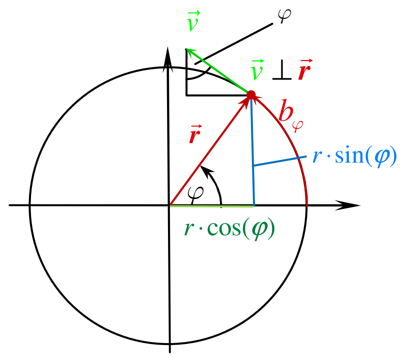
Rotationen (Kreisbewegungen)



Hier wird die Nomenklatur der Schulbücher übernommen.

Eine Kreisscheibe rotiert gleichmäßig um ihre Drehachse, wenn in gleichen Zeitabschnitten gleiche Winkel überstrichen werden.

Bezeichnungen

Der Winkel in ***Bogenmaß*** ξ und der Winkel in ***Gradmaß*** φ sind durch die Gleichung $\frac{\xi}{2\pi} = \frac{\varphi[°]}{360°}$ verbunden. Folglich ist die ***Bogenlänge*** $b_\xi = \xi \cdot r$. Die Zeit für einen Umlauf, auch ***Umlaufdauer*** oder ***Periode***[1] genannt, sei T. Der Kehrwert von T heißt ***Frequenz***[2], in Zeichen f, also $f = \frac{1}{T}$.

Für die ***Tangentialgeschwindigkeit*** $\vec{v}$ ergibt sich in diesem Spezialfall $v = \frac{U}{T} = \frac{2\pi}{T} r = 2\pi f \cdot r$.

Die Zahl $\omega = \frac{2\pi}{T}$ kann als Veränderung des Bogenmaßes $\Delta\xi$ in der Zeit Δt angesehen werden. Somit ist $\omega = \dot{\xi} = \frac{\Delta\xi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ die ***Winkelgeschwindigkeit*** der Kreisscheibe und $v = \frac{\Delta b_\xi}{\Delta t} = \frac{\Delta\xi}{\Delta t} r = 2\pi f \cdot r = \omega r$. Da ω konstant ist, ergibt sich $\Delta\xi = \omega\Delta t = \Delta(\omega t)$ und daraus $\Delta(\xi - \omega t) = 0 \Rightarrow \xi - \omega t = \xi_0$, also $\xi(t) = \omega t + \xi_0$. Wegen $\omega = 2\pi f$ heißt ω auch ***Kreisfrequenz***.

Hängt die Winkelgeschwindigkeit von der Zeit ab, so liefert $\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ die ***Winkelbeschleunigung***. Ist α konstant, so ergibt sich wieder $\omega(t) = \alpha t + \omega_0$.

Die Beschleunigung $\vec{a}_z = -\omega^2 \vec{r}$ zeigt wegen $-\vec{r}$ auf das Zentrum und heißt deshalb ***Zentripetalbeschleunigung***[3,4]. Sie liefert nun $\vec{a}_z = -\omega^2\vec{r} = -\left(\frac{v}{r}\right)^2 \vec{r} = -\frac{v^2}{r^2}\vec{r} = -\frac{v^2}{r}\frac{\vec{r}}{r}$ oder ohne Richtung $a_z = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$.

Es wird an dieser Stelle vorausgesetzt, dass sich die um das Zentrum rotierende Masse nicht ändert. Dann ist die ***Zentripetalkraft*** durch $\vec{F}_z = m\vec{a}_z$ gegeben. Hieraus erhalten wir die restlichen Formeln.

$$\vec{F}_z = m\vec{a}_z = -m\omega^2\vec{r} = -m\frac{v^2}{r}\frac{\vec{r}}{r} \text{ oder ohne Richtung: } F_z = ma_z = m\omega^2 r = m\frac{v^2}{r}$$

Die Dreiecke mit den Hypotenusen $\vec{r}$ und $\vec{v}$ sind ähnlich. Die Katheten jedoch vertauscht. Werden noch die Richtungen beachtet, so ergibt sich der Geschwindigkeitsvektor. ($\xi(t) = \omega t + \xi_0$)

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\cos\xi(t) \\ r\sin\xi(t) \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\xi(t) \\ \sin\xi(t) \end{pmatrix}$$

Die Geschwindigkeit ist die 1. Ableitung.

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t) = \dot{\xi}(t)\vec{r}^{\perp} = \omega r \begin{pmatrix} -\sin\xi(t) \\ \cos\xi(t) \end{pmatrix}$$

Die Beschleunigung ist die 2. Ableitung.

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}(t) &= \dot{\vec{v}}(t) = \vec{a}_z(t) \\ &= -\omega^2 r \begin{pmatrix} \cos\xi(t) \\ \sin\xi(t) \end{pmatrix} = -\omega^2\vec{r} \end{aligned}$$

Im Allgemeinen ($r = \text{const}$) ist ω von der Zeit abhängig. Dann ist mit $\dot{\xi} = \omega$

$$\vec{r}(t) = r\begin{pmatrix} \cos(\xi(t)) \\ \sin(\xi(t)) \end{pmatrix},$$

die 1. Ableitung

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t) = r\omega(t)\begin{pmatrix} -\sin(\xi(t)) \\ \cos(\xi(t)) \end{pmatrix}$$

und die 2. Ableitung

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}(t) &= \dot{\vec{v}}(t) \\ &= r\dot{\omega}(t)\begin{pmatrix} -\sin(\xi(t)) \\ \cos(\xi(t)) \end{pmatrix} - r\omega^2(t)\begin{pmatrix} \cos(\xi(t)) \\ \sin(\xi(t)) \end{pmatrix} \\ &= \vec{a}_T(t) + \vec{a}_z(t). \end{aligned}$$

Hier erscheinen die tangentiale und zentrale Beschleunigung

---

[1] von griech. Περίοδος: das Herumgehen; der Umlauf; die Wiederkehr

[2] von lat. frequentia: Häufigkeit

[3] von griech. κέντρον: Stachel, Dorn, Spitze, Punkt, Zirkelspitze, Zirkelschenkel mit Spitze

[4] von lat. centrum und petere: auf die Mitte des Objektes zustrebend, fallend