# Das Masse-Feder- Pendel

Eine an eine Feder hängende schwingende Masse heißt Masse-Feder-Pendel, wenn die Bewegung in einer Dimension (auf einem Geradenstück) stattfindet, ohne das gleichzeitig eine Rotation eintritt. Es genügt daher ***eine Koordinate*** zur Beschreibung der Bewegung.

Die Kraft der Feder wird durch $\vec{F} = -D \cdot \vec{z}$, $[D] = 1\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$ im hookschen Bereich beschrieben. Über den hookschen Bereich hinaus wird die Feder verformt. Damit ist die Federkonstante $D$ nicht mehr gültig. Aus dem ***Fundamentalsatzes der Mechanik*** $\Delta E = \vec{v} \bullet \Delta\vec{p}$ folgt

$$\begin{aligned}\Delta E &= \vec{v} \bullet \Delta\vec{p} = \frac{\Delta\vec{z}}{\Delta t} \bullet \Delta\vec{p} = \Delta\vec{z} \bullet \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = -\vec{F} \bullet \Delta\vec{z} \\ &= D \cdot \vec{z} \bullet \Delta\vec{z} = \tfrac{1}{2} D\Delta\left(\vec{z} \bullet \vec{z}\right) = \tfrac{1}{2} D\Delta\left(z^2\right) \\ &= \Delta\left(\tfrac{1}{2} Dz^2\right).\end{aligned}$$

Damit ist die potentielle Energie, auch Spannenergie genannt, $E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2} Dz^2 + E_{0,\mathrm{pot}}$. Nun gilt der Energieerhaltungssatz

$$E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{pot}} = \tfrac{1}{2} mv^2 + \tfrac{1}{2} Dz^2 = E_0 .$$

Hieraus erhalten wir den Energiestrom (Leistung)

$$\dot{E}_{\mathrm{kin}} + \dot{E}_{\mathrm{pot}} = m\vec{v} \bullet \dot{\vec{v}} + D\vec{z} \bullet \dot{\vec{z}} = 0 .$$

Nun ist $\dot{\vec{z}} = \vec{v}$, also $\ddot{\vec{z}} = \dot{\vec{v}}$ und damit $\left(m\ddot{\vec{z}} + D\vec{z}\right) \bullet \dot{\vec{z}} = 0$. Diese Gleichung ist erfüllt, wenn entweder $\dot{\vec{z}} = 0$ oder $m\ddot{\vec{z}} + D\vec{z} = 0$. Eine Lösung für $\dot{\vec{z}} = 0$ ist $\zeta(t) = c_0 \in \mathbb{R}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Das heißt aber, es findet keine Bewegung statt.

Die Gleichung $\ddot{\vec{z}} + \frac{D}{m}\vec{z} = 0$ heißt ***lineare Differentialgleichung 2. Ordnung***.

### Definition

Es sei $U \subseteq \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbf{E} \times \cdots \times \mathbf{E}}_{n-\mathrm{mal}}$ eine offene Menge, wobei $\mathbf{E}$ ein vollständig normierter reeller Vektorraum (reeller Banachraum) ist, z. B. $\mathbf{E} = \mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Es sei $f : U \to \mathbf{E}$ eine $C^k$ –Abbildung $k \geq n-1$. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$.

Die Gleichung

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)$$

heißt eine ***Differentialgleichung (Dgl.) n-ter Ordnung***.

Eine Lösung der Differentialgleichung ist eine $C^n$ – Funktion $\eta : I \to \mathbf{E}$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen oder abgeschlossen ist und folgende Bedingungen erfüllt sind:

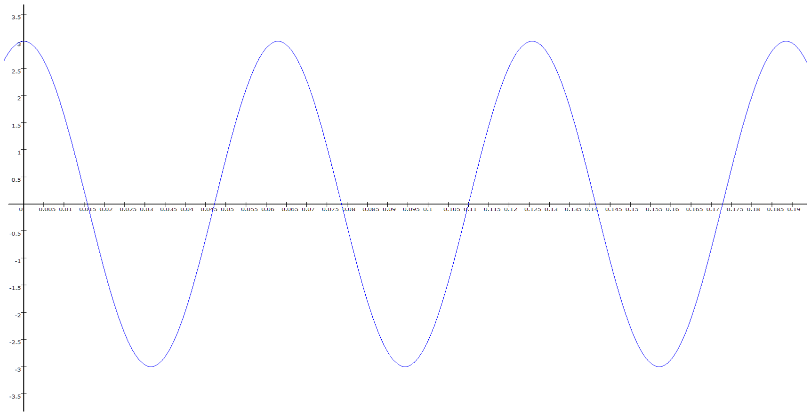
(i) $\left(t, \eta(t), \eta'(t), \ldots, \eta^{(n-1)}(t)\right) \in U$ für alle $t \in I$;

(ii) $\eta^{(n)}(t) = f\left(t, \eta(t), \eta'(t), \ldots, \eta^{(n-1)}(t)\right)$ für alle $t \in I$.

Die Dgl. heißt ***linear***, wenn mit $\eta_1$ und $\eta_2$ auch $a\eta_1 + b\eta_2$ Lösung der Dgl. ist.

Für unsere lineare Dgl. $\ddot{\vec{z}}+\frac{D}{m}\vec{z}=0$ ist $\mathbf{E}=\mathbb{R}$. Auf die allgemeine Theorie wird hier nicht eingegengen. Sie kann für lineare Dgl. durch charakteristische Unterräume beschrieben werden.
Vgl. hierzu K[X]-Moduln oder Chinesischer Restsatz.
Wird die Schwingung aufgezeichnet, so entsteht folgendes Bild.

$\eta(t)=3\sin\left(\frac{100}{\mathrm{s}}t+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{dm}$



Der Ansatz $\eta(t)=c_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$ liefert $\ddot{\eta}(t)=-c_0\omega_0^2\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$ und damit $-c_0\omega_0^2\sin(\omega_0 t+\varphi_0)+\frac{D}{m}c_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)=0$ bzw. $\left(-\omega_0^2+\frac{D}{m}\right)c_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)\underset{t}{\equiv}0$. Dies ist sicher erfüllt, wenn $\omega_0^2=\frac{D}{m}\Leftarrow\omega_0=\sqrt{\frac{D}{m}}$. Die Funktionen Sinus und Cosinus lösen diese lineare Dgl. 2. Ordnung. Daher heißt die Bewegung ***harmonisch***, da sie in gleicher Größe und gleichen Zeitintervallen immer wiederkehrend ist. Wird auf den Phasenwinkel $\varphi_0$ verzichtet, so sind beide Funktionen nötig, um die Anfangsbedingungen zu beschreiben. Setzen wir die Geschwindigkeit $\dot{\eta}(t)=c_0\omega_0\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$ in die Energiegleichung ein, so erhalten wir mit $\eta(t)=c_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$ für $z$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}m\left(c_0\sqrt{\frac{D}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}}t+\varphi_0\right)\right)^2+\frac{1}{2}D\left(c_0\sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}t+\varphi_0\right)\right)^2&=E_0\\
\frac{1}{2}mc_0^2\frac{D}{m}\left(\cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}}t+\varphi_0\right)\right)^2+\frac{1}{2}Dc_0^2\left(\sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}t+\varphi_0\right)\right)^2&=E_0\\
\frac{1}{2}Dc_0^2\left(\cos^2\left(\sqrt{\frac{D}{m}}t+\varphi_0\right)+\sin^2\left(\sqrt{\frac{D}{m}}t+\varphi_0\right)\right)&=E_0\\
\frac{1}{2}Dc_0^2&=E_0
\end{aligned}$$

Mögliche Anfangsbedingungen sind $E_0=\frac{1}{2}D\hat{z}^2$ (die Masse an der Feder wird maximal ausgelenkt und sich selbst überlassen), $E_0=\frac{1}{2}D\hat{v}^2$ (die Masse an der Feder erhält in der Ruhelage einen Impuls und bleibt sich wieder selbst überlassen) oder $E_0=\frac{1}{2}Dz_0^2+\frac{1}{2}Dv_0^2$ (die Masse an der Feder erhält in einer Anfangshöhe einen zusätzlichen Impuls und schwingt selbstständig harmonische weiter). Wegen $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$ finden wir $\eta(t)=c_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)=c_0\cos(\varphi_0)\sin(\omega_0 t)+c_0\sin(\varphi_0)\cos(\omega_0 t)$. Daher führt der Ansatz $\eta(t)=c_0\sin(\omega_0 t)+c_1\cos(\omega_0 t)$ zur allgemeinen Lösung einer jeden Anfangsbedingung. Der Winkel $\varphi_0$ wird durch $\varphi_0=\tan^{-1}\left(\frac{c_1}{c_0}\right)$ bestimmt.

## Zusammenfassung

Für ein Masse-Feder-Pendel, auch harmonischer Oszillator genannt, ergeben sich folgende charakteristische Daten.

***Allgemeine Lösung:*** $\eta(t)=c_0\sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}t\right)+c_1\cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}}t\right)=c_0\sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}t+\varphi_0\right)$

***Phasenwinkel:*** $\varphi_0=\tan^{-1}\left(\frac{c_1}{c_0}\right)$

***Eigenkreisfrequenz:*** $\omega_0=\sqrt{\frac{D}{m}}$

***Eigenfrequenz:*** $f_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$

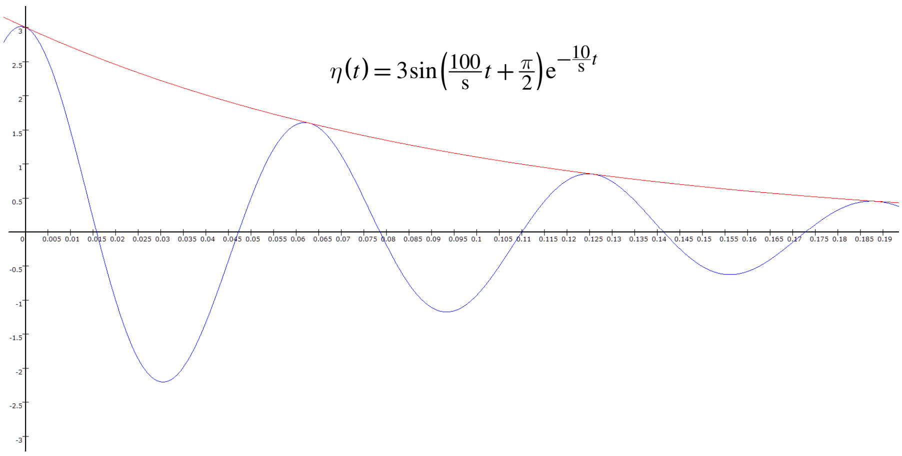
***Schwingungsdauer:*** $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$

## Pendel mit Reibung

In diesem Abschnitt betrachten wir die beiden Pendel unter Einflussnahme von Reibung. Die Reibung soll dabei nicht zähflüssig sein. Sie kann dann durch eine stokesche Reibung $\vec{F}(t)=-kv$, $[k]=1\frac{\text{kg}}{\text{s}}$ realisiert werden. Für das Masse-Feder-Pendel folgt nun

$$m\ddot{\vec{z}}+D\vec{z}=-k\dot{\vec{z}}\Leftrightarrow\ddot{\vec{z}}+\frac{k}{m}\dot{\vec{z}}+\frac{D}{m}\vec{z}=0$$

Dies ist wieder eine lineare Dgl. 2. Ordnung. Es ist sofort klar, dass die Kreisfunktionen Sinus und Cosinus allein keine Lösung mehr darstellen, da die harmonischen Amplituden immer kleiner werden. Dies legt nahe, unter den gegen null streng monoton fallenden Funktionen zu suchen, die an der Stelle $t=0$ definiert sind und so auch die Amplitude streng monoton gegen null fallen zu lassen. Unter allen streng monoton fallenden Funktionen sind die Exponentialfunktionen ausgezeichnet, wie im folgenden Bild ersichtlich ist.




Da es nur eine Richtung gibt, kann die Vektorbetrachtung entfallen.

Es sei $\eta(t)=c_0\sin(\omega_1 t+\varphi_1)e^{-\lambda t}$ mit $\lambda>0$ und $\omega_0=\sqrt{\frac{D}{m}}$, dann sind

$$\begin{aligned}\dot{\eta}(t)&=\omega_1 c_0\cos(\omega_1 t+\varphi_1)e^{-\lambda t}-\lambda c_0\sin(\omega_1 t+\varphi_1)e^{-\lambda t}\\&=\left(\omega_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)-\lambda\sin(\omega_1 t+\varphi_1)\right)c_0e^{-\lambda t},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{\eta}(t) &= \left(-\omega_1^2 \sin\left(\omega_1 t+\varphi_1\right) - \lambda\omega_1 \cos\left(\omega_1 t+\varphi_1\right)\right) c_0 e^{-\lambda t} - \lambda \dot{\eta}(t) \\
&= \left(-\omega_1^2 \sin\left(\omega_1 t+\varphi_1\right) - 2\lambda\omega_1 \cos\left(\omega_1 t+\varphi_1\right) + \lambda^2 \sin\left(\omega_1 t+\varphi_1\right)\right) c_0 e^{-\lambda t} \\
&= \left(\left(\lambda^2 - \omega_1^2\right) \sin\left(\omega_1 t+\varphi_1\right) - 2\lambda\omega_1 \cos\left(\omega_1 t+\varphi_1\right)\right) c_0 e^{-\lambda t}.
\end{aligned}
$$

Einsetzen in $\ddot{z} + \frac{k}{m}\dot{z} + \frac{D}{m} z = 0$ liefert

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(\lambda^2 - \omega_1^2\right) \sin\left(\omega_1 t+\varphi_1\right) - 2\lambda\omega_1 \cos\left(\omega_1 t+\varphi_1\right)\right) c_0 e^{-\lambda t} \\
&\quad + \tfrac{k}{m}\left(\omega_1 \cos\left(\omega_1 t+\varphi_1\right) - \lambda \sin\left(\omega_1 t+\varphi_1\right)\right) c_0 e^{-\lambda t} \\
&\quad + \tfrac{D}{m} \sin\left(\omega_1 t+\varphi_1\right) c_0 e^{-\lambda t} \underset{t}{\equiv} 0
\end{aligned}
$$

Da die Gleichung identisch null sein muss und $e^{-\lambda t} > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, folgt die Gleichung

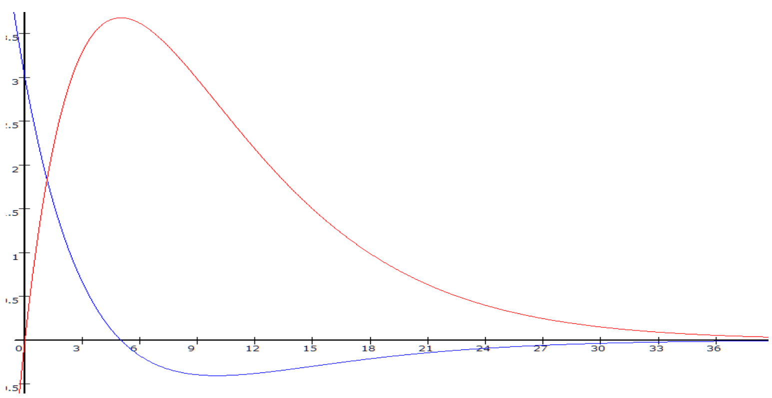
$$
\left(\lambda^2 - \omega_1^2 - \lambda \tfrac{k}{m} + \tfrac{D}{m}\right) \sin\left(\omega_1 t+\varphi_1\right) + \left(\tfrac{k}{m} - 2\lambda\right) \omega_1 \cos\left(\omega_1 t+\varphi_1\right) \underset{t}{\equiv} 0 .
$$

Da $\sin\left(\omega_1 t+\varphi_1\right)$ und $\cos\left(\omega_1 t+\varphi_1\right)$ linear unabhängig sind, schließen wir, dass dies nur für $\frac{k}{m} = 2\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{k}{2m}$ und $\lambda^2 - \omega_1^2 - \frac{k}{m}\lambda + \frac{D}{m} = 0 \Leftrightarrow \omega_1^2 = \frac{D}{m} - \left(\frac{k}{2m}\right)^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$ möglich ist. Damit lautet die allgemeine Lösung

$$
\eta(t) = c_0 \sin\left(\omega_1 t+\varphi_1\right) e^{-\lambda t}, \; \omega_1 = \sqrt{\tfrac{D}{m} - \left(\tfrac{k}{2m}\right)^2} \text{ und } \lambda = \tfrac{k}{2m}.
$$

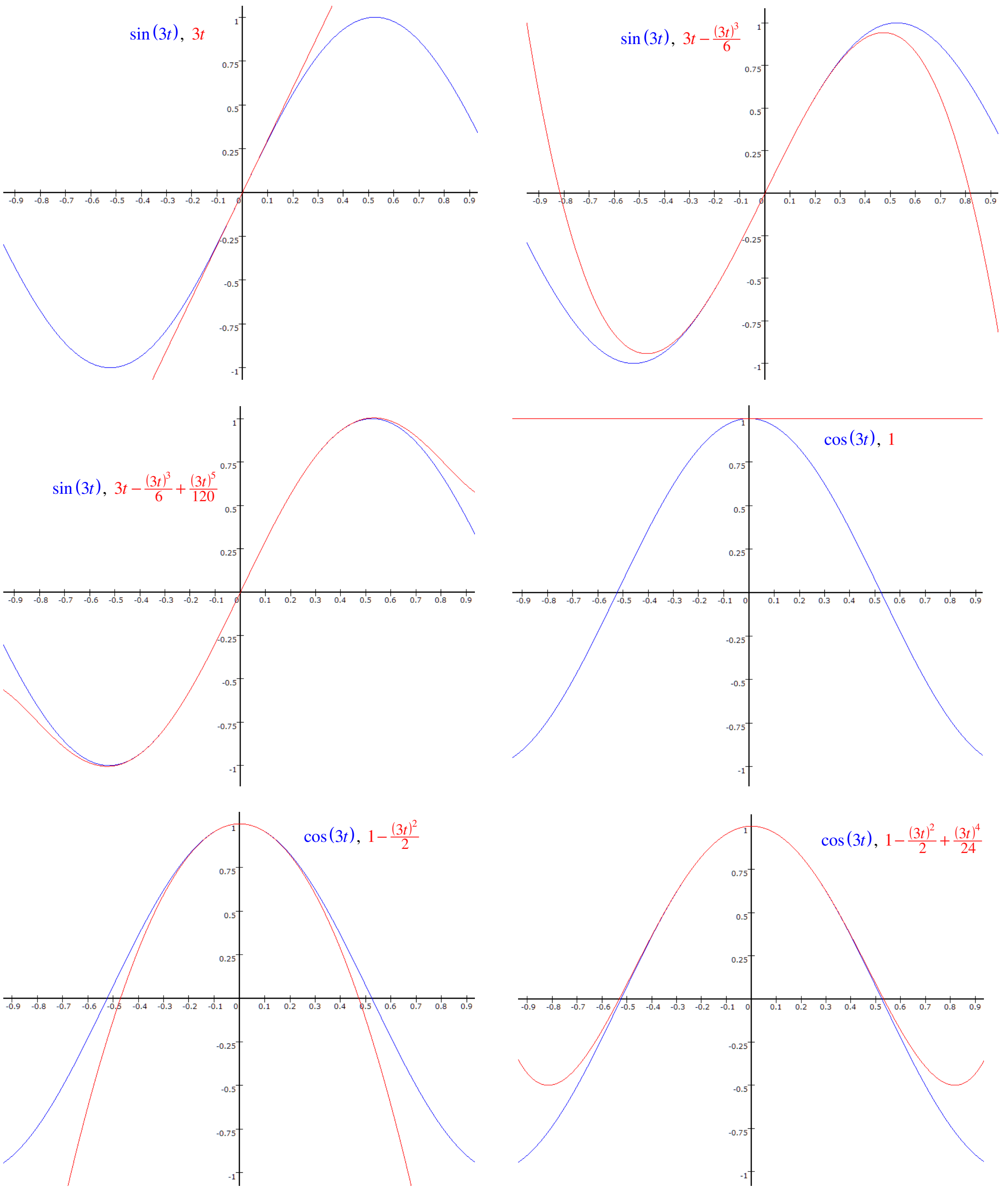
Die Anfangsbedingungen $c_0$ und $\varphi_1$ ergeben sich aus $\eta(0)$ und $\dot{\eta}(0)$, also $\eta(0) = c_0 \sin(\varphi_1)$ und $\dot{\eta}(0) = \omega_1 c_0 \cos(\varphi_1) - \lambda c_0 \sin(\varphi_1) = \omega_1 c_0 \cos(\varphi_1) - \lambda\eta(0) \Leftrightarrow \dot{\eta}(0) + \lambda\eta(0) = \omega_1 c_0 \cos(\varphi_1)$ zu $\varphi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_1 \eta(0)}{\dot{\eta}(0) + \lambda\eta(0)}\right)$ und $c_0 = \frac{\eta(0)}{\sin(\varphi_1)}$.

In manchen Fällen ist es sogar unerwünscht, dass es überhaupt zu einem Schwingen kommt, denken wir nur an den Stoßdämpfer. Das Verhalten sollte etwa so aussehen.




Im Fall der blauen Kurve geht der Schwinger über die Ruhelage hinaus und nähert sich asymptotisch der Ruhelage. Im Fall der roten Kurve bewegt sich der Schwinger aus der Ruhelage heraus und nähert sich dann asymptotisch der Ruhelage.

Da nun keine Schwingungen mehr auftreten, $k=2m\sqrt{\frac{D}{m}}=2\sqrt{mD}$, liegt es nahe, die Approximationen der Sinus- und Cosinusfunktion durch Taylorpolynome zu betrachten.




Wir führen also folgenden Ansatz.

$$\eta(t)=\left(a_1+a_2t+a_3t^2\right)e^{-\lambda t}$$
$$\dot{\eta}(t)=\left(a_2-\lambda a_1-\lambda a_2t+2a_3t-\lambda a_3t^2\right)e^{-\lambda t}$$
$$\ddot{\eta}(t)=\left(\lambda^2a_1-2\lambda a_2+2a_3-4\lambda a_3t+\lambda^2a_2t+\lambda^2a_3t^2\right)e^{-\lambda t}$$

In $\ddot{z}+\frac{k}{m}\dot{z}+\frac{D}{m}z=0$ eingesetzt liefert

$$\left(\lambda^2 a_1 - 2\lambda a_2 + 2a_3 - 4\lambda a_3 t + \lambda^2 a_2 t + \lambda^2 a_3 t^2\right)$$
$$+\tfrac{k}{m}\left(a_2 - \lambda a_1 - \lambda a_2 t + 2a_3 t - \lambda a_3 t^2\right)$$
$$+\tfrac{D}{m}\left(a_1 + a_2 t + a_3 t^2\right) \underset{t}{\equiv} 0,$$

also

$$\left(\lambda^2 - \lambda\tfrac{k}{m} + \tfrac{D}{m}\right)a_1 + \left(\tfrac{k}{m} - 2\lambda\right)a_2 + 2a_3 = 0$$
$$\left(\lambda^2 - \lambda\tfrac{k}{m} + \tfrac{D}{m}\right)a_2 + 2\left(\tfrac{k}{m} - 2\lambda\right)a_3 = 0$$
$$\left(\lambda^2 - \tfrac{k}{m}\lambda + \tfrac{D}{m}\right)a_3 = 0.$$

Sind $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, so ist keine Bewegung vorhanden. Damit eine Bewegung auftritt, muss $\lambda^2 - \tfrac{k}{m}\lambda + \tfrac{D}{m} = \left(\lambda - \tfrac{k}{2m}\right)^2 - \left(\tfrac{k}{2m}\right)^2 + \tfrac{D}{m} = 0$ sein. Nach Voraussetzung ist $k = 2m\sqrt{\tfrac{D}{m}} = 2\sqrt{mD}$ und damit $\lambda = \tfrac{k}{2m} = \sqrt{\tfrac{D}{m}}$. Folglich ist auch $a_3 = 0$.

Die allgemeine Lösung lautet somit

$$\eta(t) = \left(a_1 + a_2 t\right)e^{-\lambda t},\ \lambda = \sqrt{\tfrac{D}{m}} = \omega_0 .$$

Die Anfangsbedingungen bestimmen nun noch die Unbekannten

$$\eta(0) = a_1,\ \dot\eta(0) = a_2 - a_1\sqrt{\tfrac{D}{m}},\ \ddot\eta(0) = a_1\tfrac{D}{m} - 2a_2\sqrt{\tfrac{D}{m}} .$$

Umgeformt $a_1 = \eta(0)$, $a_2 = \dot\eta(0) + \eta(0)\sqrt{\tfrac{D}{m}}$. Die dritte Gleichung liefert die lineare Dgl.

$$\ddot\eta(0) + 2\sqrt{\tfrac{D}{m}}\dot\eta(0) + \eta(0)\tfrac{D}{m} = 0 \Leftrightarrow \ddot\eta(0) + \tfrac{k}{m}\dot\eta(0) + \eta(0)\tfrac{D}{m} = 0 .$$

Ein paar Worte will ich doch über lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten verlieren.

Es seien $p, q \in \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $r: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt

$$y'' + py' + qy = r(x)$$

eine inhomogene lineare Dgl. 2.Ordnung. Ist $r(x) \underset{x}{\equiv} 0$, so heißt die lineare Dgl. homogen.

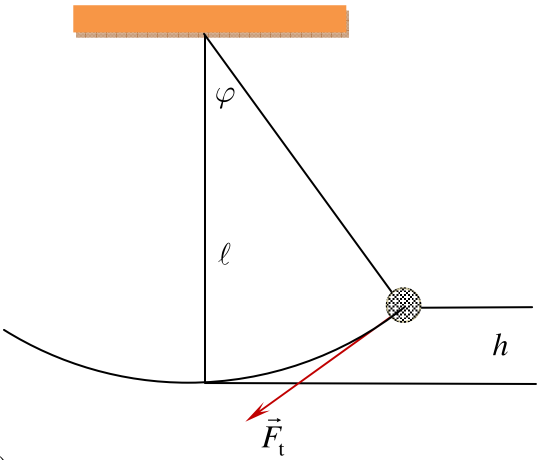
Eine allgemeine Lösung dieser Dgl. setzt sich aus den allgemeinen Lösungen der homogenen Dgl. und einer speziellen Lösung, die partikuläre Lösung zusammen. Die Differenz zweier partikulärer Lösungen ist natürlich eine Lösung der homogenen Dgl.

Der Ansatz $\eta(x) = ce^{\lambda x}$ für eine Lösung der homogenen Dgl. führt auf die charakteristische Gleichung $\chi(\lambda) := \lambda^2 + p\lambda + q = 0 \Leftrightarrow \left(\lambda + \tfrac{p}{2}\right)^2 - \dfrac{p^2 - 4q}{4} = 0$. Drei Fälle sind möglich.

| Diskriminante | Lösungen von $\chi(\lambda)$ | Relle Lösungen der linearen Dgl. |
|---|---|---|
| $p^2 - 4q > 0$ | $\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right)$ | $\eta(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ |
| $p^2 - 4q = 0$ | $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{p}{2}$ | $\eta(x) = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x}$ |
| $p^2 - 4q < 0$ | $\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}\left(-p \pm i\sqrt{4q - p^2}\right)$ | $\eta(x) = \left(c_1 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2}\,x\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2}\,x\right)\right)e^{-\frac{p}{2}x}$ |

# Das Mathematische Pendel

Unter einem Mathematischen Pendel wird eine an einem masselosen Faden im Schwerpunkt konzentrierte schwingende Masse, ohne Reibung in einem Vacuum verstanden. Ein mathematisches Pendel kann näherungsweise realisiert werden, wenn die Größe des schwingenden Objekts als wesentlich klein gegenüber der Fadenlänge angenommen wird. Für ein solches Pendel gilt dann der Energieerhaltungssatz $\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{konstant}$.




Durch Differenzieren nach der Zeit erhalten wir den Energiestrom (Leistung)

$$m\vec{v} \bullet \dot{\vec{v}} + mg\dot{h} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \bullet \dot{\vec{v}} + g\dot{h} = 0.$$

Die Bewegung des schwingenden Pendels beschreibt eine Kreisbahn. Folglich wird diese Bewegung durch Kreiskoordinaten beschrieben. Es gilt folglich

$$\vec{r}(t) = \ell \begin{pmatrix} \sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \ell\dot{\varphi}(t) \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ -\sin(\varphi(t)) \end{pmatrix}$$

und $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \ell\ddot{\varphi}(t) \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ -\sin(\varphi(t)) \end{pmatrix} - \ell\dot{\varphi}(t) \begin{pmatrix} \sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \end{pmatrix}$. Für das Skalarprodukt folgt $\vec{v} \bullet \dot{\vec{v}} = \ell\dot{\varphi}(t) \cdot \ell\ddot{\varphi}(t)$. Die Höhenänderung ist $h = \ell - \ell\cos(\varphi(t)) \Rightarrow \dot{h} = \ell \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \sin(\varphi(t))$. Einsetzen liefert nun

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{v} \bullet \dot{\vec{v}} + g\dot{h} \\ &= \ell \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \ell \cdot \ddot{\varphi}(t) + g \cdot \ell \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \sin(\varphi(t)) \\ &= \ell \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \left(\ell \cdot \ddot{\varphi}(t) + g \cdot \sin(\varphi(t))\right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \dot{\varphi}(t) \underset{t}{\equiv} 0 \quad \vee \quad 0 \underset{t}{\equiv} \ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{\ell} \cdot \sin(\varphi(t)).$$

***Interpretation***

$\dot{\varphi}(t) \underset{t}{\equiv} 0$: Wenn die Winkeländerung für alle Zeiten $t$ null ist, dann steht das Pendel still.

$0 \underset{t}{\equiv} \ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{\ell} \cdot \sin(\varphi(t))$: Die Zugehörige Nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung $\ddot{\xi} + \frac{g}{\ell} \cdot \sin\xi = 0$ führt auf ein elliptisches Integral[1] und kann daher nur Näherungweise gelöst werden. Werden jedoch nur sehr kleine Auslenkungen (Winkel) betrachtet, so ist $\sin(\varphi(t)) \approx \varphi(t)$. Damit lautet die lineare Differentialgleichung $\ddot{\xi} + \frac{g}{\ell} \cdot \xi = 0$. Dies ist wieder ein harmonischer Oszillator mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$, deren Lösungen unter dem Masse-Feder-Pendel diskutiert wurden und daher nicht wiederholt werden müssen. Mit Reibung lautet die Dgl.

$$\ddot{\xi} + \frac{k}{m\ell} \cdot \dot{\xi} + \frac{g}{\ell} \cdot \sin\xi = 0.$$

[1] http://people.math.sfu.ca/~cbm/aands/intro.htm#006 http://people.math.sfu.ca/~cbm/aands/page_589.htm