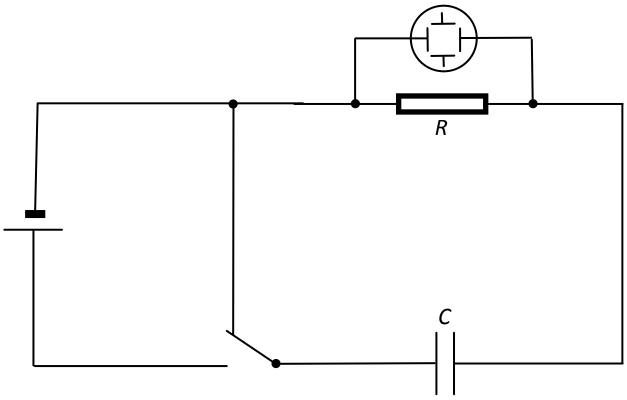
Laden und Entladen eines Kondensators



1. Ladevorgang

Zunächst wird der Schalter umgelegt, so dass die Spannungsquelle angeschlossen ist. Dabei wird der Kondensator als kurzgeschlossen betrachtet, so dass der Ladestrom $I_0 = \frac{U_0}{R}$ im Augenblick des Einschaltens fließt. Stellen wir die Energiebilanz auf.

Der Energieerhaltungssatz liefert

$$E_C(t) + E_R(t) + E_{Batt}(t) = 0.$$

Durch Differenzieren erhalten wir den Energiestrom. Beachte, dass in der Spannungsquelle der Energiestrom in die umgekehrte Richtung strömt (aktive Quelle). Also

$$\begin{aligned}\dot{E}_C(t) + \dot{E}_R(t) + \dot{E}_{Batt}(t) = 0 &\Leftrightarrow CU_C(t)\dot{U}_C(t) + U_R(t)I_R(t) - U_0 I_R(t) = 0\\ &\Leftrightarrow Q(t)\frac{\dot{Q}(t)}{C} + RI_R^2(t) - U_0 I_R(t) = 0\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{Q(t)}{C} + RI_R(t) - U_0\right) I_R(t) = 0.\end{aligned}$$

Diese letzte Gleichung gilt nach dem Einschalten für alle Zeiten. Folglich muss die Klammer für alle Zeiten verschwinden. Dies erzwingt nach nochmaligem Differenzieren der Klammer

$$I(t) + RC\dot{I}(t) \equiv 0 \Leftrightarrow \dot{I}(t) + \frac{1}{RC} I(t) \equiv 0.$$

Eine Lösung ist $I(t) = I_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$, wobei $RI_0 = U_0$. Für die Spannung über den Widerstand folgt $U_R(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$ und damit die Spannung über den Kondensator nach Kirchhoff (Maschenregel) $U_0 = U_C(t) + U_R(t)$:

$$\boxed{U_C(t) = U_0\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right).}$$

Diese Gleichung soll nun direkt hergeleitet werden. Dazu betrachten wir noch einmal die Gleichung

$$CU_C(t)\dot{U}_C(t) + U_R(t)I_R(t) - U_0 I_R(t) = 0.$$

Beschreiben wir den Ladungsstrom durch die Spannung am Widerstand.

$$CU_C(t)\dot{U}_C(t) + \frac{1}{R}U_R(t)U_R(t) - \frac{1}{R}U_0 U_R(t) = 0 \Leftrightarrow U_C(t)\dot{U}_C(t) + \frac{1}{CR}U_R(t)\left(U_R(t) - U_0\right) = 0$$

Nun gilt aber nach Kirchhoff (Maschenregel) $U_0 = U_C(t) + U_R(t)$. Eliminieren wir $U_R(t)$, so folgt

$$U_C(t)\dot{U}_C(t) + \frac{1}{CR}\left(U_C(t) - U_0\right)U_C(t) = 0 \Leftrightarrow \left(\dot{U}_C(t) + \frac{1}{RC}\left(U_C(t) - U_0\right)\right)U_C(t) = 0.$$

Wieder muss die Klammer für alle Zeiten verschwinden. Folglich gilt $\dot{U}_C(t) + \frac{1}{RC}\left(U_C(t) - U_0\right) = 0.$ Wir erhalten eine inhomogene DGL 1. Ordnung,

$$\dot{U}_C(t) + \frac{1}{RC}U_C(t) = \frac{1}{RC}U_0.$$

Die Überprüfung mit der Lösung $U_C(t) = U_0\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$ zeigt, dass diese DGL auch richtig ist.

2. *Entladevorgang*

Der Kondensator ist aufgeladen und besitzt das Potentialgefälle $U_C = U_0$. Zum Entladen wird der Schalter wieder umgelegt, damit sich das Potentialgefälle über den Widerstand ausgleichen kann. Es gilt somit nach dem Energieerhaltungssatz

$$E_C(t) + E_R(t) = 0.$$

Durch Differenzieren erhalten wir wieder den Energiestrom. Also

$$\dot{E}_C(t) + \dot{E}_R(t) = 0 \Leftrightarrow CU_C(t)\dot{U}_C(t) + U_R(t)I_R(t) = 0 \Leftrightarrow CU_C(t)\dot{U}_C(t) + \frac{1}{R}U_R^2(t) = 0$$
$$\Leftrightarrow CU_C(t)\dot{U}_C(t) + \frac{1}{R}U_C^2(t) = 0 \Leftrightarrow \left(\dot{U}_C(t) + \frac{1}{CR}U_C(t)\right)U_C(t) = 0.$$

Außerdem haben wir Kirchhoff $U_C(t) + U_R(t) = 0$ bemüht. Wir erhalten die DGL

$$\dot{U}_C(t) + \frac{1}{CR}U_C(t) = 0$$

mit der Lösung

$$\boxed{U_C(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}.}$$

Aus dieser Lösung erhält man leicht das Potentialgefälle am Widerstand und über Ohm den Entladestrom. Dies überlasse ich als Übungsaufgabe.

Nachbetrachtung

Die Annahme, dass der Kondensator einen Kurzschluss im Augenblick des Einschaltens darstellt, ist natürlich nicht gerechtfertigt. Begründet wird er durch einen sogenannten „Verschiebungsstrom“, der in Ermangelung des Verstehens eingeführt wurde und noch heute durch die Physikvorlesungen und –bücher geistert und sein Unwesen treibt. Da ein Ladungsstrom niemals direkt gemessen werden kann, ist auch die DGL des Energiestroms nur von theoretischer Bedeutung. Selbst bei einem Kondensator ohne Dielektrikum in Vakuum beobachten wir einen solchen Ladevorgang. Möglicherweise findet eine Wechselwirkung mit dem Raum statt. Leider bis heute noch nicht erforscht. Normalerweise sollte der Kondensator „sofort“ die Spannung U_0 und damit das volle elektrische Feld tragen, da sich das elektrische Feld längs (also außerhalb) der Leitung mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. In der Energiebilanz des Ladens und Entladens wird grundsätzlich die Energie $\frac{1}{2}CU_0$ im Widerstand in Wärme verbrannt. Ohne Widerstand wird es komplizierter.