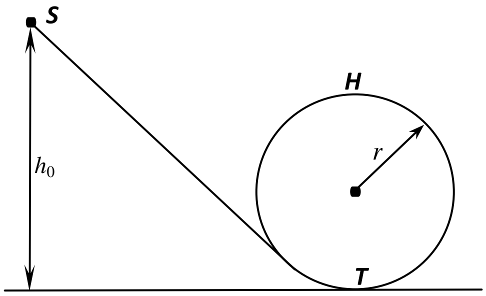
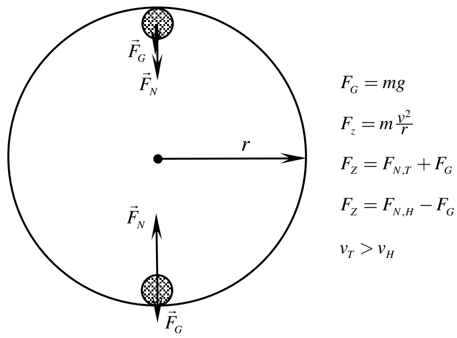
Looping

Der Looping ohne Reibung



Ein Eiswürfel der Masse m, im Folgenden kurz Körper genannt, startet im Punkt ***S*** und rutscht die tangentiale Ebene hinunter und danach durch den vertikalen Looping. Reibung bleibt außen vor, so dass nur konservative Kräfte vorliegen. Betrachten wir typische Fragen.

a) Zeichnen Sie im höchsten Punkt ***H*** und im tiefsten Punkt ***T*** des Loopings alle Kräfte mit ihren Bezeichnungen ein, welche an dem Körper angreifen. Benennen Sie diese und geben Sie die jeweilige Ursache dieser Kraft an.



Erinnerung:

*Die Ursachen der Kräfte sind zum einen die Gravitation $\vec{F}_G$ und zum anderen die Zwangskraft $\vec{F}_N$ (Bedingung der Bahn). Die Zentripetalkraft in **H** und **T** ist $\vec{F}_Z = \vec{F}_N + \vec{F}_G$.*

b) Geben Sie eine kurze Begründung, weshalb der Körper den Looping aus der Höhe $h_0 = 2r$ selbst ohne irgendwelche Reibungsverluste nicht durchrollen kann. Was geschieht in diesem Fall?

*Gemäß Energiesatz wäre die kinetische Energie in **H** gleich groß wie in **S**, also $0\,\mathrm{J}$. Der Körper wäre also in **H** nicht mehr in Bewegung, auch nicht in einer Kreisbewegung. Es ist somit auch keine Zentripetalkraft vorhanden, jedoch wirkt die Gewichtskraft vertikal nach unten. Also fällt der Körper von der Schiene nach unten.*

Allerdings fällt der Körper vor dem Erreichen des höchsten Punktes von der Schiene, da schon vorher die Normalkraft null wird.

c) Wie groß muss die Geschwindigkeit im höchsten Punkt ***H*** mindestens sein, damit der Looping nicht verlassen wird?

Aus $F_Z \geq F_G$ folgt $v \geq \sqrt{gr}$.

d) Der Startpunkt ***S*** wird so gewählt, dass der Körper die Looping-Schiene auch im höchsten Punkt ***H*** noch deutlich berührt ($F_N > 0\,\mathrm{N}$). Aus welcher Höhe h_0 muss der Körper aus der Ruhe folglich starten? (***Tipp: Energieerhaltung***)

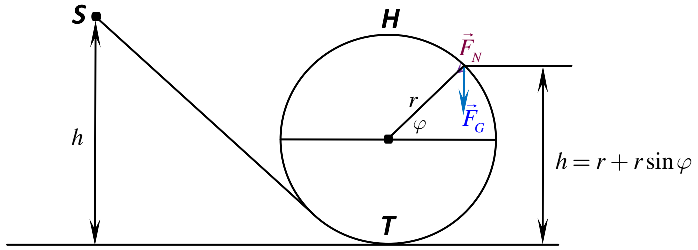
$$E_{pot} + E_{kin} = mgh_0 \Leftrightarrow mgh + \frac{1}{2}mv^2 = mgh_0 \underset{\substack{h=2r \\ v^2>gr \\ c)}}{\Leftrightarrow} g\cdot 2r + \frac{1}{2}gr < gh_0 \Leftrightarrow 4r + r < 2h_0$$

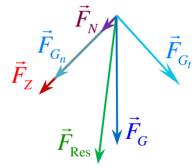
*Die Starthöhe h_0 ist folglich mit $\frac{5}{2}r < h_0$ anzunehmen. Für $\frac{5}{2}r = h_0$ ist $F_N = 0\,\mathrm{N}$ in **H**.*

e) Geben Sie die Kräfte in ***T*** an, die auf den Schienen lasten, wenn die Masse des Körpers 1kg, der Radius des Loopings 10m und die Höhe $h_0 = 30\,\mathrm{m}$ beträgt.

*Die Tangentialgeschwindigkeit in **T** beträgt für $h = 0\,\mathrm{m}$ nach der Energieerhaltung $v^2 = 2gh_0$ und damit die Zentripetalkraft $F_Z = m\frac{v^2}{r} = m\frac{2gh_0}{r} = 6mg$. Die Normalkraft in **T** beträgt $F_{N,T} = F_Z + F_G = 6mg + mg = 7mg$, also $F_{N,T} = 7\cdot 1\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 68{,}67\,\mathrm{N}$.*

Berechnung der Ablösung für den Übergang in den Schiefen Wurf





Die Zerlegung der lokalen Gravitationsbeschleunigung g in die Normal- und Tangentialkomponente zeigt eine negative Beschleunigung auf den Körper, da er aufsteigt. Die Tangente und Normale im „Auflagepunkt" des Körpers kann daher als bewegtes Koordinatensystem betrachtet werden. Die Normalkraft ist eine Zwangskraft, die durch die Unterlage ausgeübt wird.

Der Körper starte nun in einer Höhe $r < h_0 < \frac{5}{2}r$. Er wird die Loopingbahn verlassen, wenn $\vec{F}_N = \vec{0}\,\mathrm{N}$. Berechnen wir die zugehörige Höhe. Dazu wird die dritte Raumkoordinate null gesetzt. Es seien $\vec{F}_{\mathrm{Res}} = \vec{F}_N + \vec{F}_G = m\vec{a}$ und $\vec{F}_Z = pr_{\vec{F}_N}\left(\vec{F}_{\mathrm{Res}}\right) = m\vec{a}_z$. Dann sind

$$\vec{F}_Z = -m\frac{v^2}{r}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix},\ 0<\varphi<\frac{\pi}{2},\ \vec{F}_G = -mg\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\ \text{und}\ \vec{F}_{G_n} = -mg\sin\varphi\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix},$$

also

$$\vec{F}_N = \vec{F}_Z - \vec{F}_{G_n} = -m\frac{v^2}{r}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} + mg\sin\varphi\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} = -m\left(\frac{v^2}{r} - g\sin\varphi\right)\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}.$$

Die Normalkraft ist folglich genau dann null, wenn $\frac{v^2}{r} = g\sin\varphi \Leftrightarrow v^2 = gr\sin\varphi$. Der Energiesatz zeigt, dass $v^2 = 2g\left(h_0 - h\right)$. Folglich ist $r\sin\varphi = 2\left(h_0 - h\right)$ und mit $h = r + r\sin\varphi$ $r\sin\varphi = 2\left(h_0 - r - r\sin\varphi\right) \Leftrightarrow 3r\sin\varphi = 2\left(h_0 - r\right) \Leftrightarrow \sin\varphi = \frac{2}{3}\left(\frac{h_0}{r} - 1\right),\ r \le h_0 \le \frac{5}{2}r$. Somit kann der Winkel φ mittels

$$\varphi = \sin^{-1}\frac{2}{3}\left(\frac{h_0}{r} - 1\right),\ r \le h_0 \le \frac{5}{2}r$$

berechnet werden. Die Grenzfälle $h_0 = r$ liefern $\varphi = 0$ und $h_0 = 2{,}5r$ entsprechend $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Allgemein finden wir die Ablösehöhe und die zugehörige Geschwindigkeit

$$h = r + \frac{2}{3}\left(h_0 - r\right) \qquad v = \sqrt{\frac{2}{3}g\left(h_0 - r\right)}.$$

Dies ist die Anfangsgeschwindigkeit eines schiefen Wurfes in Richtung $\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}$, wobei

$$\varphi = \sin^{-1}\frac{2}{3}\left(\frac{h_0}{r} - 1\right),\ r \le h_0 \le \frac{5}{2}r,\ \text{also}\ v_0 = \sqrt{\frac{2}{3}g\left(h_0 - r\right)}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\left(\frac{h_0}{r} - 1\right)\\ \sqrt{1 - \frac{4}{9}\left(\frac{h_0}{r} - 1\right)^2}\end{pmatrix}.$$

Ein realer Looping muss natürlich zwei Eigenschaften an den Übergangsstellen erfüllen. Die Tangente und die Krümmung müssen übereinstimmen, damit sich Geschwindigkeit und Beschleunigung nicht schlagartig ändern, es sei denn, es ist erwünscht. Die Anforderungen an Tangente und Krümmung sind erfüllt, wenn die ersten beiden Ableitungen übereinstimmen.

Berechnung mit reiner Rotation einer Kugel

Rollt eine Kugel mit Radius $r_K \ll r$ - ohne zu gleiten und zu reiben - mit $\vec{F}_N \neq \vec{0}\,\mathrm{N}$ durch den Looping, so erhalten wir die Mindeststarthöhe $2{,}7r < h_0$, denn

$$\begin{aligned} E_{pot} + E_{kin} + E_{rot} &= mgh_0 \\ mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 &= mgh_0 \\ mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{J}{r_K^2}v^2 &= mgh_0 \wedge J = \frac{2}{5}mr_K^2 \\ mgh + \frac{7}{10}mv^2 &= mgh_0 \\ \underset{\substack{h=2r \\ v^2>gr \\ c)}}{\Leftrightarrow} g\cdot 2r + \frac{7}{10}gr &< gh_0 \Leftrightarrow 2{,}7r < h_0. \end{aligned}$$

Für das Quadrat der Geschwindigkeit folgt $v^2 = \frac{10}{7}g\left(h_0 - h\right)$. Startet nun die Kugel aus der Höhe $h_0 < 2{,}7r$, so errechnet sich der Winkel φ, die Höhe h und die Geschwindigkeit v für $\vec{F}_N = \vec{0}\,\mathrm{N}$ wie folgt.

Mit $v^2 = gr\sin\varphi$ und $h = r + r\sin\varphi$ folgt aus

$$\begin{aligned} gr\sin\varphi &= \frac{10}{7}g\left(h_0 - r - r\sin\varphi\right) \Leftrightarrow \\ \frac{17}{7}r\sin\varphi &= \frac{10}{7}\left(h_0 - r\right) \Leftrightarrow \\ \sin\varphi &= \frac{10}{17}\left(\frac{h_0}{r} - 1\right) \end{aligned}$$

der Winkel

$$\varphi = \sin^{-1}\frac{10}{17}\left(\frac{h_0}{r} - 1\right),$$

die Höhe

$$h = r + \frac{10}{17}\left(h_0 - r\right) = \frac{10}{17}\left(h_0 + \frac{7}{10}r\right)$$

sowie die Geschwindigkeit

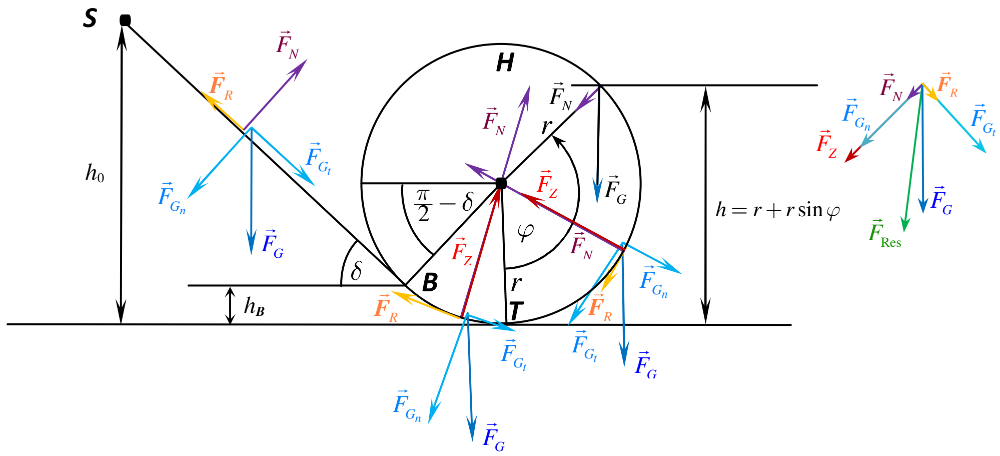
$$v = \sqrt{\frac{10}{17}g\left(h_0 - r\right)}\,.$$

Solange keine Reibung angenommen wird, ist die Lösung immer mit dem Energieerhaltungssatz möglich. In diesem Fall werden nur *konservative Kräfte* betrachtet. Mit Reibung (Dissipation) ist es schwerer, da ein längerer Weg auch mehr Entropie liefert.

Definition
Eine Kraft heißt ***konservativ***, wenn die Bewegung eines Körpers zwischen zwei Punkten A und B ***unabhängig von dem Weg*** zwischen A und B ist. Da die Kraft eine Pfaffsche Form ψ_F ist, folgt auch, dass dies äquivalent ist zu $\oint \psi_F = 0$ oder $d\psi_F = 0$ auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet G. In diesem Fall existiert eine Funktion α mit $d\alpha = \psi_F$. α heißt das zu ψ_F gehörige Potential.

Der Looping mit Reibung

In diesem Fall soll eine Reibung des Eiswürfels, kurz *Körper*, berücksichtigt werden.



Der Reibungskoeffizient sei μ. In diesem seien alle weiteren „Verlustfaktoren" wie Luftreibung, Schallabgabe etc. berücksichtigt. Die Reibungsenergie ist auf dem Geradenstück der Länge $\ell_{\overline{SB}}$ einfach zu berechnen, da sich die Kräfte nicht ändern. Für die Höhe im Looping wird der Zusammenhang $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)=\cos\delta$ berücksichtigt. Der Winkel $\varphi = 0$ beginnt im Tiefpunkt.

Die Beschleunigung des Körpers $m\vec{a}$ ergibt sich aus

$$\vec{F}_N + \vec{F}_R + \vec{F}_G = m\vec{a},$$

wobei $\vec{F}_R = \boldsymbol{\mu}\vec{F}_N$, mit

$$\boldsymbol{\mu} = \mu\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus dieser Darstellung werden die Tangential- und Zentralbeschleunigung, also $\vec{a}_T$ und $\vec{a}_Z$ entnommen. Dazu bieten sich die orthonormalen Einheitsvektoren gebildet aus den Kreiskoordinaten an.

$$\begin{pmatrix} \sin\delta \\ \cos\delta \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -\cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix}$$

Der Energieerhaltungssatz lautet

$$E_{pot} + E_{kin} + E_R = mgh_0,$$

wobei h_0 die Starthöhe ist.

1. Schiefe Ebene von S bis B

Zunächst zu den Kräften. Es gilt

$$\vec{F}_N = mg\cos\delta\begin{pmatrix} \sin\delta \\ \cos\delta \end{pmatrix},\quad \vec{F}_R = \boldsymbol{\mu}\vec{F}_N = mg\cos\delta\,\boldsymbol{\mu}\begin{pmatrix} \sin\delta \\ \cos\delta \end{pmatrix} = \mu mg\cos\delta\begin{pmatrix} -\cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix} \text{ sowie } \vec{F}_G = mg\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\vec{a}_T = \vec{a} = g\cos\delta\begin{pmatrix} \sin\delta \\ \cos\delta \end{pmatrix} + \mu g\cos\delta\begin{pmatrix} -\cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = g\left(\mu\cos\delta - \sin\delta\right)\begin{pmatrix} -\cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist $\vec{a}_T = \vec{0}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Leftrightarrow \delta = \tan^{-1}\mu$. Der Körper muss einen Impuls in ***S*** bekommen.

Die Reibungskraft ist längs des Weges (schiefe Ebene) $\overline{\boldsymbol{SB}}$ konstant. Die Reibungsenergie berechnet sich folglich mit $\vec{s} = \ell_{\overline{SB}} \begin{pmatrix} -\cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix}$ zu

$$E_R = \vec{F}_R \bullet \vec{s} = \mu mg\cos\delta \begin{pmatrix} -\cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix} \bullet \ell_{\overline{SB}} \begin{pmatrix} -\cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix} = \mu mg\,\ell_{\overline{SB}}\cos\delta\,.$$

Mit $\ell_{\overline{SB}}\sin\delta = h_0 - h_{\boldsymbol{B}}$ folgt $E_R = mg\mu(h_0 - h_{\boldsymbol{B}})\cot\delta$. Die Energie und damit die Geschwindigkeit in ***B*** kann jetzt berechnet werden. Sie beträgt

$$\begin{aligned} E_{pot,\boldsymbol{B}} + E_{kin,\boldsymbol{B}} + E_{R,\boldsymbol{B}} &= mgh_0 \\ mgh_{\boldsymbol{B}} + \tfrac{1}{2}mv_{\boldsymbol{B}}^2 + mg\left(h_0 - h_{\boldsymbol{B}}\right)\mu\cot\delta &= mgh_0 \\ \tfrac{1}{2}v_{\boldsymbol{B}}^2 + g\left(h_0 - h_{\boldsymbol{B}}\right)\mu\cot\delta &= g\left(h_0 - h_{\boldsymbol{B}}\right) \\ v_{\boldsymbol{B}}^2 &= 2g\left(h_0 - h_{\boldsymbol{B}}\right)(1 - \mu\cot\delta) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $h_B = r - r\sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = r - r\cos\delta$ folgt endlich die Eintrittsgeschwindigkeit in den Looping

$$v_{\boldsymbol{B}}^2 = 2g\left(h_0 - r + r\cos\delta\right)(1 - \mu\cot\delta)\,.$$

Insbesondere gilt nun ***schlagartig***

$$F_Z = m\frac{v_{\boldsymbol{B}}^2}{r} \text{ mit } \frac{v_{\boldsymbol{B}}^2}{r} = 2g\left(\frac{h_0}{r} - 1 + \cos\delta\right)(1 - \mu\cot\delta)\,.$$

Damit lautet die Beschleunigung in ***B***:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}_Z + \vec{a}_T \\ &= \left(\frac{v_{\boldsymbol{B}}^2}{r} + g\cos\delta\right)\begin{pmatrix} \sin\delta \\ \cos\delta \end{pmatrix} + \left(\frac{v_{\boldsymbol{B}}^2}{r} + g\cos\delta\right)\boldsymbol{\mu}\begin{pmatrix} \sin\delta \\ \cos\delta \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{v_{\boldsymbol{B}}^2}{r} + g\cos\delta\right)\begin{pmatrix} \sin\delta \\ \cos\delta \end{pmatrix} + \mu\left(\frac{v_{\boldsymbol{B}}^2}{r} + g\cos\delta\right)\begin{pmatrix} -\cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix} - g\cos\delta\begin{pmatrix} \sin\delta \\ \cos\delta \end{pmatrix} - g\sin\delta\begin{pmatrix} -\cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{v_{\boldsymbol{B}}^2}{r} + g\cos\delta\right)\begin{pmatrix} \sin\delta \\ \cos\delta \end{pmatrix} - g\cos\delta\begin{pmatrix} \sin\delta \\ \cos\delta \end{pmatrix} + \mu\left(\frac{v_{\boldsymbol{B}}^2}{r} + g\cos\delta\right)\begin{pmatrix} -\cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix} - g\sin\delta\begin{pmatrix} -\cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix} \\ &= \frac{v_{\boldsymbol{B}}^2}{r}\begin{pmatrix} \sin\delta \\ \cos\delta \end{pmatrix} + \left(\mu\left(\frac{v_{\boldsymbol{B}}^2}{r} + g\cos\delta\right) - g\sin\delta\right)\begin{pmatrix} -\cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Looping zwischen B und T

Die Tangentialbeschleunigung $\vec{a}_t$ lautet jetzt

$$\vec{a}_t = \left(\mu\left(\frac{v^2}{r} + g\cos(\delta - \xi)\right) - g\sin(\delta - \xi)\right)\begin{pmatrix} -\cos(\delta - \xi) \\ \sin(\delta - \xi) \end{pmatrix},\ 0 \le \xi \le \delta < \frac{\pi}{2}.$$

Ab dem Punkt ***B*** gilt beim Eintritt in den Looping mit $h_{\boldsymbol{B}} = r - r\cos\delta$ und $v_{\boldsymbol{B}}^2 = 2g\left(h_0 - r + r\cos\delta\right)(1 - \mu\cot\delta)$ der Energieerhaltungssatz

$$E_{pot} + E_{kin} + E_R = mgh_{\boldsymbol{B}} + \tfrac{1}{2}mv_{\boldsymbol{B}}^2\,.$$

Mit

$\vec{F}_G = mg\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{F}_{G_n} = mg\cos(\delta-\xi)\begin{pmatrix} \sin(\delta-\xi) \\ \cos(\delta-\xi) \end{pmatrix}$ und $\vec{F}_{G_t} = \vec{F}_G - \vec{F}_{G_n} = mg\sin(\delta-\xi)\begin{pmatrix} -\cos(\delta-\xi) \\ \sin(\delta-\xi) \end{pmatrix}$,

wobei $0 \le \xi \le \delta$ folgt

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{F}_N + \vec{F}_R + \vec{F}_G \\ &= \vec{F}_Z - \vec{F}_{G_n} + \boldsymbol{\mu}\vec{F}_N + \vec{F}_G \\ &= \vec{F}_Z + \boldsymbol{\mu}\vec{F}_Z - \boldsymbol{\mu}\vec{F}_{G_n} + \vec{F}_{G_t} \\ &= m\tfrac{v^2}{r}\begin{pmatrix} \sin(\delta-\xi) \\ \cos(\delta-\xi) \end{pmatrix} + \mu m\left(\tfrac{v^2}{r} + g\sin(\delta-\xi) + g\cos(\delta-\xi)\right)\begin{pmatrix} -\cos(\delta-\xi) \\ \sin(\delta-\xi) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also gilt $\vec{F}_R = \boldsymbol{\mu}\vec{F}_N = m\left(\tfrac{v^2}{r} + g\cos(\delta-\xi)\right)\begin{pmatrix} -\cos(\delta-\xi) \\ \sin(\delta-\xi) \end{pmatrix}$. Folglich ist mit der Reibungsenergie $E_R = F_R \cdot b_\xi = \mu F_N \cdot b_\xi = \mu m\left(\tfrac{v^2}{r} + g\cos(\delta-\xi)\right) r\xi$ und der Höhe $h = r - r\cos(\delta-\xi)$ der Energieerhaltungssatz

$$\begin{aligned} E_{pot} + E_{kin} + E_R &= mgh_{\boldsymbol{B}} + \tfrac{1}{2}mv_{\boldsymbol{B}}^2 \\ mgh + \tfrac{1}{2}mv^2 + \left(\mu m\tfrac{v^2}{r} + \mu mg\cos(\delta-\xi)\right)r\xi &= mgh_{\boldsymbol{B}} + \tfrac{1}{2}mv_{\boldsymbol{B}}^2 \\ 2gh + v^2(1+2\mu\xi) + 2\mu gr\xi\cos(\delta-\xi) &= 2gh_{\boldsymbol{B}} + v_{\boldsymbol{B}}^2 \\ v^2(1+2\mu\xi) + 2g\left(r - r\cos(\delta-\xi)\right) + 2\mu gr\xi\cos(\delta-\xi) &= 2g(r - r\cos\delta) \\ &\quad +2g(h_0 - r + r\cos\delta)(1-\mu\cot\delta) \\ v^2(1+2\mu\xi) + 2gr(\mu\xi-1)\cos(\delta-\xi) &= -2gr\cos\delta \\ &\quad +2g(h_0 - r + r\cos\delta)(1-\mu\cot\delta) \end{aligned}$$

Für $h = 0\,\text{m}$ und $\xi = \delta$ folgt mit $E_R = F_R \cdot b_\delta = \mu F_N = \mu m\left(\tfrac{v^2}{r} + g\right)r\delta$ die Energiegleichung

$$\begin{aligned} v_{\boldsymbol{T}}^2(1+2\mu\delta) + 2gr(\mu\delta-1) &= -2gr\cos\delta + 2g(h_0 - r + r\cos\delta)(1-\mu\cot\delta) \\ v_{\boldsymbol{T}}^2(1+2\mu\delta) &= 2gh_0 - 2\mu g(h_0 - r)\cot\delta - 2\mu gr\delta \\ v_{\boldsymbol{T}}^2(1+2\mu\delta) &= 2gh_0(1-\mu\cot\delta) + 2\mu gr(\cot\delta - \delta) \\ v_{\boldsymbol{T}}^2 &= 2g\frac{h_0(1-\mu\cot\delta) + \mu r(\cot\delta-\delta)}{1+2\mu\delta} \end{aligned}$$

Aufgrund der Reibung muss die Tangentialbeschleunigung $\vec{a}_t$ spätestens jetzt in diesem Intervall vor $\boldsymbol{T}$ verschwinden. Aus der Tangentialbeschleunigung

$$\vec{a}_t = \left(\mu\left(\tfrac{v^2}{r} + g\cos(\delta-\xi)\right) - g\sin(\delta-\xi)\right)\begin{pmatrix} -\cos(\delta-\xi) \\ \sin(\delta-\xi) \end{pmatrix},\; 0 \le \xi \le \delta < \tfrac{\pi}{2}$$

folgt

$$\mu\left(\tfrac{v^2}{r} + g\cos(\delta-\xi)\right) - g\sin(\delta-\xi) = 0 \Leftrightarrow \mu v^2 = gr\sin(\delta-\xi) - \mu gr\cos(\delta-\xi),\; 0 \le \xi \le \delta < \tfrac{\pi}{2}.$$

Mit der Zentripetalbeschleunigung

$$\frac{v^2}{r} = 2g\frac{\left(\frac{h_0}{r} - 1 + \cos\delta\right)(1-\mu\cot\delta) - \cos\delta - (\mu\xi - 1)\cos(\delta-\xi)}{1+2\mu\xi}$$

folgt endlich

$$\begin{aligned}
2g\mu\left(\left(\tfrac{h_0}{r} - 1 + \cos\delta\right)(1-\mu\cot\delta) - \cos\delta - (\mu\xi-1)\cos(\delta-\xi)\right) &= (1+2\mu\xi)\left(g\sin(\delta-\xi) - \mu g\cos(\delta-\xi)\right)\\
2\mu\left(\left(\tfrac{h_0}{r} - 1 + \cos\delta\right)(1-\mu\cot\delta) - \cos\delta\right) &= (1+2\mu\xi)\left(\sin(\delta-\xi) - \mu\cos(\delta-\xi)\right)\\
&\quad + 2\mu(\mu\xi-1)\cos(\delta-\xi)\\
2\mu\left(\left(\tfrac{h_0}{r} - 1\right)(1-\mu\cot\delta) - \mu\sin\delta\right) &= (1+2\mu\xi)\sin(\delta-\xi) + \mu(2\mu\xi-3)\cos(\delta-\xi)
\end{aligned}$$

Diese letzte nichtlineare Gleichung muss für ξ gelöst werden. Insbesondere bestätigen noch einmal die letzten Gleichungen für $\mu = 0$ (keine Reibung vorhanden), dass $v_{\boldsymbol{T}}^2 = 2gh_0$ und $v_{\boldsymbol{B}}^2 = 2g(h_0 - r + r\cos\delta)(1-\mu\cot\delta)$.

3. Looping zwischen T und H

Der Körper startet nun mit der Geschwindigkeit $v_{\boldsymbol{T}}$, um den Looping zu erklimmen. Mit

$$\vec{F}_G = mg\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \vec{F}_{G_n} = mg\cos\varphi\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \quad\text{und}\quad \vec{F}_{G_t} = \vec{F}_G - \vec{F}_{G_n} = mg\sin\varphi\begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad\text{wobei}\quad 0 \le \varphi \le \pi$$

folgt

$$\begin{aligned}
m\vec{a} &= \vec{F}_N + \vec{F}_R + \vec{F}_G\\
&= \vec{F}_Z - \vec{F}_{G_n} + \boldsymbol{\mu}\vec{F}_N + \vec{F}_G\\
&= \vec{F}_Z + \boldsymbol{\mu}\vec{F}_Z - \boldsymbol{\mu}\vec{F}_{G_n} + \vec{F}_{G_t}\\
&= m\frac{v^2}{r}\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} + \mu m\left(\frac{v^2}{r} + g\sin\varphi + g\cos\varphi\right)\begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Also gilt $\vec{F}_R = \boldsymbol{\mu}\vec{F}_N = m\left(\frac{v^2}{r} + g\cos\varphi\right)\begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$. Folglich ist mit der Reibungsenergie $E_R = F_R \cdot b_\varphi = \mu F_N \cdot b_\varphi = \mu m\left(\frac{v^2}{r} + g\cos\varphi\right)r\varphi$ und der Höhe $h = r - r\cos\varphi$ der Energieerhaltungssatz

$$mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \mu m\left(\frac{v^2}{r} + g\cos\varphi\right)r\varphi = \frac{1}{2}mv_{\boldsymbol{T}}^2,$$

wobei

$$v_{\boldsymbol{T}}^2 = 2g\frac{h_0(1-\mu\cot\delta) + \mu r(\cot\delta - \delta)}{1+2\mu\delta}.$$

Nach kürzen der Masse

$$2gh + v^2 + 2\mu\left(\frac{v^2}{r} + g\cos\varphi\right)r\varphi = v_{\boldsymbol{T}}^2.$$

Nun können folgende Fragen beantwortet werden.

Aus welcher Höhe muss der Körper starten, damit er den höchsten Punkt ***H*** ohne herunter zu fallen durchrutscht? Im höchsten Punkt ***H*** muss natürlich $v^2 \geq gr$ gelten. Außerdem ist $\varphi = \pi$. Einsetzen liefert

$$2gh + v^2 + 2\mu\left(\tfrac{v^2}{r} + g\cos\varphi\right)r\varphi = 2g\,\frac{h_0(1-\mu\cot\delta) + \mu r(\cot\delta - \delta)}{1+2\mu\delta}$$

$$2g\cdot 2r + gr + 2\mu(g-g)r\pi = 2g\,\frac{h_0(1-\mu\cot\delta) + \mu r(\cot\delta - \delta)}{1+2\mu\delta}$$

$$2{,}5r(1+2\mu\delta) - \mu r(\cot\delta - \delta) = h_0(1-\mu\cot\delta)$$

$$h_0 = r\,\frac{2{,}5 + \mu(6\delta - \cot\delta)}{1-\mu\cot\delta}$$

Der Eiswürfel muss nun aus der Höhe

$$h_0 = r\,\frac{2{,}5 + \mu(6\delta - \cot\delta)}{1-\mu\cot\delta}$$

starten, damit er im Looping bleibt.

Auch die Frage: „In welcher Höhe geht der Eiswürfel in den Schiefen Wurf über, wenn er unterhalb der gerade errechneten Höhe startet?“ kann nun beantwortet werden. Wir bleiben allgemeiner!

Natürlich müssen $F_N = m\left(\tfrac{v^2}{r} + g\cos\varphi\right) = 0 \Leftrightarrow v^2 = -gr\cos\varphi,\ \tfrac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ und $h = r(1-\cos\varphi)$ sein. Mit Hilfe des Energieerhaltungssatz

$$mgh + \tfrac{1}{2}mv^2 + \mu m\left(\tfrac{v^2}{r} + g\cos\varphi\right)r\varphi = mg\,\frac{h_0(1-\mu\cot\delta) + \mu r(\cot\delta - \delta)}{1+2\mu\delta}$$

folgt

$$2gr(1-\cos\varphi) - gr\cos\varphi = 2g\,\frac{h_0(1-\mu\cot\delta) + \mu r(\cot\delta - \delta)}{1+2\mu\delta}$$

$$\cos\varphi = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\,\frac{h_0(1-\mu\cot\delta) + \mu r(\cot\delta - \delta)}{(1+2\mu\delta)r}$$

und damit ***der Winkel***

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\,\frac{h_0(1-\mu\cot\delta) + \mu r(\cot\delta - \delta)}{(1+2\mu\delta)r}\right).$$

Die ***Höhe*** ist mit $h = r(1-\cos\varphi)$ folglich

$$h = \frac{1}{3}\mathrm{LE} - \frac{2}{3}\,\frac{h_0(1-\mu\cot\delta) + \mu r(\cot\delta - \delta)}{1+2\mu\delta} = \frac{1}{3}\mathrm{LE} - \frac{2}{3}\,\frac{h_0 - \mu r\delta + \mu\cot\delta(r - h_0)}{1+2\mu\delta}.$$

Bleibt nur noch die ***Geschwindigkeit*** $v^2 = -gr\cos\varphi$. Sie beträgt

$$v=\sqrt{\frac{2}{3}g\left(\frac{h_0(1-\mu\cot\delta)+\mu r(\cot\delta-\delta)}{1+2\mu\delta}-r\right)}.$$

Auch in diesem Fall beginnt ein schiefer Wurf in Richtung $\begin{pmatrix}-\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$.

Rollende Kugel

Im Fall einer Kugel beginnen Sie mit

$$mgh+\frac{7}{10}mv^2+E_R=mgh_0.$$

Folgen Sie den Schritten des Eiswürfels.

Realer Looping

Ein realer Looping sollte folgende Anforderungen an den Übergängen erfüllen.

1. Links- und rechtsseitige Ableitungen (Tangenten) und
2. die Krümmungen

stimmen überein.
Der Krümmungsradius[1] $r(x)$ wird durch

$$r(x)=\left|\frac{\sqrt{\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)^3}}{f''(x)}\right|$$

beschrieben, wobei f eine beliebige Funktion ist. Dies wird in der Analysisvorlesung oder in einer Übung dazu gezeigt.

Warum werden bei einem Parabelstück immer der Scheitelpunkt und der Fußpunkt (unterster Punkt des Loopings) als Übergang gewählt?

Abschließende Bemerkung

Zum besseren Verständnis wird neben dem Energieerhaltungssatz gleichzeitig dessen Energiestrom (Leistung) betrachtet.

$$E_{pot}+E_{kin}+E_R=E_0 \qquad \text{und} \qquad \dot{E}_{pot}+\dot{E}_{kin}+\dot{E}_R=0$$

Hierbei wird ersichtlich, dass gleichzeitig die Energie von der potentiellen Energie zur kinetischen und dissipativen Energie strömt, denn in beiden erscheint v^2. Deshalb kann in diesem relativ einfachen Fall auf ein Integral verzichtet werden. Beim Aufstieg in dem Looping nimmt die potentielle Energie zu und die kinetische Energie ab.

$$\dot{E}_{pot}+\dot{E}_{kin}+\dot{E}_R=0$$

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Kr%C3%BCmmungskreis