv$ und die von EINSTEIN entwickelten Gleichungen gültig sein. Mit diesem Ansatz arbeiten Elementarteilchenbeschleuniger.