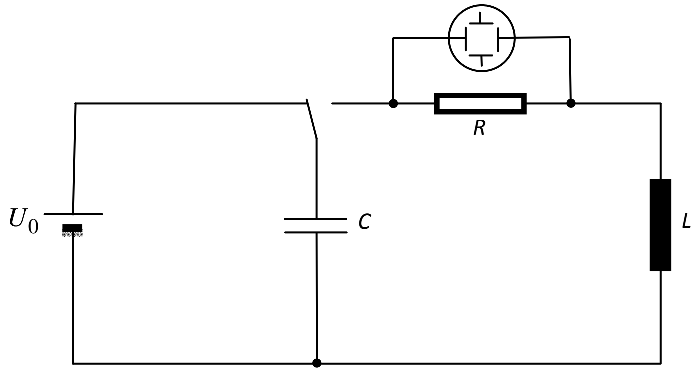
Schwingkreis

Versuchsaufbau bestehend aus einer Gleichspannungsquelle $U_0 = 50\,\mathrm{V}$, Kondensator $C = 40\,\mu\mathrm{F}$, Widerstand $R = 10\,\Omega$, einer Induktivität $L = 500\,\mathrm{mH}$ und einem Schalter.



Zunächst wird der Kondensator aufgeladen. Er speichert die Energie $E_C = \frac{1}{2} C U_0^2$. Der Schalter wird nun umgelegt. Mit dem Energieerhaltungssatz,

$$E_C(t) + E_R(t) + E_L(t) = \tfrac{1}{2} C U_0^2$$

erhalten wir durch differenzieren nach der Zeit die Energiestromgleichung

$$\dot{E}_C(t) + \dot{E}_R(t) + \dot{E}_L(t) = 0.$$

Nun gilt $\dot{E}_C(t) = CU(t)\dot{U}(t)$, $\dot{E}_R(t) = U(t)I(t)$, $\dot{E}_L(t) = LI(t)\dot{I}(t)$ und $CU(t) = Q(t)$, $I(t) = \dot{Q}(t)$ sowie $U(t) = RI(t)$. Beschreiben wir alle Energieströme durch die Ladungen $Q(t)$ und Ladungsströme $\dot{Q}(t)$. Wir erhalten $\dot{E}_C(t) = Q(t)\frac{1}{C}I(t)$, $\dot{E}_R(t) = RI(t)I(t)$ und $\dot{E}_L(t) = LI(t)\dot{I}(t)$. Setzen wir ein.

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{E}_C(t) + \dot{E}_R(t) + \dot{E}_L(t) \\ &= \tfrac{1}{C} Q(t) I(t) + RI(t)I(t) + LI(t)\dot{I}(t) \\ &= \left(\tfrac{1}{C} Q(t) + RI(t) + L\dot{I}(t)\right) I(t) \end{aligned}$$

Diese Gleichung muss für alle Zeiten $t \geq 0\,\mathrm{s}$ gelten. Folglich kann nur die Klammer null sein, d.h.

$$\tfrac{1}{C} Q(t) + RI(t) + L\dot{I}(t) \equiv 0.$$

Statt = schreiben wir nun $\equiv$, da es für alle Zeiten $t \geq 0\,\mathrm{s}$ gilt. Es sind also keine Nullstellen zu bestimmen. Differenzieren wir die Gleichung noch einmal nach der Zeit und schreiben die Gleichung ein wenig um:

$$\ddot{I}(t) + \tfrac{R}{L}\dot{I}(t) + \tfrac{1}{LC} I(t) \equiv 0.$$

Wäre $R = 0$, so hätten wir eine reine Sinusschwingung, denn $I(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$, $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ löst die Gleichung, denn $\ddot{I}(t) = -\omega^2 \cdot \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = -\frac{1}{LC} \cdot \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$.

Mit dem Widerstand $R \neq 0$ ergibt sich eine mit der Zeit abnehmende Amplitude. Deshalb bedarf es eines Dämpfungsfaktors. Folglich machen wir den Ansatz $I(t) = \hat{I} \cdot e^{-at} \sin(\omega t + \varphi_0)$ und differenzieren.

$$\begin{aligned} \dot{I}(t) &= -aI(t) + \hat{I} \cdot e^{-at} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \\ &= \hat{I} \cdot e^{-at} \left[-a \sin(\omega t + \varphi_0) + \omega \cos(\omega t + \varphi_0) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{I}(t) &= -a\dot{I}(t) + \hat{I} \cdot e^{-at} \left[-a\omega \cos(\omega t + \varphi_0) - \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \right] \\ &= \hat{I} \cdot e^{-at} \left[a^2 \sin(\omega t + \varphi_0) - a\omega \cos(\omega t + \varphi_0) \right] + \hat{I} \cdot e^{-at} \left[-a\omega \cos(\omega t + \varphi_0) - \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \right] \\ &= \hat{I} \cdot e^{-at} \left[\left(a^2 - \omega^2 \right) \sin(\omega t + \varphi_0) - 2a\omega \cos(\omega t + \varphi_0) \right] \end{aligned}$$

Nun kann in die Differentialgleichung eingesetzt werden, um die Lösung für die Unbekannten zu finden.

Wir gehen anders vor! In den Ableitungen benötigen wir nur die ersten Zeilen. Beginnen wir!

$$I(t) = \hat{I} \cdot e^{-at} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\dot{I}(t) = -aI(t) + \hat{I} \cdot e^{-at} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \Leftrightarrow \dot{I}(t) + aI(t) = \hat{I} \cdot e^{-at} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

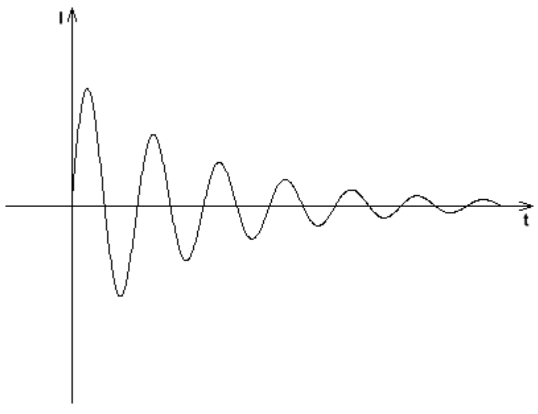
$$\begin{aligned} \ddot{I}(t) + a\dot{I}(t) &= -a \cdot \hat{I} \cdot e^{-at} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) - \omega^2 \cdot \hat{I} \cdot e^{-at} \sin(\omega t + \varphi_0) \\ &= -a\dot{I}(t) - a^2 I(t) - \omega^2 I(t) \\ &= -a\dot{I}(t) - \left(a^2 + \omega^2 \right) I(t) \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu $\ddot{I}(t) + 2a\dot{I}(t) + \left(a^2 + \omega^2 \right) I(t) \equiv 0$. Der Vergleich mit der gegebenen Differentialgleichung $\ddot{I}(t) + \frac{R}{L}\dot{I}(t) + \frac{1}{LC} I(t) \equiv 0$ zeigt: $a = \frac{R}{2L}$ und $a^2 + \omega^2 = \frac{1}{LC}$, also $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{4L^2C^2}\left(4LC - R^2C^2 \right)$. Die Lösung lautet folglich

$$I(t) = \hat{I} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \sin\left(\frac{1}{2LC}\sqrt{4LC - R^2C^2} \cdot t + \varphi_0 \right).$$

Die elektrische Spannung über den Widerstand erhalten wir durch $U(t) = RI(t)$. Folglich ist

$$U(t) = \hat{U} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \sin\left(\frac{1}{2LC}\sqrt{4LC - R^2C^2} \cdot t + \varphi_0 \right) \text{ mit } \hat{U}(t) = R\hat{I}(t).$$



Diskussion

Betrachten wir die Frequenz ω genauer. In ihr taucht die Wurzel $\sqrt{4LC - R^2C^2}$ auf. Hier stellt sich die Frage: Wie sieht die Lösung für a) $4LC - R^2C^2 = 0 \Leftrightarrow 4L = R^2C \ \vee \ C = 0$ und b) $4L < R^2C$ aus?

a) Der Fall $C = 0$ kann sofort ausgeschlossen werden, da sonst die Spannungsquelle kurz geschlossen wird. Bleibt $4L = R^2C$! Die DGL schreibt sich als $\ddot{I}(t) + \frac{R}{L}\dot{I}(t) + \left(\frac{R}{2L}\right)^2 I(t) \equiv 0$ Damit reduziert sich der Lösungsansatz auf $I(t) = \hat{I} \cdot e^{-at}$, also $\dot{I}(t) + aI(t) = 0$. Da in diesem Fall $a = \frac{R}{2L}$ ist, wird auch die DGL $\ddot{I}(t) + 2a\dot{I}(t) + a^2I(t) \equiv 0$ durch diesen Ansatz gelöst. Da zum Zeitpunkt $t = 0$ die Stromstärke aber $I(0) = 0\,\mathrm{A}$ beträgt, kann dies aber nicht die Stromstärke sein. Neuer Ansatz. Es sei $P(t)$ ein Polynom *n*-ten Grades und $I(t) = \hat{I} \cdot P(t) \cdot e^{-at}$, dann ist $\dot{I}(t) = \hat{I} \cdot \dot{P}(t) \cdot e^{-at} - a \cdot I(t) \Leftrightarrow \dot{I}(t) + a \cdot I(t) = \hat{I} \cdot \dot{P}(t) \cdot e^{-at}$. Differenzieren wir ein weiteres Mal, so erhalten wir $\ddot{I}(t) + a\dot{I}(t) = \hat{I} \cdot \ddot{P}(t) \cdot e^{-at} - a\left(\dot{I}(t) + a \cdot I(t)\right) \Leftrightarrow \ddot{I}(t) + 2a\dot{I}(t) + a^2I(t) = \hat{I} \cdot \ddot{P}(t) \cdot e^{-at}$. Diese DGL stimmt nur dann mit unserer DGL überein, wenn $\ddot{P}(t) \equiv 0$. Folglich muss $P(t) = a_0 + a_1t$ sein. Jetzt bleibt zu klären, was die reellen Zahlen $a_0,\ a_1$ darstellen? Nun ist aber $I(0) = 0\,\mathrm{A}$ und damit $a_0 = 0$. Wir erhalten $I(t) = \hat{I} \cdot a_1 \cdot t \cdot e^{-at}$. Die reelle Zahl wird a_1 ist durch die Zeit festgelegt, wann $\hat{I}$ erreicht wird, also $\hat{I} = I(t_1) = \hat{I} \cdot a_1 \cdot t_1 \cdot e^{-at_1}$, d.h. $a_1 \cdot t_1 \cdot e^{-at_1} = 1 \quad \Leftrightarrow$ $a_1 = \dfrac{e^{at_1}}{t_1}$.

b) Gibt es noch weitere Lösungen der DGL $\ddot{I}(t) + \frac{R}{L}\dot{I}(t) + \frac{1}{LC}I(t) \equiv 0$, die wir nicht mit dem Schwingungsansatz finden? Ja, es gibt noch eine Lösung!

$$I(t) = \hat{I} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \sinh\left(\frac{1}{2LC}\sqrt{R^2C^2 - 4LC} \cdot t\right)$$

Bilden wir die erste und zweite Ableitung! Dazu setze ich wieder $a = \frac{R}{2L}$ und $\omega_1 = \frac{1}{2LC}\sqrt{4LC - R^2C^2}$. Wir erhalten

$$I(t) = \hat{I} \cdot e^{-at} \sinh\left(\omega_1 \cdot t\right),$$

$$\dot{I}(t) = -aI(t) + \omega_1\hat{I} \cdot e^{-at} \cosh\left(\omega_1 \cdot t\right) \Leftrightarrow \dot{I}(t) + aI(t) = \omega_1\hat{I} \cdot e^{-at} \cosh\left(\omega_1 \cdot t\right),$$

$$\begin{aligned}\ddot{I}(t) + a\dot{I}(t) &= -a\omega_1\hat{I} \cdot e^{-at} \cosh\left(\omega_1 \cdot t\right) + \omega_1^2\hat{I} \cdot e^{-at} \sinh\left(\omega_1 \cdot t\right) \\ &= -a\left(\dot{I}(t) + aI(t)\right) + \omega_1^2 I(t),\end{aligned}$$

$$\ddot{I}(t) + 2a\dot{I}(t) + \left(a^2 - \omega_1^2\right)I(t) = 0.$$

Wegen $\omega_1^2 = -\omega^2$ ist die DGL erfüllt.