# Mechanik

## *1. Bewegungen und deren Beschreibungen*

Eine Charakterisierung einer Bewegung ist durch einen Ortswechsel gegeben.

Wir können daher sagen:

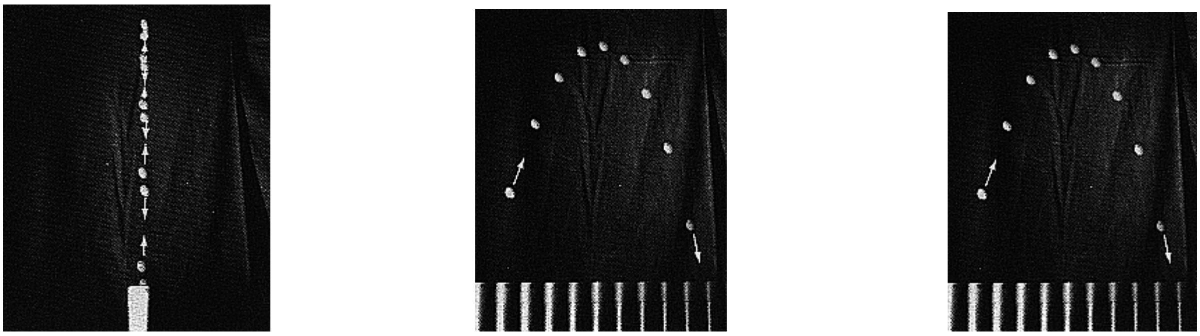
1. Mit einer Bewegung ist ein Ortswechsel verbunden.
2. Mit einem Ortswechsel ist eine Bewegung verbunden.

Um einen Bewegungsablauf beschreiben zu können, genügt es den Weg des Ortswechsels anzugeben.

### Doch Vorsicht!

Wir fahren einen Weg von A-Ort nach B-Ort und haben unsere Tasche dabei. Für uns bewegt sich die Tasche nicht, denn sie bleibt an derselben Stelle auf dem Rücken. Für einen Beobachter, der uns vorbeifahren sieht, bewegt sich die Tasche, denn die Tasche fährt an dem Beobachter vorbei.

Noch drastischer wird es, wenn für beide eine Bewegung stattfindet.



Stroboskopaufnahme einer Kugel, die aus einer Vertikalen Spielzeugkanone abgeschossen wird. Die Blitzrate beträgt 10 Blitze pro Sekunde. Im linken Bild sind die Kanone und die Kamera in Ruhe. Im mittleren Bild bewegt sich die Kanone nach rechts, die Kamera ist in Ruhe. Im rechten Bild bewegt sich die Kamera nach links, die Kanone ist in Ruhe.

### Interpretation der Bilder

**Wir sitzen im fahrenden Zug**, in dem ein Kind einen Ball senkrecht nach oben wirft und wieder auffängt. Wir beschreiben die Bewegung des Balles wie folgt: Der Ball bewegt sich senkrecht nach oben und fällt senkrecht wieder zurück. Die Beschreibung der Bewegung entspricht dem linken Bild.

**Der außen stehende Beobachter** beschreibt die Bewegung des Balles wie folgt: Der Ball bewegt sich auf einer gekrümmten Bahn in Fahrtrichtung des Zuges und wird wieder aufgefangen. Die Beschreibung entspricht dem mittleren Bild.

**Der im Zug an einem Bahnsteig vorbeifahrende Beobachter** beschreibt die Bewegung eines Balles, der auf dem Bahnsteig von einem Kind senkrecht nach oben geworfen wird, wie im rechten Bild.

Alle Beobachter beschreiben dieselbe Bewegung sehr genau und haben Recht. Es kommt also auf den Standort des Beobachters an. Selbstverständlich kommt es auch auf die Uhrzeit an, wann das Ereignis stattgefunden hat.

Welchen Standort nimmt ein Autofahrer an, wenn er sagt, er ist von Minden nach Bielefeld gefahren? Welchen Standort ein Ballonfahrer, der bei starken Wind sagt, der Ballon sei von Minden nach Hannover gefahren?

Fassen wir zusammen.

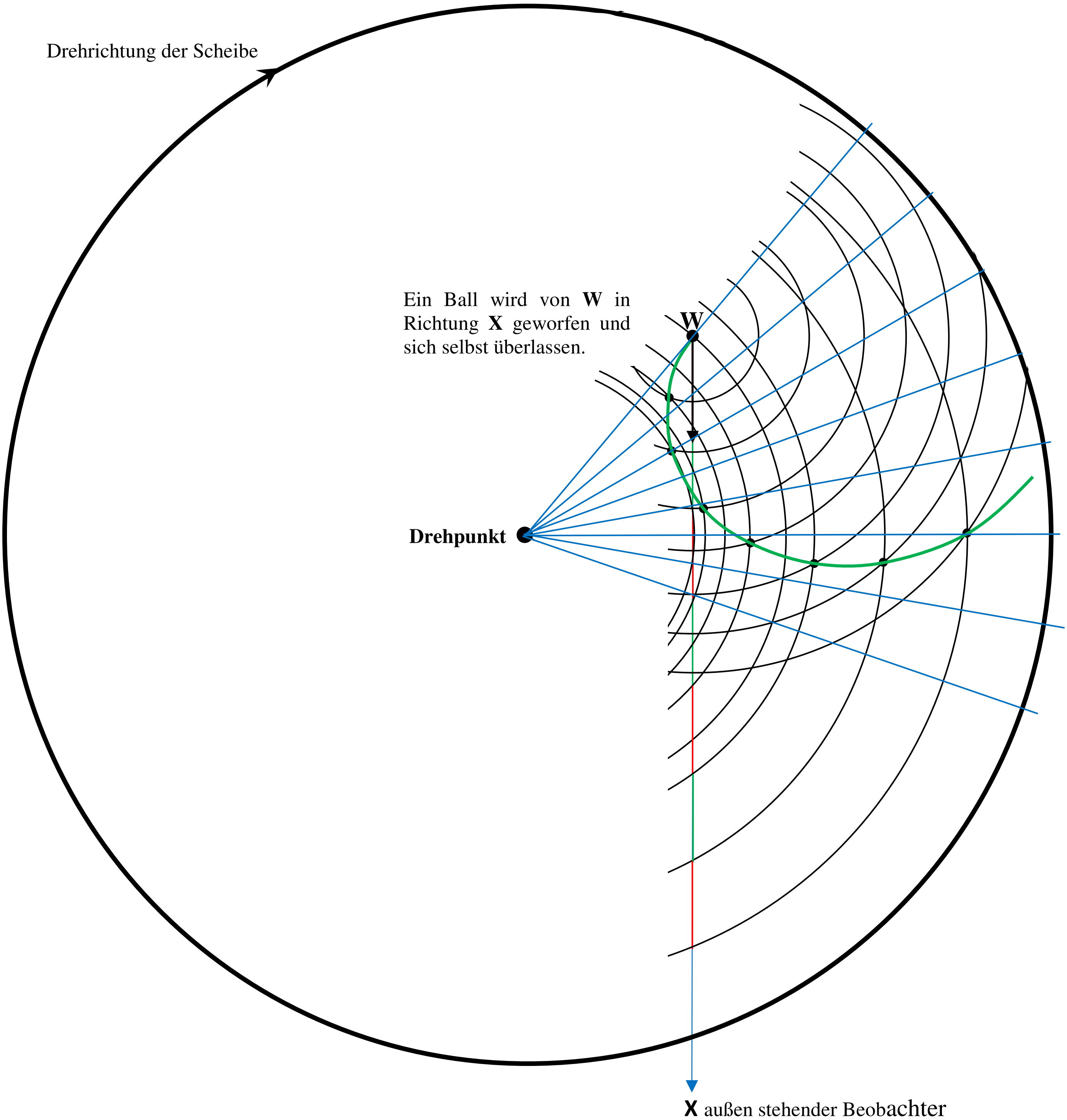
Um einen **Bewegungsablauf** zu beschreiben, müssen

1. ***der Weg des Ortswechsels,***
2. ***der Standort des Beobachters und***
3. ***die Uhrzeit angegeben werden.***

### *Ein weiteres wichtiges Beispiel*

**Gegebene Daten:**
Die Scheibe dreht sich um 10° in einer Sekunde. Dabei legt der Ball einen „geradlinigen“ Weg von 1,5 cm zurück. Konstruiere den Weg des Balles vom mitbewegten Werfer.

**Anleitung:** Zeichne, beginnend an $\overline{DW}$, die Winkel in 10°-Schritte in Bewegungsrichtung und die Kreisbewegung des Werfers. Übertrage die Lage des Balles nach jeder Sekunde zurück auf den mitbewegten Werfer (Punkt **W**). Verbinde (ohne Lineal) die Schnittpunkte zu einer Kurve.




Der außen stehende Beobachter „sieht“ den Ball geradlinig (***blauer Strahl***) auf sich zukommen. Der sich auf der Scheibe befindliche Beobachter „sieht“ den Ball in einer Linkskurve (***grün***) hinter sich verschwinden.

**Fazit:** *Da sich die Erde um eine Nord-Süd-Achse dreht, bewegt sich ein zwischen zwei Personen geworfener Ball niemals in einer Parabelebene! Bei kleinen Entfernungen und Geschwindigkeiten ist jedoch die Abweichung von einer Ebene extrem vernachlässigbar klein.*

Stellen Sie dazu einen maßstabgetreuen Vergleich mit der Erde an!

***Diese Betrachtungen gehen übrigens auf Coriolis[1] zurück!***

### Vergleichen von Bewegungen


Zwei Bewegungen können verglichen werden, wenn die Positionen der Körper bekannt sind. Zum Beispiel befindet sich der 1. Körper an Ort *X*, der 2. Körper am Ort *Y*. Eine genauere Beschreibung ist durch die uns ständige begleitende Zeit gegeben. Also befindet sich der 1. Körper zu der Zeit $t_X$ am Ort *X*, der 2. Körper zu derselben Zeit $t_X = t_Y$ am Ort *Y*. Dies macht es auch einfacher die Position eines Körpers festzulegen. Dazu ruht der 2. Körper, meistens am Anfang des Weges. Ist das der Fall, so benötigen wir den 2. Körper nicht mehr, sondern nur den Ortsanfang des Weges.

**Um Bewegungen präzise beschreiben zu können, wird die Zeit als wichtiger Indikator herangezogen. Dabei ist Zeit durch die Anzeige der Atomuhr festgelegt.**

## 1.1 Geschwindigkeiten

Um einfache Bewegungen beschreiben zu können, benötigt man wenigstens drei Angaben:

- **a)** Die Länge des Weges,
- **b)** die Zeit, die ein Körper für diesen Weg benötigt und
- **c)** den Standort des Beobachters.

### 1.1.1 Die Durchschnittsgeschwindigkeit

Unser subjektives Empfinden reicht also nicht aus, um die Schnelligkeit eines Körpers zu beschreiben. Im Vergleich zweier Körper soll der schnellere Körper die größere Geschwindigkeit haben.

Der Physiker legt nun fest: Die ***Durchschnittsgeschwindigkeit*** eines Körpers ist durch den Quotienten gebildet aus der Länge des zurückgelegten Weges $\Delta s = s_1 - s_0$ des Körpers und die dazu benötigte Zeit $\Delta t = t_1 - t_0$ definiert. Hierbei bedeutet die tiefgestellte null $_0$ den Anfang und die eins $_1$ einen weiteren Zwischenpunkt oder den Endpunkt. Hier den Endpunkt, da keine weiteren Punkte folgen.

$$\textbf{Formel: } v_D = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Wir schreiben deshalb $\Delta s$ und $\Delta t$, um klarzustellen, dass hierbei auch Längen von Wegdifferenzen und die hierzu gehörigen Zeitdifferenzen betrachtet werden können.

**Beispiel:** Auf der Autobahn wird die Zeit zwischen zwei Kilometersteinen gestoppt. Dies ist nur ein Teil des gesamten Weges und nur ein Teil der für den gesamten Weg benötigten Zeit.

***Längen*** von Wegen werden in µm, mm, cm, dm, m, km, Lichtjahre usw. gemessen.

---

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Coriolis_effect und https://de.wikipedia.org/wiki/Corioliskraft

***Die Basiseinheit der Länge in der Physik ist das Meter.***

$$\text{Wir schreiben: } [\Delta s] = 1\,\mathrm{m}\,.$$

***Zeiten*** werden in ms, s, min, h, Jahre usw. gemessen.

***Die Basiseinheit der Zeit in der Physik ist die Sekunde.***

$$\text{Wir schreiben: } [\Delta t] = 1\,\mathrm{s}\,.$$

Daraus erhalten wir die ***physikalische Einheit der Geschwindigkeit***:

$$[v_D] = \frac{[\Delta s]}{[\Delta t]} = \frac{1\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

***Festlegung:*** *Geschwindigkeit ist immer auf die „ruhende“ Erdoberfläche bezogen, wenn nichts anderes gesagt ist. In den meisten Fällen ist der Bezug aber offensichtlich!*

**Einige interessante Geschwindigkeiten:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Haarwachsen | 0,000002 mm/s | Schnecke | 1 mm/s |
| Fußgänger | 1,5 m/s | Radfahrer | 5,5 m/s |
| Rennpferd | 17 m/s | Schwalbe | 90 m/s |
| Flugzeug | 250 m/s | Düsenflugzeug | 800 m/s |
| Schall in Luft bei 15 °C | 340 m/s | Schall im Wasser | 1,5 km/s |
| Erdsatellit | 8 km/s | Erdbebenwelle | 5 km/s |
| Licht im Vakuum | 300000 km/s | Licht in Glas | 200000 km/s |

Wir wollen nun überlegen, wie eine Bewegungsaufnahme stattfinden kann.

**1.** Ein Körper (PKW, LKW, Motorrad, etc.) bewegt sich auf der Erde mit einer gewissen Geschwindigkeit. Die Strecke $\Delta s$ wird festgelegt und die dafür benötigte Zeit wird gemessen.

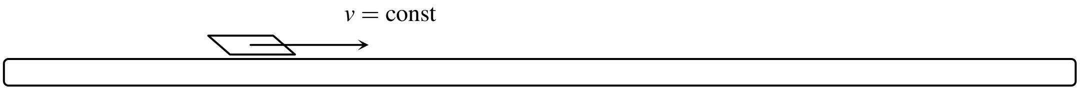
***Beispiel:*** Beim Blitzer sind 50 cm Kontaktabstände im Boden eingelassen. Der erste Kontakt löst die Stoppuhr aus, der zweite Kontakt stoppt die Uhr. Gleichzeitig wird ein Foto erstellt.

***Verbesserung der Messaufnahme:*** Bei der Lasermessung wird die Laufzeitdifferenz zwischen zwei hinlaufenden und rücklaufenden Strahlen benutzt, um $\Delta s$ zu berechnen. Die Zeit zwischen den beiden Strahlen ist $\Delta t$. Das Messgerät ist auf eine Richtung fixiert.

**2.** Ein fliegendes Objekt kann nicht mit Laserstrahlen gemessen werden. Stattdessen wird hier Radar eingesetzt. Das Messverfahren ist dem Laserverfahren entsprechend.

### *1.1.2 Geradlinig gleichförmige Bewegung*

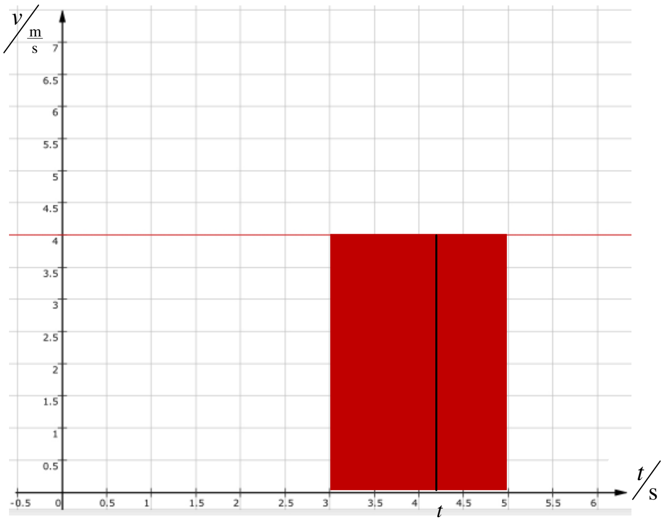
*Eine solche Bewegung ist näherungsweise nur im Labor möglich. Sie wird mit einer Luftkissenbahn durchgeführt. Die Geschwindigkeit ist zu jeder Zeit gleich. Sie ist konstant!*

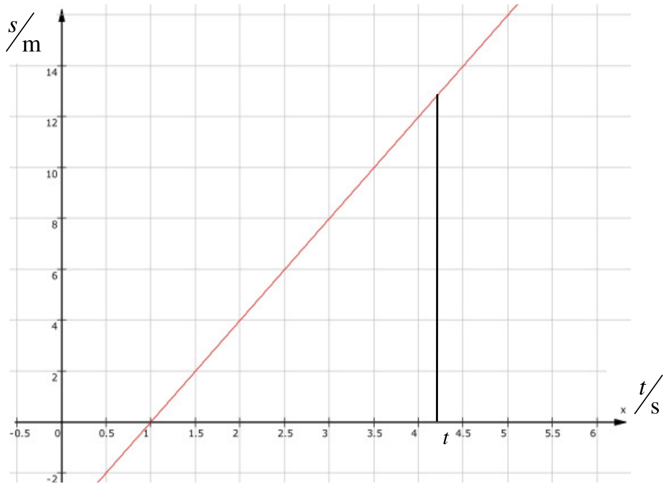



Zunächst stellen wir die Bewegungsgleichungen in der allgemeinsten Form auf. Dazu verwenden wir die Punkt-Steigungsformen für Funktionen.

Schauen wir uns die Situation in den Schaubildern an.

Betrachten wir eine gleichmäßig gradlinige Bewegung im Intervall $t \in [3\mathrm{s}; 5\mathrm{s}] \subset \mathbb{R}\mathrm{s}$. Also $t_0 = 3\mathrm{s}$ und $t_1 = 5\mathrm{s}$ sowie $t_0 \le t \le t_1$.




Ist die Geschwindigkeit konstant, so werden in gleichen Zeitintervallen gleiche Streckenlängen zurückgelegt. Die Geschwindigkeit ist somit die Proportionalitätskonstante (Steigung der Geraden des Weges), also $s_1 - s_0 = v(t_1 - t_0)$.

Dieser Zusammenhang soll nun funktional ausgedrückt werden. Nun ist $s_0$ der Anfangsweg zu der Zeit $t_0$. Dafür schreiben wir $s(t_0) = s_0$.

Entsprechend schreiben wir $s(t_1) = s_1$ oder allgemein $s(t) = s$.

Folglich gilt $s(t) - s(t_0) = v(t - t_0)$ bzw. $s(t) = v(t - t_0) + s(t_0)$, wobei $t_0 \le t \le t_1$ bzw. $t \in [t_0; t_1]$. Das ist die gesuchte Funktion.

In unserem Beispiel ist

$$s(t) = 4\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}(t - 3\mathrm{s}) + 8\mathrm{m}.$$

Für die Steigung der Tangente (stimmt hier mit der der Geraden überein) schreiben wir

$$v(t) := \dot{s}(t) \equiv \frac{ds(t)}{dt}.$$

***Beachte:*** **$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ bezeichnet die Sekantensteigung und $\frac{ds}{dt}$ die Tangentensteigung, gelesen *ds nach dt*.**

Wir berechnen den Flächeninhalt zwischen der 1. Achse und der Geschwindigkeitskurve.

Dafür schreiben wir

$$s(t) - s(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau,$$

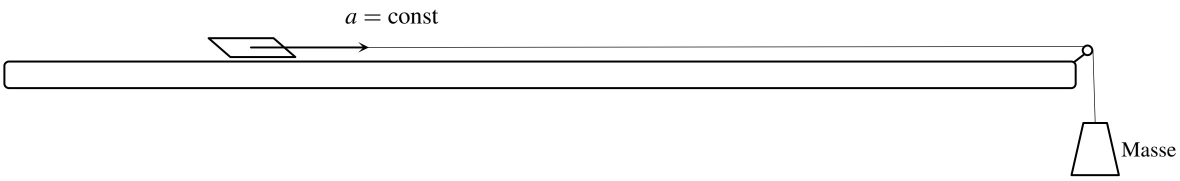
wobei $\int$ für die ***Summe*** aller Flächenstückchen steht. $\int$ heißt Integral und $v(\tau)$ der Integrand. Die Funktion $s(t)$ selbst heißt Integralfunktion.

***Das Integral berechnet folglich nur den Zuwachs der Strecke. $s(t_0)$ muss daher bekannt sein, kann also nicht berechnet werden.***

In unserem Fall $\int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau = \int_{3\mathrm{s}}^{5\mathrm{s}} 4\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\, d\tau = 4\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \tau \Big|_{3\mathrm{s}}^{5\mathrm{s}} = 4\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot (5\mathrm{s} - 3\mathrm{s}) = 8\mathrm{m}$.

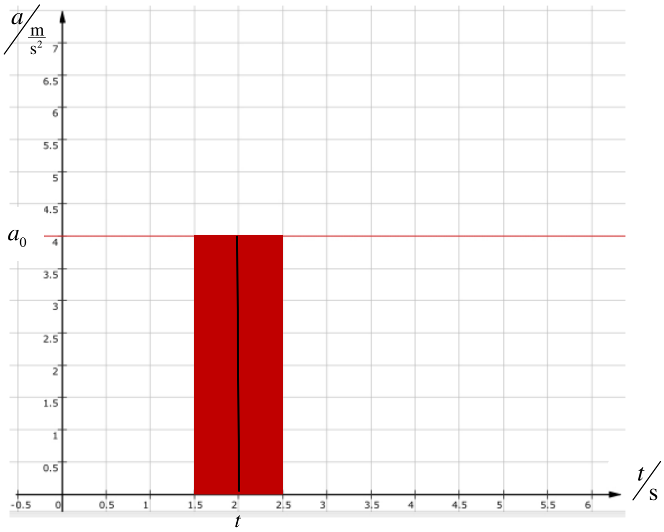
### *1.1.3 Geradlinig und gleichmäßig beschleunigte Bewegung*

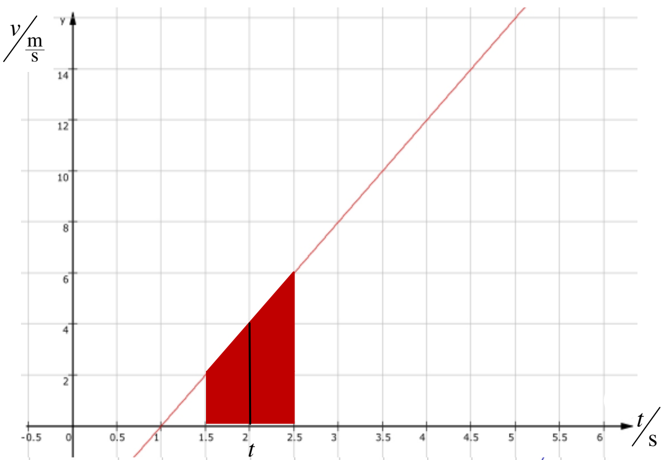
*Auch diese Bewegung ist näherungsweise nur im Labor möglich und wird wieder mit einer Luftkissenbahn durchgeführt. Die Beschleunigung ist zu jeder Zeit gleich. Sie ist konstant!*

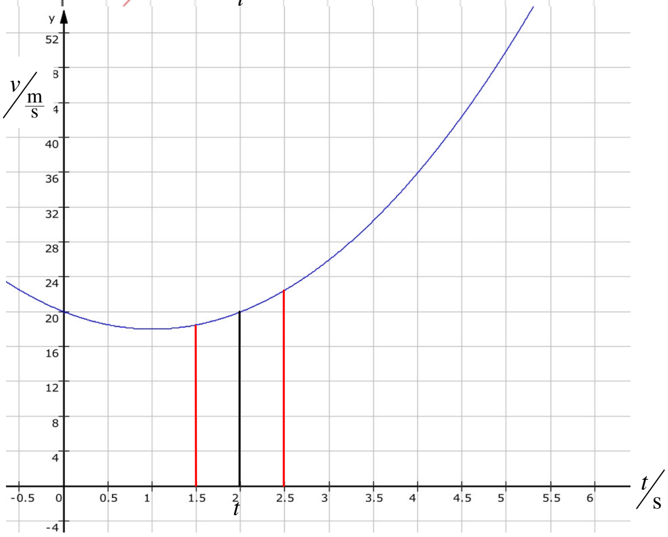


Stellen wir die Bewegungsgleichungen in der allgemeinsten Form auf. Dazu verwenden wir wieder die Punkt-Steigungsform für Funktionen. Wie sieht nun die Situation in den Schaubildern aus?

Nehmen wir zuerst in $t \in [1{,}5\,\mathrm{s};\, 2{,}5\,\mathrm{s}] \subset \mathbb{R}\,\mathrm{s}$, also $t_0 = 1{,}5\,\mathrm{s}$ und $t_1 = 2{,}5\,\mathrm{s}$ sowie allgemein $t_0 \le t \le t_1$ eine positive Beschleunigung in Augenschein.




Hier können wir schneller argumentieren, da sich die Begründungen wiederholen.

Ist die Beschleunigung konstant, so ist der Zuwachs der Geschwindigkeit in gleichen Zeitintervallen gleich groß. Die Beschleunigung ist somit die Proportionalitätskonstante (Steigung der Geraden der Geschwindigkeit), also $v_1 - v_0 = a(t_1 - t_0)$.

Der funktionale Zusammenhang ist nun

$$v(t) = a(t - t_0) + v(t_0)$$

bzw. allgemein

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau .$$

Umgekehrt ist die Steigung der Tangente durch

$$a(t) := \dot{v}(t) \equiv \frac{dv(t)}{dt}$$

gegeben.

Berechnen wir nun den Flächeninhalt zwischen der Kurve (hier Geraden) und der 1. Achse im Intervall $t_0 \le t \le t_1$ mit $t_0 = 1{,}5\,\mathrm{s}$ und $t_1 = 2{,}5\,\mathrm{s}$, so erhalten wir

$$s(t) - s(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau$$

bzw.

$$\begin{aligned} s(t) - s(t_0) &= \tfrac{1}{2}\big(v(t) - v(t_0)\big)\big(t - t_0\big) + v(t_0)\big(t - t_0\big) \\ &= \tfrac{1}{2} a\big(t - t_0\big)\big(t - t_0\big) + v(t_0)\big(t - t_0\big) \\ &= \tfrac{1}{2} a\big(t - t_0\big)^2 + v(t_0)\big(t - t_0\big). \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$s(t) = \tfrac{1}{2} a\big(t - t_0\big)^2 + v(t_0)\big(t - t_0\big) + s(t_0).$$

Auch hier müssen $v(t_0)$ und $s(t_0)$ bekannt sein, da nur Zuwächse berechnet werden können.

Konkret erhalten wir mit $a_0 = 4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ :

***Geschwindigkeit:*** $v(t) = 4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (t - 1{,}5\,\mathrm{s}) + 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

***Weg:*** $s(t) = \frac{1}{2} \cdot 4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \big(t - 1{,}5\,\mathrm{s}\big)^2 + 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \big(t - 1{,}5\,\mathrm{s}\big) + 18{,}5\,\mathrm{m} = 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2 - 4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t + 20\,\mathrm{m}.$

Wie lauten die Formeln $v(s)$ bzw. $s(v)$. Dafür ersetzen wir $t-t_0$ in $v(t)-v(t_0)=a(t-t_0)$ durch $t-t_0$ aus $s(t)-s(t_0)=\frac{1}{2}(v(t)-v(t_0))(t-t_0)+v(t_0)(t-t_0)$ und umgekehrt. Wir erhalten mit $s(t)-s(t_0)=\left[\frac{1}{2}(v(t)-v(t_0))+v(t_0)\right](t-t_0)=\left[\frac{1}{2}(v(t)+v(t_0))\right](t-t_0)$ (Trapez) die Formeln

$$s(v)-s(v_0)=\frac{1}{2a}(v+v_0)(v-v_0)=\frac{1}{2a}(v^2-v_0^2) \text{ und } v(s)=\sqrt{2a(s-s_0)+v^2(s_0)}\,.$$

## Zusammenfassung

***Gleichmäßig geradlinige Bewegung*** ($v=\text{const}$)

$s(t)=v(t-t_0)+s(t_0)$, wobei $t_0\le t\le t_1$ bzw. $t\in[t_0;\,t_1]$.

***Geradlinige, gleichmäßig beschleunigte Bewegung*** ($a=\text{const}$)

$s(t)=\frac{1}{2}a(t-t_0)^2+v(t_0)(t-t_0)+s(t_0)$, wobei $t_0\le t\le t_1$ bzw. $t\in[t_0;\,t_1]$;

$v(t)=a(t-t_0)+v(t_0)$, wobei $t_0\le t\le t_1$ bzw. $t\in[t_0;\,t_1]$;

$s(v)=\frac{1}{2a}(v^2-v_0^2)+s(v_0)$, wobei $v_0\le v\le v_1$ bzw. $v\in[v_0;\,v_1]$;

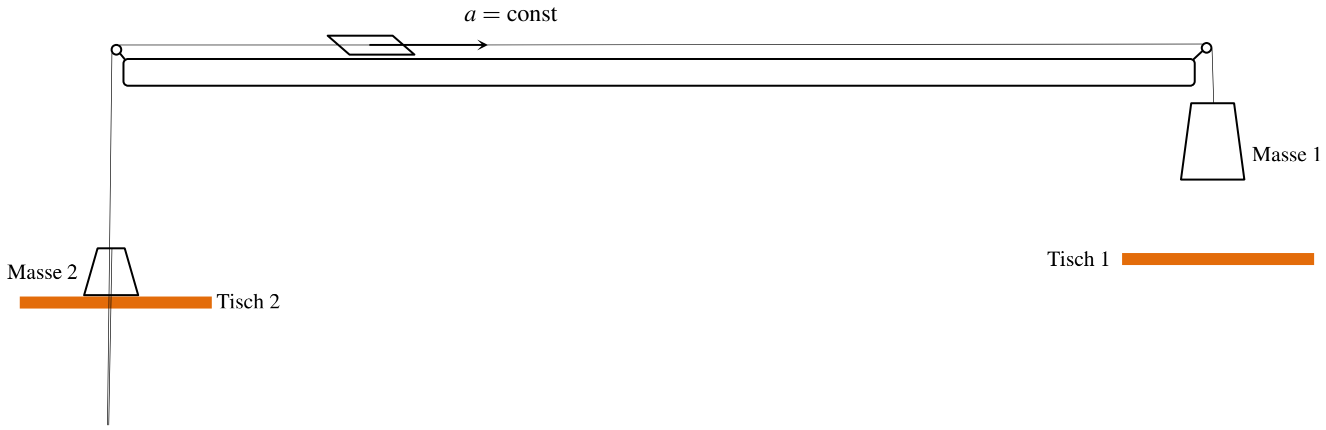
$v(s)=\sqrt{2a(s-s_0)+v^2(s_0)}$, wobei $s_0\le s\le s_1$ bzw. $s\in[s_0;\,s_1]$.

### Allgemein gelten die Formeln

Tangentensteigung: $v(t)=\dot{s}(t)$, $a(t)=\dot{v}(t)=\ddot{s}(t)$

Integralfunktionen: $s(t)-s(t_0)=\int_{t_0}^{t}v(\tau)\,d\tau$, $v(t)-v(t_0)=\int_{t_0}^{t}a(\tau)\,d\tau$

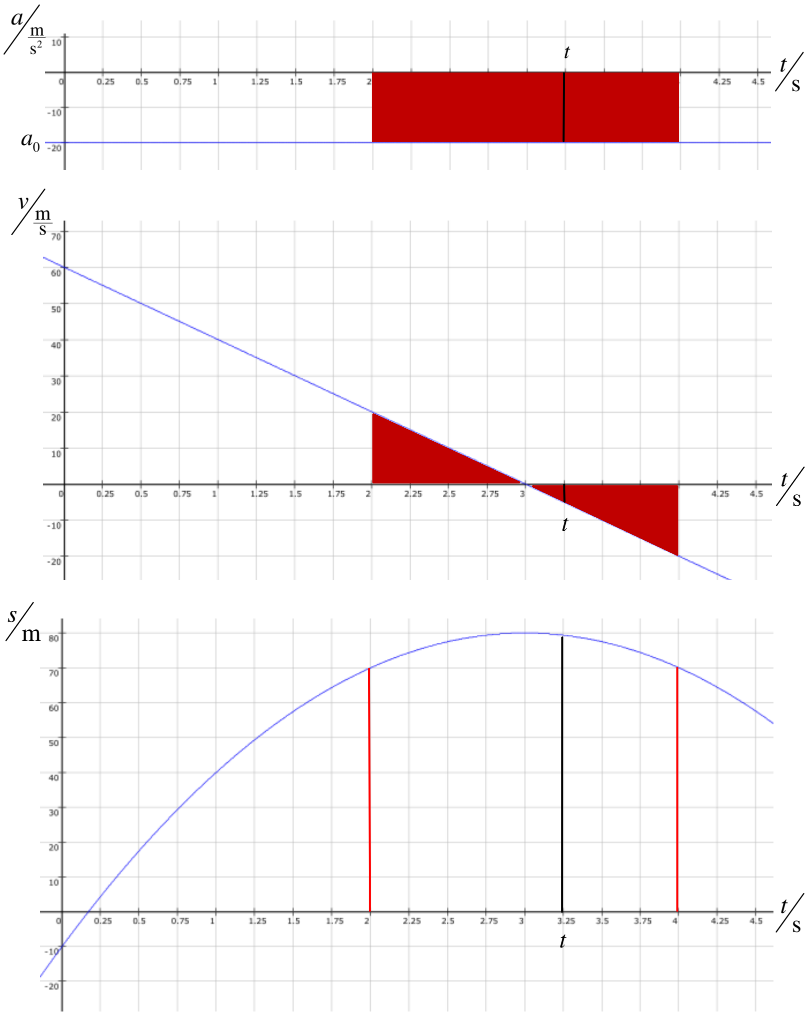
***Negative Beschleunigungen***




Zunächst beschleunigt die Masse 1 den Wagen auf der Luftkissenbahn so lange positiv, bis sich die Masse 1 auf dem Tisch 1 absetzt. Der Wagen fährt nun mit konstanter Geschwindigkeit, bis der Faden an Masse 2 gespannt ist. Der Wagen hebt jetzt die Masse 2 an und wird dadurch negativ beschleunigt.

Betrachten wir nur den Augenblick der negativen Beschleunigung im Intervall $t \in [2\mathrm{s};\, 4\mathrm{s}] \subset \mathbb{R}\,\mathrm{s}$. Der allgemeine Fall der Bewegung wird eine Übungsaufgabe sein.

Die Diagramme sehen nun wie folgt aus.




Wie wir sehen werden, verändern sich die Formeln nicht.

Die Beschleunigung beträgt $a = -20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ (Umgangssprachlich Bremsen).

$$v(t) = a(t - t_0) + v(t_0)$$

Hier: $v(t) = -20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(t - 2\mathrm{s}) + 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ !

Die Geschwindigkeit nimmt ab. Außerdem ist $v(3\mathrm{s}) = 0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Für $3\mathrm{s} < t \leq 4\mathrm{s}$ ist die Geschwindigkeit negativ.

*Interpretieren Sie die Bedeutung an der Fahrbahn?*

Auch die Streckenfunktion ändert sich nicht.

$$s(t) = \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 + v(t_0)(t - t_0) + s(t_0)$$

$$s(t) = -10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (t - 2\mathrm{s})^2 + 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot (t - 2\mathrm{s}) + 70\mathrm{m}$$

## Aufgaben

1. Stellen Sie die Funktionen $s(v) = \frac{1}{2a}\left(v^2 - v_0^2\right) + s(v_0)$ und $v(s) = \sqrt{2a(s - s_0) + v^2(s_0)}$ sowie die Scheitelpunktformen für obige positive sowie negative Beschleunigungen auf.
2. Entwickeln Sie die Scheitelpunktform für $s(t) = \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 + v(t_0)(t - t_0) + s(t_0)$.

## Lösungen

$s_1(v) = \frac{\mathrm{s}^2}{8\mathrm{m}}\left(v^2 - 4\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\right) + 18{,}5\,\mathrm{m} = \frac{\mathrm{s}^2}{8\mathrm{m}}v^2 + 18\,\mathrm{m}$ , $s_2(v) = -\frac{\mathrm{s}^2}{40\mathrm{m}} \cdot \left(v^2 - 400\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\right) + 70\,\mathrm{m} = -\frac{\mathrm{s}^2}{40\mathrm{m}} \cdot v^2 + 80\,\mathrm{m}$

$v_1(s) = \sqrt{8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(s - 18{,}5\,\mathrm{m}) + 4\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = \sqrt{8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}s - 144\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}$ , $v_1(s) = \sqrt{-40\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(s - 70\,\mathrm{m}) + 400\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = \sqrt{-40\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}s + 3200\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}$

$s_1(t) = 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(t - 1\mathrm{s})^2 - 18\,\mathrm{m}$ , $s_2(t) = -10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(t - 3\mathrm{s})^2 + 80\,\mathrm{m}$ ,

### *Scheitelpunktformen*

$$s(v) = \frac{1}{2a}\left(v^2 - v_0^2\right) + s(v_0) = \frac{1}{2a}v^2 + s(v_0) - \frac{1}{2a}v_0^2$$

$$s(t) = \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + s_0 = \frac{1}{2}a\left[(t - t_0)^2 + 2\frac{v_0}{a}(t - t_0)\right] + s_0 = \frac{1}{2}a\left[(t - t_0) + \frac{v_0}{a}\right]^2 - \frac{v_0^2}{2a} + s_0$$

$$= \frac{1}{2}a\left[(t - t_0) + \frac{v_0}{a}\right]^2 - \left(\frac{v_0^2}{2a} - s_0\right)$$

### 1.1.4 Die Momentangeschwindigkeit

***In diesem Abschnitt soll die Momentangeschwindigkeit noch einmal genauer betrachtet werden.***

Soll die Geschwindigkeit zu einem genauen Zeitpunkt $t_0$ bestimmt werden, so ist dies physikalisch unmöglich. Jedoch haben wir die Möglichkeit die Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt $t_0$ so genau wie nötig zu bestimmen. Wir müssen nur verhindern, dass sich die Geschwindigkeit in $\Delta s$ während der Zeit $\Delta t$ ändert. Wir legen daher fest:

Die ***physikalische Momentangeschwindigkeit*** $v(t_0)$ ist definiert durch

$$v(t_0) := \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0},\ s_1 - s_0 \text{ und } t_1 - t_0 \neq 0 \text{ so klein wie nötig.}$$

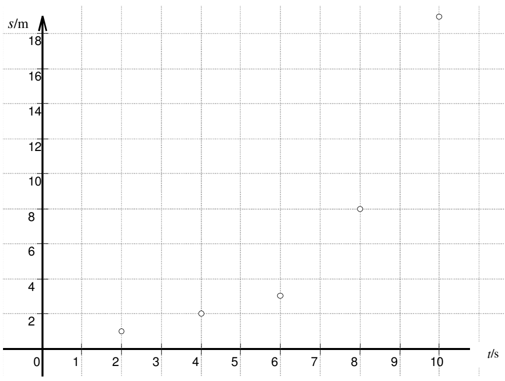
Hierbei sind $s_0$ bzw. $s_1$ die Punkte des Weges zur Zeit $t_0$ bzw. zur Zeit $t_1$. Die physikalische Momentangeschwindigkeit stellt folglich eine Sekantensteigung im *t*-*s*-Diagramm dar.

Mathematisch kann daher die ***mathematische Momentangeschwindigkeit*** $v(t_0)$ durch die Tangentensteigung im *t*-*s*-Diagramm definiert werden.

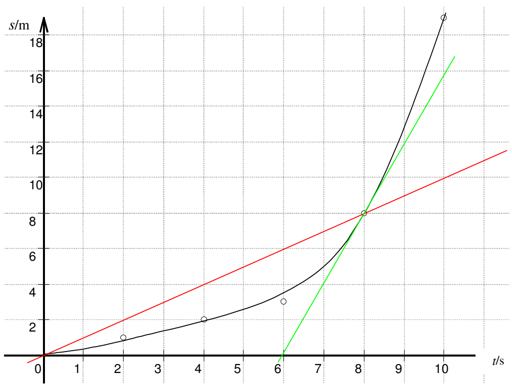
$$v(t_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0},\ t_1 \neq t_0$$

**Aufgabe**

Im folgenden *t*-*s*-Diagramm sind Messpunkte eingezeichnet. Verbinde die Messpunkte in einem Zug vom Ursprung beginnend. Bestimme dann die Durchschnittsgeschwindigkeit der ersten 8 Sekunden und die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t_0 = 8\,\text{s}$.




**Lösung:**

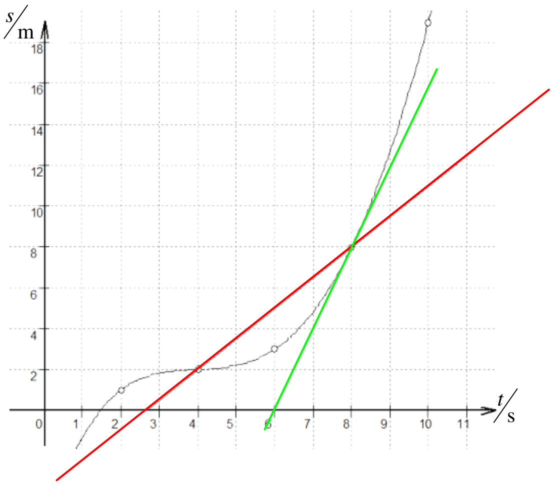



Hier ist die Vorgabe zu erfüllen. Daher werden nicht alle Punkte getroffen. Hier werden mögliche Fehler ausgeglichen. Die nötigen Daten werden aus dem Diagramm entnommen.

***Durchschnittsgeschwindigkeit:*** Mit $\Delta s = 8\,\text{m} - 0\,\text{m} = 8\,\text{m}$ und $\Delta t = 8\,\text{s} - 0\,\text{s} = 8\,\text{s}$ folgt $v_D = \frac{8\,\text{m}}{8\,\text{s}} = 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

***Momentangeschwindigkeit:*** Mit $\Delta s = 11{,}8\,\text{m} - 4\,\text{m} = 7{,}8\,\text{m}$ und $\Delta t = 9\,\text{s} - 7\,\text{s} = 2\,\text{s}$ folgt $v = \frac{7{,}8\,\text{m}}{2\,\text{s}} = 3{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

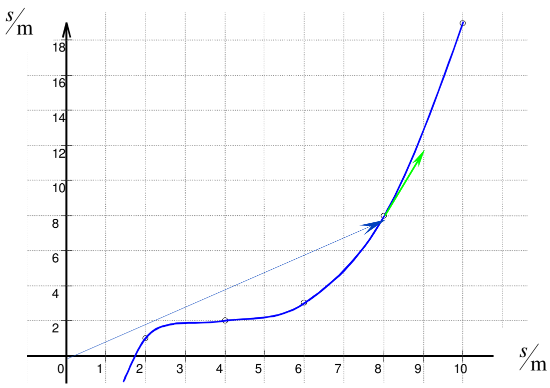
Soll der Ursprung nicht ausdrücklich eingeschlossen werden, so ergibt sich folgendes Diagramm.




Hier ist die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen 4 $s$ und 8 $s$ dargestellt. Die mathematische Momentangeschwindigkeit (Tangentensteigung) zum Zeitpunkt $t_0$ wird durch $v(t_0) = \dot{s}(t_0)$ festgelegt. Hierbei ist $\dot{s}(t_0)$ die Tangentensteigung im *t*-*s*-Diagramm.

Natürlich wird nicht immer geradeaus gefahren. Denken wir an einen Ritter, der immer seine Lanze dabei hat. Seine Lanze im Anschlag zeigt daher immer in die Richtung, in der sich sein Pferd bewegt. Die Bewegungsrichtung ist also auch wichtig. Wir legen die Bewegungsrichtung durch einen Pfeil fest. Der ***Weg*** und die ***Geschwindigkeit*** sind ***Vektoren***, wie der Mathematiker sagt. Die Geschwindigkeit ***v*** ist vom lateinischen Wort „***velocitas***“ abgeleitet.

Im zweidimensionalen Koordinatensystem wird ein Punkt des Weges durch $s(t) = (s_1(t)|s_2(t))$ dargestellt. Der Vektor, der auf den Punkt $(s_1(t)|s_2(t))$ zeigt, heißt Ortsvektor $\vec{s}(t)$. Der Vektor, der an den Punkt $(s_1(t)|s_2(t))$ angeheftet ist und die Geschwindigkeit darstellt, wird durch $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ dargestellt. Die Länge des Vektors stellt die Größe der Geschwindigkeit dar. Sie wird nach Pythagoras berechnet, also $v(t) = \sqrt{(v_1(t))^2 + (v_2(t))^2}$. Vektoren dürfen nur dann addiert werden, wenn sie in denselben Raumpunkt angreifen.




In diesem Diagramm sind der ***Weg*** blau und der Vektor der ***Geschwindigkeit*** grün dargestellt. Die Größe der Geschwindigkeit (Tachometer) berechnet sich zu

$$\begin{aligned} v(8\,\mathrm{s}) &= \sqrt{\left(9\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 8\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + \left(11{,}5\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 8\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + 3{,}5^2}\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ &= 3{,}64\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \end{aligned}$$

Die Vektoreigenschaft der Geschwindigkeit wird durch $\vec{v}$ oder $\boldsymbol{v}$ dargestellt. Mathematisch ist $\vec{v}(t_0) = \dot{\vec{s}}(t_0)$.

### 1.1.5 Die Relativgeschwindigkeit

Beziehen wir die Bewegung eines Körpers auf einen anderen Körper, so sprechen wir von der ***Relativbewegung*** eines Körpers.

***Beispiele:*** Zwei Fahrzeuge fahren hintereinander her. Die Geschwindigkeiten beider Fahrzeuge haben ein positives Vorzeichen, da die Richtungen übereinstimmen. Die Relativgeschwindigkeit ergibt sich aus der Differenz der Einzelgeschwindigkeiten.

$$v_{rel}(t) = v_1(t) - v_2(t)$$

Zwei Fahrzeuge fahren aufeinander zu. Die Geschwindigkeiten beider Fahrzeuge haben ein unterschiedliches Vorzeichen, da die Richtungen entgegengesetzt sind. Die Relativgeschwindigkeit ergibt sich aus der Summe der Einzelgeschwindigkeiten.

$$v_{rel}(t) = v_1(t) + v_2(t)$$

***Im Folgenden sprechen wir nur noch von der Geschwindigkeit, da aus dem Kontext ersichtlich ist, um welche Geschwindigkeit es sich handelt.***

## 1.2 Beschleunigung

Verändert sich die Geschwindigkeit während der Bewegung, so nennt der Physiker diese Veränderung **Beschleunigung**. Sie wird genau wie die Geschwindigkeit berechnet.

$$a := \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Auch hier gilt wieder: Die Sekante bestimmt die Durchschnittsbeschleunigung und die Tangentensteigung die Momentanbeschleunigung. Wir unterscheiden das in der Formel aber nicht mehr, da aus dem Kontext zu entscheiden ist, um welche Beschleunigung es sich handelt. Die Beschleunigung $a$ ist vom lateinischen Wort „***accelerāre***“ abgeleitet.

Die ***Einheit der Beschleunigung*** ist $[a] := \frac{\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

***Momentangeschwindigkeit:*** $v(t_0) := \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$

***Momentanbeschleunigung:*** $a(t_0) := \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0}$

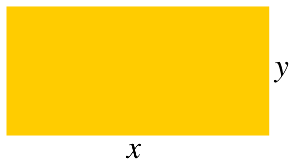
***Bedingung: Die Differenzen sollen so klein wie nötig sein!***

### 1.3 Zuwächse, numerisches Differenzieren und numerisches Integrieren

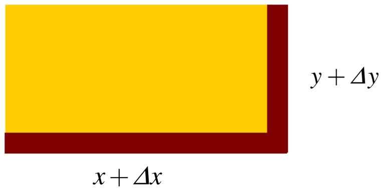
Wir wollen nun aus $s(t)$ die Geschwindigkeit $v(t)$ und anschließend die Beschleunigung $a(t)$ bestimmen.

Dazu müssen wir aber wissen, dass $\Delta\left(t^2\right) = 2t \cdot \Delta(t)$ gilt. Dies wollen wir jetzt einsehen.

Betrachten wir etwas allgemeiner ein Rechteck mit den Längen *x* und *y*.




Variieren wir die Längen um sehr kleines Stück, so erhalten wir neue Seitenlängen $x + \Delta x,\ y + \Delta y$.




Der Zuwachs des Flächeninhalts wird durch die Differenz $(x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy$ berechnet. Andererseits ist dies auch $\Delta(xy)$. Folglich gilt

$$\begin{aligned}\Delta(xy) &= (x+\Delta x)\Delta y + (y+\Delta y)\Delta x - \Delta x\Delta y\\ &= x\Delta y + \Delta x\Delta y + y\Delta x + \Delta y\Delta x - \Delta x\Delta y\\ &= x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y.\end{aligned}$$

Da wir $\Delta x$ und $\Delta y$ als sehr klein vorausgesetzt haben, kann $\Delta x\Delta y$ in der Näherung vernachlässigt werden ($\Delta x\Delta y \approx 0$). In der Mathematik schreiben wir wieder $d$ statt $\Delta$, also $d(xy) = xdy + ydx$.

***Beispiel:*** $\Delta x = 10^{-2}$ und $\Delta y = 10^{-3}$ liefert $\Delta x\Delta y = 10^{-5}$. Dies ist ein Fehler in der 5. Nachkommastelle.

In der Physik gilt somit unter Beachtung des extrem kleinen Fehlers $\Delta x\Delta y$ die Gleichung

$$\boxed{\Delta(xy) = x\Delta y + y\Delta x\,.}$$

Setzen wir nun für *x* und *y* die Variable *t* ein, so erhalten wir $\Delta\left(t^2\right) = 2t\Delta t$.

***Beweisen Sie:*** $\Delta(x+y) = \Delta x + \Delta y$ und $\Delta(cx) = c\Delta x$ sowie $\Delta(c) = 0$ für eine reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$.

Wenden wir diese Erkenntnisse auf $s(t) = 2{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(t-15\,\mathrm{s})^2 + 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}(t-15\,\mathrm{s}) + s(15\,\mathrm{s})$ an. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\Delta s(t) &= \Delta\left(2{,}0\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(t-15\,\mathrm{s})^2 + 20\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}(t-15\,\mathrm{s}) + s(15\,\mathrm{s})\right)\\ &= \Delta\left(2{,}0\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(t-15\,\mathrm{s})^2\right) + \Delta\left(20\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}(t-15\,\mathrm{s})\right) + \Delta\left(s(15\,\mathrm{s})\right)\\ &= 2{,}0\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,\Delta\left((t-15\,\mathrm{s})^2\right) + 20\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,\Delta(t-15\,\mathrm{s})\\ &= 2{,}0\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 2(t-15\,\mathrm{s})\Delta(t-15\,\mathrm{s}) + 20\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,\Delta(t-15\,\mathrm{s})\\ &= \left(4{,}0\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(t-15\,\mathrm{s}) + 20\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)\Delta(t-15\,\mathrm{s})\\ &= \left(4{,}0\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(t-15\,\mathrm{s}) + 20\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)\Delta t.\end{aligned}$$

Das Ergebnis ist die Geschwindigkeit $v(t)=\frac{\Delta s(t)}{\Delta t}=4{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(t-15\,\mathrm{s})+20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Aus der Geschwindigkeit erhalten wir nun

$$\begin{aligned}\Delta v(t)&=\Delta\left(4{,}0\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(t-15\,\mathrm{s})+20\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)\\&=4{,}0\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\Delta(t-15\,\mathrm{s})+\Delta\left(20\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)\\&=4{,}0\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\Delta(t-15\,\mathrm{s})\\&=4{,}0\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\Delta t.\end{aligned}$$

Das Ergebnis ist die Beschleunigung $a(t)=\frac{\Delta v(t)}{\Delta t}=4{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

## Lösungen

Es darf auch mit $\Delta(z)=z_1-z_0$ gerechnet werden

$\Delta(x+y)=\Delta x+\Delta y$:

Es ist $\Delta(x+y)=(x+\Delta(x))+(y+\Delta(y))-(x+y)=x+y-(x+y)+\Delta(x)+\Delta(y)=\Delta(x)+\Delta(y)$

oder $\Delta(x+y)=x_1+y_1-(x_0+y_0)=x_1-x_0+y_1-y_0=\Delta(x)+\Delta(y)$.

$c\in\mathbb{R}\Rightarrow\Delta(cx)=c\Delta(x)$:

Es ist $\Delta(cx)=cx_1-cx_2=c(x_1-x_2)=c\Delta(x)$.

$c\in\mathbb{R}\Rightarrow\Delta(c)=0$: (Differenz eines Punktes ist null.)

Folgt aus $\Delta(c)=c_1-c_0=c-c=0$.

Oder zunächst

$\Delta(1)=0$:

Folgt aus $\Delta(x^2)=2x\Delta(x)$ mit $x=1$, also $\Delta(1)=2\cdot\Delta(1)\Rightarrow\Delta(1)=0$ und aus $\Delta(cx)=c\Delta(x)$ mit $x=1$, also $\Delta(c)=\Delta(c\cdot 1)=c\cdot\Delta(1)=c\cdot 0=0$.

$\Delta(xy)=x\Delta(y)+y\Delta(x)+\Delta(x)\Delta(y)$:

$$\begin{aligned}\Delta(xy)&=x_1y_1-x_0y_0=x_1(y_1-y_0)+y_0(x_1-x_0)=(x_0+\Delta(x))\Delta(y)+y_0\Delta(x)\\&=(x+\Delta(x))\Delta(y)+y\Delta(x)=x\Delta(y)+\Delta(x)\Delta(y)+y\Delta(x)\\&=x\Delta(y)+y\Delta(x)+\Delta(x)\Delta(y).\end{aligned}$$

## Bemerkung

***Lesen wir die Formeln von rechts nach links, also rückwärts, so heißt dieser Vorgang numerisches Integrieren.***

### Mathematische Formeln

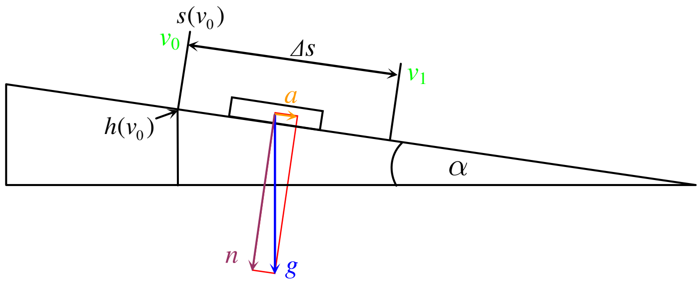
Es sei $c\in\mathbb{R}$ und es seien $x$ und $y$ variabel.

1. $dc=0$
2. $d(x+y)=dx+dy$
3. $d(cx)=cdx$
4. $d(xy)=xdy+ydx$

### *1.4 Die Fallbeschleunigung*

Begeben wir uns auf die Spuren von Galileo Galilei unter Beachtung von $2a\left(s(v)-s(v_0)\right)=v^2-v_0^2$.

Mit dieser Gleichung wollen wir auf der schiefen Ebene die Fallbeschleunigung $g$ bestimmen. Geben Sie dazu einen Zusammenhang zwischen der Höhe $h$ und der Länge $s$ sowie $a$ und $g$ an.




Stellen Sie nun eine Verknüpfung zwischen der obigen Gleichung und der Zeichnung her.

**Lösung**

Es gilt $a=g\sin\alpha$ und $\left(s(v)-s(v_0)\right)\sin\alpha=h(v_0)-h(v)$. Also folgt aus $v^2-v_0^2=2a\left(s(v)-s(v_0)\right)$ nun

$$v^2-v_0^2=2a\left(s(v)-s(v_0)\right)=2g\sin\alpha\left(s(v)-s(v_0)\right)=2g\left(h(v_0)-h(v)\right)=-2g\left(h(v)-h(v_0)\right).$$

Die Höhe in Abhängigkeit der Geschwindigkeit berechnet sich folglich nach der Formel

$$h(v)=-\tfrac{1}{2g}\left(v^2-v_0^2\right)+h(v_0).$$

Zeigen Sie nun unter Berücksichtigung von $v(t)=-g\left(t-t_0\right)+v(t_0)$, wobei $t_0\le t\le t_1$ die Äquivalenz der Formeln

$$h(t)=-\tfrac{1}{2}g\left(t-t_0\right)^2+v_0\left(t-t_0\right)+h(t_0)\overset{v(t)=-g(t-t_0)+v(t_0)}{\Leftrightarrow}h(v)=-\tfrac{1}{2g}\left(v^2-v_0^2\right)+h(v_0)$$ [2]

**Zum Versuch**

Wir wählen $\alpha=5°$, $10°$ und messen eine Strecke $\Delta s$ ab, z. B. 40 cm, 60 cm, 80 cm, 100 cm. Jedes Mal messen wir die Geschwindigkeiten $v_0$ und $v_1$. Dazu fertigen wir eine Messwertetabelle an.

$\underline{\underline{\alpha=5°}}$

| Strecke $s$ in cm | 40 | 60 | 80 | 100 |
|---|---|---|---|---|
| Geschwindigkeit $v_0$ | | | | |
| Geschwindigkeit $v_1$ | | | | |
| $v_0^2$ | | | | |
| $v_1^2$ | | | | |
| $a$ | 0,85 | | | |
| $g$ | 9,8 | | | |

---

2 $h(t)=-\tfrac{1}{2g}\left[g^2\left(t-t_0\right)^2-2v_0g\left(t-t_0\right)\right]+h_0\overset{v(t)-v(t_0)=-g(t-t_0)}{\Leftrightarrow}h(v)=-\tfrac{1}{2g}\left[\left(v-v_0\right)^2+2v_0\left(v-v_0\right)\right]+h_0$

$\overset{v(t)-v(t_0)=-g(t-t_0)}{\Leftrightarrow}h(v)=-\tfrac{1}{2g}\left(v^2-v_0^2\right)+h(v_0)$

$\underline{\underline{\alpha = 10^\circ}}$

| Strecke $s$ in cm | 40 | 60 | 80 | 100 |
|---|---|---|---|---|
| Geschwindigkeit $v_0$ | | | | |
| Geschwindigkeit $v_1$ | | | | |
| $v_0^2$ | | | | |
| $v_1^2$ | | | | |
| $a$ | 1,70 | | | |
| $g$ | 9,8 | | | |

***Auswertung:***

***Die Gravitationsbeschleunigung beträgt*** $g = 9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$***. Als Vektor zeigt g gegen den Höhenzuwachs, muss also negativ sein, da die Höhenabnahme eine negative Geschwindigkeit und somit auch eine negative Beschleunigung zur Folge hat.***

***Ferner ist***

$$-2g\left(h(v) - h(v_0)\right) = v^2 - v_0^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}v^2 + gh(v) = \frac{1}{2}v_0^2 + gh(v_0).$$

***Die Formel***

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 + gh = \frac{1}{2}v_0^2 + gh_0}$$

***gibt nun einen Zusammenhang zwischen den Anfangsbedingungen (rechte Seite) und den momentanen Bedingungen (linke Seite) an. Hierbei ist es unerheblich, in welcher Abhängigkeit die Höhe berechnet wird.***

***Natürlich werden in dieser Formel keine thermischen Verluste durch Reibung berücksichtigt.***

***Bemerkung***

***Sollte die Beschleunigung nur*** $g = 9{,}4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ ***betragen, so beträgt die Abweichung nur ca. 4%, ein für die Schule guter Messwert.***

## 2. *Die Energie*

Bisher haben wir eine Bewegung, die mit der Geschwindigkeit und Beschleunigung beschrieben wird. Lassen wir einen Körper aus einer gewissen Höhe über dem Erdboden los, so wird er beschleunigt. Gesucht ist daher ein Zusammenhang zwischen der Höhe des Körpers und seiner Geschwindigkeit. Dabei gehen wir von einer konstanten Gravitationsbeschleunigung $g = 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ aus.

Der gesuchte Zusammenhang wird durch die Energiegleichung beschrieben. Starten wir mit einem Experiment. Ein Körper befindet sich in der Höhe $h$. Der Körper habe die Masse $m$. Die Gravitationsbeschleunigung beträgt $g$. Der Körper der Masse $m$ befindet sich in der Höhe $h$ und wird mit $g$ beschleunigt. Den Körper aufzuhalten, ist bei größerer Masse schwieriger. Folglich ist die Masse zu berücksichtigen, da wir später die Reibung mit der Luft zu berücksichtigen haben. Nun wissen wir, dass die konstante Beschleunigung $g$ eine Geschwindigkeits- und eine Weglängenänderung zur Folge hat. Der Zusammenhang ist uns bekannt. Es ist die Gleichung $\frac{1}{2}v^2 + gh(v) = \frac{1}{2}v_0^2 + gh(v_0)$. Multiplizieren wir die Gleichung mit der Masse $m$, so folgt unter Auslassung der Abhängigkeit

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0.$$

Die rechte Seite ist eine Konstante $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0$; sie beschreibt eine Anfangsbedingung. Die linke Seite setzt sich aus zwei Termen zusammen. Den ersten Term

$$\frac{1}{2}mv^2,$$

er ist unabhängig von der Bewegungsrichtung, nennen wir die ***kinetische Energie*** $E_{\text{kin}}$. Der zweite Term ist von der Bewegungsrichtung abhängig. Die Höhe $h$ nimmt mit dem Abstand von der Erdoberfläche zu, während die Beschleunigung zur Erdoberfläche hin zunimmt. Beide sind entgegengesetzt.

Den Term

$$mgh$$

nennen wir die ***potentielle Energie*** $E_{\text{pot}}$.

Die Summe aus kinetischer und potentieller Energie ist immer konstant, wobei die konstante Zahl sich aus der Anfangsbedingung der Summe beider Energien berechnet.

Fassen wir zusammen. $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$ und $E_{\text{pot}} = mgh$. Es gilt der ***Energieerhaltungssatz*** der Mechanik

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = E_0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0.$$

### *Ein Arbeitsbeispiel.*

Eine Eisenkugel mit einer Masse von $m = 10\,\text{kg}$ wird aus einer Höhe von $20\,\text{m}$ über der Erdoberfläche fallen lassen. Rechne mit $g = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

a) Welche Geschwindigkeit hat sie in $10\,\text{m}$ Höhe?

b) Mit welcher Geschwindigkeit trifft sie auf die Erde?

c) Welche Zeit ist bis zur Höhe $h = 10\,\text{m}$ bzw. $h = 0\,\text{m}$ vergangen?

#### *Lösung des Problems*

Die Anfangsbedingung ist durch

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}\cdot 10\,\text{kg}\cdot\left(0\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 10\,\text{kg}\cdot 10\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 20\,\text{m} = 10\,\text{kg}\cdot 200\cdot\tfrac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 2000\,\text{J}$$

gegeben.

a) Mit dem Energieerhaltungssatz $\frac{1}{2}mv^2 + mgh = 2000\,\text{J}$ erhalten wir

$$\frac{1}{2}\cdot 10\,\text{kg}\cdot v^2 + 10\,\text{kg}\cdot 10\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 10\,\text{m} = 10\,\text{kg}\cdot 200\,\tfrac{\text{m}^2}{\text{s}^2}.$$

Lösen wir nach $v$ auf, so folgt

$$v = \sqrt{200}\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} = 10\sqrt{2}\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) Auch hier liefert der Energieerhaltungssatz $\frac{1}{2}\cdot 10\,\text{kg}\cdot v^2 + 10\,\text{kg}\cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 0\,\text{m} = 10\,\text{kg}\cdot 200\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ die Lösung

$$v = \sqrt{400}\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} = 20\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) Die Zeit berechnen wir durch $v(t) = g\cdot(t - t_0) \wedge t_0 = 0\,\text{s}$ zu $t = \frac{20}{10}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\frac{\text{s}^2}{\text{m}} = 2\,\text{s}$.

## 2.1 Impuls, Kraft und Arbeit

Zunächst können wir uns die Änderung der mechanischen Energie anschauen. Wir wenden uns der Energiegleichung $E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = E_0 = \text{konstant}$ zu. Wir erhalten $\Delta(E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}) = \Delta E_0 = 0 \Leftrightarrow$ $\Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{pot}} = 0$ oder, wenn wir es als alternierende Differentialform formulieren: $dE_{\text{kin}} + dE_{\text{pot}} = 0$. Hier ist schon zu erkennen, dass ein Energieaustausch nur zwischen $E_{\text{kin}}$ und $E_{\text{pot}}$ stattfindet. Gehen wir einen Schritt weiter. Wir erhalten

$$\Delta E_{\text{kin}} := v \cdot \Delta(mv) \text{ und } \Delta E_{\text{pot}} = g\Delta(mh).$$

Die Größe

$$p := mv$$

heißt ***Linearer Impuls***. Ferner heißt

$$\Delta E := v \cdot \Delta p$$

***Fundamentalgleichung der klassischen Mechanik***. Sie gilt für alle Energien der Mechanik.

Die zeitliche Änderung des Impulses heißt ***Kraft*** oder Impulsstrom.

$$F := \frac{\Delta p}{\Delta t} \text{ oder } F := \frac{dp}{dt}$$

Welche Energie (Arbeit) $W$ **(Work out)** muss aufgebracht werden, um eine Masse über die Strecke $\Delta s$ zu bewegen?

Mit der Fundamentalgleichung $\Delta W = v \cdot \Delta p$, der ***Geschwindigkeit*** $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ und dem ***Impulsstrom*** (Kraft) $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ finden wir durch Einsetzen:

$$\Delta W = v \cdot \Delta p = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \Delta p = \Delta s \cdot \frac{\Delta p}{\Delta t} = \Delta s \cdot F \;.$$

Ist nun der Impulsstrom $F$ konstant, so folgt $\Delta W = \Delta(s \cdot F) = 0 \Leftrightarrow \Delta(W - s \cdot F) = 0$, also

$$W = s \cdot F + W_0.$$

Hierbei ist $W_0$ die Ruheenergie für $F = 0$. Wir setzen wieder $W_0 = 0$.

***Fließt ein Impulsstrom F längs des Weges Δs, so wird Energie ΔW auf einen anderen Träger geladen.***

In der alten Sprache wird die Energieübertragung meist im folgenden Zusammenhang verwendet.

***Wirkt eine Kraft F längs eines Weges s auf einen Körper (System), so wird Arbeit W verrichtet.***

## 2.2 Die Spannenergie einer Feder

Wird eine Feder gedehnt oder zusammengedrückt, so ist dazu ein Energiestrom nötig. Hierbei ist der Bereich zu beachten, in dem die Feder in den ursprünglichen Zustand zurückkehren kann, also nicht plastisch deformiert wird. Dieser Bereich ist nach Hooke benannt, der dies unter anderen untersucht hat. Er heißt deshalb hookescher Bereich. In diesem Bereich gilt: $F_r = -D \cdot s$. Hierbei sind $F_r$ die Rückstellkraft und $s$ der aus der Ruhelage der Feder ausgelenkte Weg sowie $D$ die Federkonstante. Das Minuszeichen gibt an, dass der ausgelenkte Weg und die Kraft verschiedene Richtungen haben.

Welche Energie steckt nun in der Feder? Dazu lenken wir die Feder aus der Ruhelage mit der Kraft $F = D \cdot s$ aus und bemühen die Fundamentalgleichung der Mechanik. Wir fanden schon (vgl. oben)

$$\Delta E = \Delta s \cdot F \;.$$

Setzen wir ein, so erhalten wir $\Delta E = \Delta s \cdot D \cdot s = D \cdot s \cdot \Delta s = \frac{1}{2} D \cdot \Delta(s^2) = \Delta\left(\frac{1}{2} D \cdot s^2\right)$. Also, wie schon berechnet

$$\Delta E-\Delta\left(\tfrac{1}{2}D\cdot s^2\right)=0\Leftrightarrow\Delta\left(E-\tfrac{1}{2}D\cdot s^2\right)=0\Leftrightarrow E-\tfrac{1}{2}D\cdot s^2=E_0\,.$$

Die Spannenergie beträgt folglich

$$E_{\text{sp}}=\tfrac{1}{2}D\cdot s^2+E_0\,.$$

$E_0$ setzen wir wieder null, falls sich die Feder in der Ruhelage befindet.

Betrachten wir ein Beispiel.

### 2.2.1 Federpistole

Die Feder ( $D=100\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$ ) einer vertikal gehaltenen Federpistole wird um $s_1=0{,}15\,\text{m}$ zusammengedrückt und rastet ein. Anschließend legt man eine Kugel ( $m=200\,\text{g}$ ) auf die Feder und schießt sie nach oben.

**a)** Wo hat die Kugel bei der Aufwärtsbewegung ihre größte Geschwindigkeit?

**b)** Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit?

**c)** Welche Höhe über der Pistolenmündung erreicht die Kugel?

Reibung und Masse der Feder sind zu vernachlässigen. Rechne mit $g=9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ !

### Lösung

Die Einzelenergien sind: $E_{\text{sp}}=\frac{1}{2}Ds^2$ (auch potentielle Feder-Masse-Energie genannt), $E_{\text{kin}}=\frac{1}{2}mv^2$ sowie $E_{\text{pot}}=m\cdot g\cdot h$ und die Energieerhaltung sagt: $E_{\text{sp}}+E_{\text{kin}}+E_{\text{pot}}=E_0$.

Die Daten der Bedingung sind durch $h=0\,\text{m}$ und $s_1=0{,}15\,\text{m}$ festgelegt. Hier ist $v=0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Folglich muss $E_{\text{sp}}=\frac{1}{2}D(h-s_1)^2$ sein! Die Problematik dieser Schreibweise ist, dass für $h>s_1$ die Spannenergie nicht zu null wird. Dieses Dilemma kann aber mathematisch behoben werden.

Dazu betrachten wir folgende Funktion: $f(h):=(h-s_1)^2-|h-s_1|(h-s_1)$.

Für $h\le s_1\Rightarrow h-s_1\le 0\,\text{m}$, also $f(h)=(h-s_1)^2-|h-s_1|(h-s_1)=2(h-s_1)^2$.

Für $h>s_1\Rightarrow h-s_1>0\,\text{m}$ und damit $f(h)=(h-s_1)^2-|h-s_1|(h-s_1)=0\,\text{m}^2$.

Der geschlossene Energiesatz lautet vollständig:

$$E_{\text{sp}}(h)+E_{\text{kin}}(h)+E_{\text{pot}}(h)=\frac{1}{4}D\left[(h-s_1)^2-|h-s_1|(h-s_1)\right]+\frac{1}{2}mv^2+mgh\,.$$

Also, da $s_1$ positiv ist,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}D\left[(h-s_1)^2-|h-s_1|(h-s_1)\right]+\frac{1}{2}mv^2+mgh&=\frac{1}{4}D\left[(0\,\text{m}-s_1)^2-|0\,\text{m}-s_1|(0\,\text{m}-s_1)\right]\\&=\frac{1}{4}D\left[s_1^2+|s_1|s_1\right]\\&=\frac{1}{2}Ds_1^2\\&=50\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\cdot(0{,}15\,\text{m})^2\\&=1{,}125\,\text{J}\,.\end{aligned}$$

Hiermit berechnen wir auch die Energieströmungen. Dazu leiten wir nach der Zeit ab und beachten: $\dot{h}(t)=v(t)$ und $\dot{v}(t)=a(t)$. Dieses liefert mit der Konstanten-, Summen-, Produkt- und Kettenregel die zeitliche Ableitung

$$\frac{d}{dt}\left[E_{\text{sp}}(h(t))+E_{\text{kin}}(h(t))+E_{\text{pot}}(h(t))\right]=\frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{4}D\left[(h-s_1)^2-|h-s_1|(h-s_1)\right]+\tfrac{1}{2}mv^2+mgh\right]$$

$$=\tfrac{1}{4}D\left[2\cdot(h-s_1)\cdot\dot{h}-\frac{|h-s_1|}{h-s_1}\cdot\dot{h}\cdot(h-s_1)-|h-s_1|\dot{h}\right]+mv\dot{v}+mg\dot{h}$$

$$=\tfrac{1}{4}D\left[2\cdot(h-s_1)-|h-s_1|-|h-s_1|\right]\dot{h}+mv\dot{v}+mg\dot{h}$$

$$=\tfrac{1}{2}D\left[(h-s_1)-|h-s_1|\right]\dot{h}+mv\dot{v}+mg\dot{h}$$

$$=\tfrac{1}{2}D\left[(h-s_1)-|h-s_1|\right]v+mva+mgv$$

$$=\left[\tfrac{1}{2}D\left[(h-s_1)-|h-s_1|\right]+ma+mg\right]v.$$

Die Energieströmung beträgt folglich

$$\left[\tfrac{1}{2}D\left[(h-s_1)-|h-s_1|\right]+ma+mg\right]v=0\,\tfrac{\text{J}}{\text{s}}.$$

Zu a) Die maximale Geschwindigkeit kann nur dann erreicht werden, wenn die Beschleunigung ($a$ zeigt nach oben) null ergibt.
Folglich ist

$$\left[\tfrac{1}{2}D\left[(h-s_1)-|h-s_1|\right]+mg\right]v=0\,\tfrac{\text{J}}{\text{s}}.$$

Da $v\neq 0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, muss

$$\tfrac{1}{2}D\left[(h-s_1)-|h-s_1|\right]+mg=0\,\tfrac{\text{J}}{\text{s}}$$

sein, da nur eine Richtung vorhanden ist. Damit ist aber auch $h<s_1$, also

$$D(h-s_1)+mg=0\,\tfrac{\text{J}}{\text{s}}\Leftrightarrow h=s_1-\frac{mg}{D}\Rightarrow h=0{,}15\,\text{m}-\frac{0{,}2\,\text{kg}\cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{100\frac{\text{N}}{\text{m}}}=0{,}13\,\text{m}.$$

Die maximale Geschwindigkeit wird in 0,13 m Höhe erreicht.

Zu b) Wir setzen diese Höhe in die Energiegleichung

$$\tfrac{1}{4}D\left[(h-s_1)^2-|h-s_1|(h-s_1)\right]+\tfrac{1}{2}mv^2+mgh=1{,}125\,\text{J}$$

ein und beachten $\frac{1}{4}D\left[(h-s_1)^2-|h-s_1|(h-s_1)\right]=\frac{1}{2}D(h-s_1)^2$. Dies liefert

$$50\,\tfrac{\text{N}}{\text{m}}(-0{,}02\,\text{m})^2+0{,}1\,\text{kg}\cdot v^2+0{,}2\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 0{,}13\,\text{m}=1{,}125\,\text{J},$$

$$0{,}1\,\text{kg}\cdot v^2=1{,}125\,\text{J}-50\,\tfrac{\text{N}}{\text{m}}\cdot(-0{,}02\,\text{m})^2-0{,}2\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 0{,}13\,\text{m}$$

$$=0{,}84994\,\text{J},$$

$$\text{also } v=\sqrt{8{,}4994}\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}=2{,}92\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Zu c) **Beachte:** Die maximale Höhe wird bei $v=0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ erreicht. Die gesamte Energie ist in $E_{\text{pot}}$ umgeladen, also $mgh=1{,}125\,\text{J}$. Es folgt $h=0{,}57\,\text{m}$. Über der Mündung der Pistole folglich $h-s_1=0{,}42\,\text{m}$.

## 3. Der Energiestrom (Leistung)

Fließt Energie ***E*** von einem System zu einem anderen System oder von einem Körper zu einem anderen Körper, so nennen wir dies den ***Energiestrom***.

Die ***Energiestromstärke*** ***P*** ist definiert durch

$$P := \frac{\Delta E}{\Delta t}.$$

Die Energiestromstärke heißt in der Physik auch **Leistung**. Genauer gilt: $P(t) := \dot{E}(t)$. Mit anderen Worten: Der Energiestrom ist die zeitliche Ableitung nach der Zeit.

***Ist ein System abgeschlossen, so kann nur Energie innerhalb des Systems strömen.***

Dieser Satz gilt nicht nur für mechanische Systeme. Er gilt für alle abgeschlossenen Systeme.

Betrachten wir ein Beispiel.

***Aufgabe***

Ein Radfahrer fährt mit einer Geschwindigkeit von $18\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ und kommt an einen Abhang mit $3\,\%$ Gefälle. Der zu fahrende Weg beträgt 150 m. Die Gravitationsbeschleunigung betrage $10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Der Radfahrer wirkt während der Abfahrt nicht auf sein Fahrrad ein.

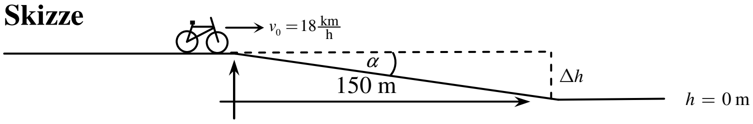
**A)** **a)** Mit welcher Geschwindigkeit kommt er am Fuß des Abhangs an, wenn keine Reibung wirkt?
**b)** Berechne den Energiestrom $P(t)$ und gib die Strömungsrichtung an.

**B)** **a)** Nun treten zusätzlich Reibungsverluste auf. Der gesamte Reibungsverlust betrage am Fuß des Abhangs 10 % der kinetischen Anfangsenergie. Wie groß ist die Geschwindigkeit nun am Fuß des Abhangs?
**b)** Geben Sie auch hier die Energiestromrichtungen an.

**C)** **a)** Nehmen Sie nun an, dass die Reibung durch eine konstante Beschleunigung $a$ längs der 150 m auftritt. Berechnen Sie die Beschleunigung $a$.
**b)** Nun wissen wir, dass die Luftreibung von der Geschwindigkeit abhängt. Nehmen Sie daher an, dass die Reibungsenergie $\frac{1}{20}\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^2}mv^4$ beträgt. Wie groß sind die Geschwindigkeiten nach 50 m, 100 m und 150 m.

***Lösung***

**Skizze**




Wegen $\sin\alpha = \tan\alpha = \alpha$ für kleine Winkel, erhalten wir

$$\Delta h = 150\,\mathrm{m} \cdot \frac{3}{100} = 4{,}50\,\mathrm{m}.$$

**A) a)** Der Energieerhaltungssatz liefert $\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}m\cdot\left(5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + m\cdot 45\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2$. Division durch $m$ ergibt $\frac{1}{2}v^2 + gh = 57{,}5\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$. Am Fuß des Abhangs $h = 0\,\mathrm{m}$ also $v^2 = 115\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$.
Die Geschwindigkeit am Fuß des Abhangs beträgt $v = 10{,}72\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

**b)** Der Energiestrom $P(t) = \dot{E}(t) = \dot{E}_{\mathrm{kin}} + \dot{E}_{\mathrm{pot}}$ liefert $P(t) = m\cdot v(t)\cdot\dot{v}(t) + m\cdot g\cdot\dot{h}(t)$. Wegen $\dot{h}(t) = v(t)$ erhalten wir $P(t) = m\cdot v(t)\cdot\left(\dot{v}(t) + g\right)$. Da das System abgeschlossen ist, wird nur Energie zwischen der kinetischen und der potentiellen Energie ausgetauscht. Dies folgt aus $P(t) = \dot{E}_{\mathrm{kin}} + \dot{E}_{\mathrm{pot}} = 0\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$. Nach a) nimmt die Geschwindigkeit zu. Folglich strömt Energie aus dem potentiellen System in das kinetische System. Wegen $m\cdot v(t)\cdot\left(\dot{v}(t) + g\right) = 0\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$ folgt mit $m\cdot v(t) \neq 0\,\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}}$ in $x$- und $y$-Richtung die Gleichung $\dot{v}(t) + g = 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Schreiben wir $v(t) = \left(v_x(t), v_y(t)\right)$, so erhalten wir $\left(\dot{v}_x(t), \dot{v}_y(t) + g\right) = (0{,}0)$, also $\dot{v}_x(t) = 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \wedge \dot{v}_y(t) + g = 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Mit den Anfangsbedingungen $v_{x,0}(t) = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\cos\left(\frac{3}{100}\right)$ und $v_{y,0}(t) = -5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\frac{3}{100}$ folgt $v_x(t) = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\cos\left(\frac{3}{100}\right)$ und $v_y(t) = -5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\frac{3}{100} - gt$.

**B) a)** In diesem Fall kann die Gleichung der Energieerhaltung durch $E_{\text{th}} + \frac{1}{2}mv^2 + mgh = m \cdot 57{,}5\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ formuliert werden. Da keine Information für jeden Zeitpunkt, sondern nur für den Fuß des Abhangs bekannt ist, kann die Gleichung auch nur dort ausgewertet werden. Wir finden

$$0{,}1 \cdot \tfrac{1}{2} m \cdot \left(5\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \tfrac{1}{2}mv^2 = m \cdot 57{,}5\,\tfrac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\,.$$

Lösen wir nach $v$ auf, so erhalten wir $v = \frac{15}{2}\sqrt{2}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

**b)** Den Energiestrom erhalten wir durch $P(t) = \dot{E}_{\text{th}}(t) + m \cdot v(t) \cdot \dot{v}(t) + m \cdot g \cdot \dot{h}(t)$. Da $E_{\text{th}}(t)$ unbekannt ist, können nur die Stromrichtungen angegeben werden.

$$E_{\text{th}} \underset{P_2(t)}{\xleftarrow{\quad + \quad}} E_{\text{kin}} \underset{P_1(t)}{\xleftarrow{\quad + \quad}} E_{\text{pot}} = E_0$$

Zunächst strömt Energie aus dem potentiellen System in das kinetische System. Gleichzeitig strömt Energie vom kinetischen System in die Umgebung, die sich erwärmt.

**C) a)** Die gesuchte Beschleunigung erhalten wir wie folgt: Die Geschwindigkeit ohne Reibung beträgt am Fuß des Abhangs $v_1 = \sqrt{115}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, mit Reibung $v_2 = \frac{15}{2}\sqrt{2}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Wenn wir eine konstante Beschleunigung, natürlich negativ, annehmen, so erhalten wir mit $a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$ und $t_0 = 0\,\text{s}$ die Gleichung $a = -\frac{0{,}1172}{t_1}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Diese negative Beschleunigung wirkt auf der Strecke 150 m. Die Energie folglich $W = F \cdot s = ma \cdot s$. Diese Energie strömt nun in die Umgebung. Wir erhalten:

$$E_{th} = -W \Leftrightarrow 0{,}1 \cdot \tfrac{1}{2}mv_0^2 = m \cdot \frac{0{,}1172}{t_1}\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 150\,\text{m} \Leftrightarrow v_0^2 t_1 = 351{,}60\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\,.$$

Mit $v_0 = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ergibt sich die Zeit $t_1$ zu $t_1 = 14{,}064\,\text{s}$. Die Beschleunigung also $a = -\frac{1}{120}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

**b)** Der Energieerhaltung lautet nun

$$\frac{1}{20}\frac{\text{s}^2}{\text{m}^2}mv^4 + \tfrac{1}{2}mv^2 + mgh = m \cdot 57{,}5\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\,.$$

Hierbei gehen wir davon aus, dass bis zum Abhang durch Energiezufuhr aus dem Körper die Reibungsenergie ausgeglichen wird. Anschließend wird keine Energie mehr zugeführt. Wir erhalten $v^4 + 10\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}v^2 + 200\frac{\text{m}^3}{\text{s}^4}h = 1150\frac{\text{m}^4}{\text{s}^4}$.

Berechnen wir die Geschwindigkeiten.

50 m: $v^4 + 10\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}v^2 + 200\frac{\text{m}^3}{\text{s}^4} \cdot \left(4{,}50 - 50 \cdot \frac{3}{100}\right)\text{m} = 1150\frac{\text{m}^4}{\text{s}^4} \Leftrightarrow v^4 + 10\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}v^2 - 550\frac{\text{m}^4}{\text{s}^4} = 0 \Leftrightarrow v^2 = 18{,}98\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$

$$v = 4{,}36\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

100 m: $v^4 + 10\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}v^2 + 200 \cdot \left(4{,}5 - 100 \cdot \frac{3}{100}\right)\frac{\text{m}^4}{\text{s}^4} = 1150\frac{\text{m}^4}{\text{s}^4} \Leftrightarrow v^4 + 10\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}v^2 - 850\frac{\text{m}^4}{\text{s}^4} = 0 \Leftrightarrow v^2 = 24{,}58\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$

$$v = 4{,}96\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

150 m: $v^4 + 10\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}v^2 = 1150\frac{\text{m}^4}{\text{s}^4} \Leftrightarrow v^4 + 10\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}v^2 - 1150\frac{\text{m}^4}{\text{s}^4} = 0 \Leftrightarrow v^2 = 29{,}28\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$

$$v = 5{,}41\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

Der Energiestrom ist jetzt zu jedem Zeitpunkt bestimmbar. Er lautet

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1}{5}\frac{\text{s}^2}{\text{m}^2}mv^3 \cdot \dot{v} + mv \cdot \dot{v} + mg \cdot \dot{h} \\ &= \left(\frac{1}{5}\frac{\text{s}^2}{\text{m}^2}mv^3 + mv\right) \cdot \dot{v} + mg \cdot \dot{h} \\ &= m\left[\left(\frac{1}{5}\frac{\text{s}^2}{\text{m}^2}v^2 + 1\right)v \cdot \dot{v} + g \cdot \dot{h}\right]. \end{aligned}$$

Energie strömt nur innerhalb des Systems, da es abgeschlossen ist. Folglich kann, da die Höhe abnimmt, nur Energie aus der potentiellen zur kinetischen und Reibungsenergie sowie von der kinetischen zur Reibungsenergie strömen. Beachte $\dot{h} = v_y$! Diese Gleichung zu lösen ist schwierig. Zunächst muss die biquadratische Energiegleichung faktorisiert werden.

$$\left(v^2\right)^2 + 10\tfrac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} v^2 + 200\tfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^4} h - 1150\tfrac{\mathrm{m}^4}{\mathrm{s}^4} = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\left(v^2 + 5\tfrac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} - \sqrt{1175\tfrac{\mathrm{m}^4}{\mathrm{s}^4} - 200\tfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^4} h}\right)\left(v^2 + 5\tfrac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} + \sqrt{1175\tfrac{\mathrm{m}^4}{\mathrm{s}^4} - 200\tfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^4} h}\right) = 0$$

Nur die erste Klammer liefert eine positive Lösung, also $v^2 = -5\tfrac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} + 5\tfrac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\sqrt{47 - 8\tfrac{h}{\mathrm{m}}}$ . Damit gilt

$$P(t) = m\left[\left(\sqrt{47 - 200\tfrac{h}{\mathrm{m}}}\right) v \cdot \dot{v} + g \cdot \dot{h}\right].$$

Einfacher wäre das Energiegefälle in Abhängigkeit der Höhe zu bestimmen. Ich komme später darauf zurück.

### Abschließende Bemerkung

Leitet man den Energiesatz nach dem Weg (hier Höhe) ab, auf der sich der Körper bewegt, so sprechen wir von einem Energiegefälle. Dies entspricht einer verallgemeinerten Kraft (Impulsstrom), die auf den bewegten Körper wirkt. Aus

$$E_{\mathrm{sp}}(h) + E_{\mathrm{kin}}(h) + E_{\mathrm{pot}}(h) = \tfrac{1}{4} D\left[(h - s_1)^2 - \left|h - s_1\right|(h - s_1)\right] + \tfrac{1}{2} m v^2 + mgh$$

folgt der Zusammenhang des Energiegefälles zum Energiestrom in unserem Fall wegen

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dh} &= E'_{\mathrm{sp}}(h) + E'_{\mathrm{kin}}(h) + E'_{\mathrm{pot}}(h)\\ &= \tfrac{1}{2} D\left[(h - s_1) - \left|h - s_1\right|\right] + mvv' + mg\end{aligned}$$

der Energiestrom

$P(t) = \dot{E}(t) = E'(h) \bullet \dot{h}(t) = E'_{\mathrm{sp}}(h) \bullet \dot{h}(t) + E'_{\mathrm{kin}}(h) \bullet \dot{h}(t) + E'_{\mathrm{pot}}(h) \bullet \dot{h}(t)$. Mit $\dot{h}(t) = v$ also

$$P(t) = \tfrac{1}{2} D\left[(h - s_1) - \left|h - s_1\right|\right] \bullet v + \dot{p} \bullet v + mg \bullet v.$$

Der dicke Punkt gibt an, dass wir wie folgt zu rechnen haben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 .$$

Dieses Produkt heißt ***Skalarprodukt***.