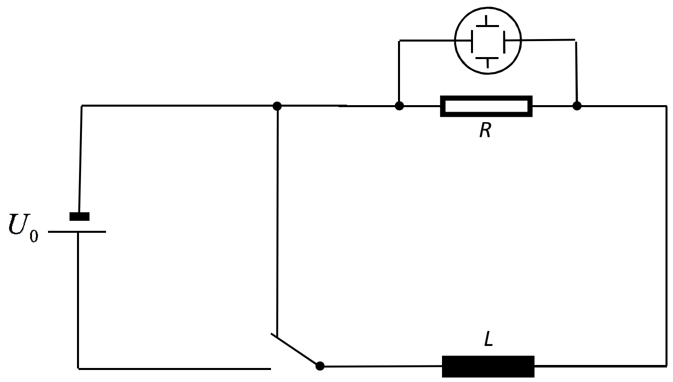
Laden und Entladen einer Spule



1. Ladevorgang

Zunächst wird der Schalter umgelegt, so dass die Spannungsquelle angeschlossen ist. Dabei wird die Spule mit unendlich großem Widerstand betrachtet, so dass kein Ladestrom im Augenblick des Einschaltens fließt. Stellen wir die Energiebilanz auf.

Der Energieerhaltungssatz liefert

$$E_L(t) + E_R(t) + E_{Batt}(t) = 0.$$

Durch Differenzieren erhalten wir den Energiestrom. Beachte, dass in der Spannungsquelle der Energiestrom in die umgekehrte Richtung strömt (aktive Quelle). Also

$$\dot{E}_L(t) + \dot{E}_R(t) + \dot{E}_{Batt}(t) = 0 \Leftrightarrow LI_L(t)\dot{I}_L(t) + U_R(t)I_R(t) - U_0 I_R(t) = 0.$$

Da es nur einen Ladungsstrom gibt, können wir auf die Indizes verzichten. Wir erhalten

$$\left(L\dot{I}(t) + U_R(t) - U_0\right)I(t) = 0.$$

Diese letzte Gleichung gilt nach dem Einschalten für alle Zeiten. Folglich muss die Klammer für alle Zeiten verschwinden.

$$L\dot{I}(t) + RI(t) - U_0 \equiv 0 \Leftrightarrow \dot{I}(t) + \tfrac{R}{L}I(t) \equiv \tfrac{R}{L}I_0.$$

Eine Lösung ist durch $I(t) = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$ gegeben. Für die Spannung über den Widerstand folgt damit $U_R(t) = U_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$. Die Spannung über der Spule folgt aus der Maschenregel nach Kirchhoff $U_0 = U_L(t) + U_R(t)$ zu

$$\boxed{U_L(t) = U_0 e^{-\frac{R}{L}t}.}$$

Natürlich ist die Spannung über der Spule nach großer Zeit ***nicht null***, da sie einen realen Widerstand besitzt.

Der Quotient $\tau = \frac{L}{R}$ heißt Zeitkonstante des Systems. Die Änderung der Ladungsstromstärke im Augenblick des Einschaltens ist unabhängig vom Widerstand. Sie beträgt $\dot{I}(t=0) = \frac{U_0}{L}$.

2. *Entladevorgang*

Die Magnetfelddichte der Spule ist nun aufgebaut und besitzt daher die Energie, die den Strom nach Abschalten der Spannungsquelle bzw. Umlegen des Schalters durch Induktion weiter antreibt. Es gilt somit nach dem Energieerhaltungssatz

$$E_L(t) + E_R(t) = 0.$$

Durch Differenzieren erhalten wir wieder den Energiestrom. Also

$$\dot{E}_L(t) + \dot{E}_R(t) = 0 \Leftrightarrow LI_L(t)\dot{I}_L(t) + U_R(t)I_R(t) = 0 \underset{I_L = I_R = I}{\Leftrightarrow} \left(L\dot{I}(t) + RI(t)\right)I(t) = 0.$$

Da die Gleichung für alle Zeiten erfüllt sein muss, verschwindet wieder die Klammer, also

$$\dot{I}(t) + \frac{R}{L}I(t) \equiv 0.$$

Eine Lösung kennen wir bereits

$$\boxed{I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t},}$$

wobei $U_0 = RI_0$. Aus dieser Lösung erhält man leicht das Potentialgefälle am Widerstand. Dies überlasse ich als Übungsaufgabe.

Nachbetrachtung

Da im Augenblick des Umschaltens der Stromkreis unterbrochen ist, wäre der Widerstand unendlich groß, könnte also zu einem Überschlag führen. Dies kann durch einen Ableitwiderstand über dem Umschaltkontakt verhindert werden. Der Leser ist aufgefordert den realen Fall zu untersuchen, wenn also die Spule einen Widerstand besitzt.