

Doppler-Effekt¹

Jeder kennt diesen Effekt. Eine Schallquelle sendet ein Signal aus. Kommt die Quelle auf einen Beobachter zu, erscheint der Ton höher; entfernt sich die Quelle, ist der Ton tiefer. Beides im Vergleich zu demselben Ton einer stehenden Quelle. Dabei hängt die wahrgenommene Tonhöhe von der Geschwindigkeit der bewegten Schallquelle ab. Schon hier taucht ein erstes Problem auf. Eine **Geschwindigkeit ist immer relativ**, benötigt daher einen **Referenzpunkt**. Dies ist natürlich in allen Veränderungen so. Leider wird nicht immer expressiv verbis darauf verwiesen, sondern durch ein Δ verschleiert. Manchmal werden auch absolute Größen angegeben, obwohl nur eine Veränderung vorliegt. Als Beispiel seien hier Energien genannt.

In den meisten Abhandlungen² wird verschwiegen, welche Schwierigkeiten zu beachten sind. Meistens wird so getan als ob die zu ermittelnden Daten ohne Probleme exakt zu ermitteln seien. Hierzu ein simples Beispiel.

Sonnen, die tausende von Lichtjahren entfernt sind, werden beobachtet und aus der Rot- oder Violett- bzw. Blauverschiebung auf Bewegungen geschlossen. Dabei

- muss diese Sonne gar nicht mehr existieren,
- muss die genaue Richtung und Größe der Geschwindigkeit der Sonne bekannt sein,
- darf sich die Lichtgeschwindigkeit während der Reise nicht ändern,
- usw.

Selbst bei dem einfachen Schall sind die genauen Geschwindigkeiten, die Wege der bewegten Sender und Empfänger sowie die Zeitpunkte der Aussendung des Signals und Empfang dieses Signals zu kennen, damit die Orte der bewegten Senders und Empfängers zu bestimmen sind. Ansonsten kann nur geschlossen werden, ob sich die sendende Quelle entfernt oder auf mich zubewegt.

Untersuchen wir verschiedene Situationen, um die Problematiken aufzuzeigen. Den Fall, dass Sender und Empfänger identisch sind und es einen virtuellen Sender wie beim Radar gibt, behandeln wir am Schluss.

Einfache Zusammenhänge zwischen Wellenlänge, Frequenz und Geschwindigkeit

Nehmen wir einmal an, ein ruhendes Fahrzeug sendet einen Ton konstanter Lautstärke und gleicher Frequenz durch ein Signalhorn aus. Der orthogonale Abstand zweier Verdichtungen (Wellenfronten) ist als die **Wellenlänge** λ mit der Einheit $[\lambda] = 1\text{m}$ definiert. Die Anzahl der Wellenlängen pro Sekunde als **Frequenz**. Vgl. auch **Seite 14 ,Die Schallwelle'**.

Ist v die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer und damit jeder Verdichtung, sowie T die Zeit, in der eine Verdichtung um eine Wellenlänge gewandert ist, so gilt der Zusammenhang

$$vT = \lambda \Leftrightarrow v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \text{ und } fT = 1.$$

Hierbei bezeichnet f die Frequenz mit der Einheit $[f] = 1\text{s}^{-1}$, genauer ist hier die Frequenz als die Anzahl der Schwingungen der Luftmoleküle an einer festen Stelle pro Sekunde definiert. Da wir nur die Wellenfronten wahrnehmen, ist diese Aussage davon unabhängig, ob sich das Fahrzeug bewegt oder nicht. Selbst wenn wir ein bewegtes Fahrzeug sehen, können wir nicht entscheiden, ob gerade dieses Fahrzeug einen Ton aussendet.

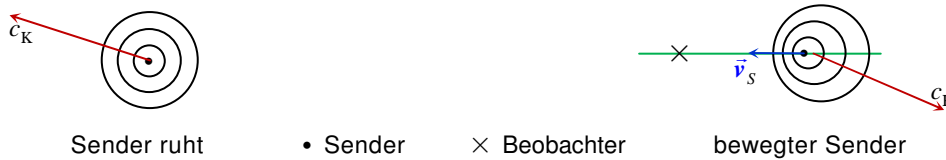
¹ Christian Andreas Doppler: (* 29.11.1803 in Salzburg; † 17.3.1853 in Venedig), österreichischer Mathematiker und Physiker.

² <https://de.wikipedia.org/wiki/Doppler-Effekt>

Die Schallgeschwindigkeit³ bei konstanter Temperatur und Luftdichte wird mit c_K bezeichnet. Sie wird gegen die ruhende Erdoberfläche gemessen.

Beispiel $c_{15^\circ\text{C}} = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Sie ist auch von der Luftfeuchtigkeit abhängig.

Steht das sendende Fahrzeug, so ist in allen Richtungen – Kugelwelle vorausgesetzt – der Abstand der Wellenfronten gleich, da das Zentrum ruht. Bewegt sich der Sender, so gibt es nur zwei orthogonale Abstände, nämlich in Fahrt- und Gegenfahrtrichtung.



Wir wollen nun anhand einfacher Bewegungen den Doppler-Effekt behandeln, um daraus den allgemeinen Fall abzuleiten. Dabei setzen wir f_K , c_K und λ_K als bekannte Laborwerte voraus. Die Verbindungsgerade von Sender und Empfänger bezeichne ich mit SE , die Strecke mit \overline{SE} , die Länge der Strecke mit $|\overline{SE}|$ und den Verbindungsvektor mit \overrightarrow{SE} sowie deren Länge mit $\|\overrightarrow{SE}\|$.

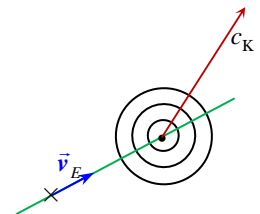
In den verschiedenen Systemen wird die Geschwindigkeit c_K gleich gemessen bzw. berechnet.

$$c_K = \frac{\lambda_K}{T_K} = \frac{\lambda_S}{T_S} = \frac{\lambda_E}{T_E} \quad \text{bzw.} \quad c_K = \lambda_K f_K = \lambda_S f_S = \lambda_E f_E$$

Es genügt daher die Wellenlängen und Frequenzen anzugeben. Wir setzen $\lambda_S = \lambda_K$, $f_S = f_K$.

1. Der Sender ruht, der Empfänger bewegt sich gleichförmig auf SE

Sender (Fahrzeug, Stern) und ruhender Empfänger (Beobachter) befinden sich auf einer gemeinsamen Geraden. Dies ist der einfachste Fall, da konstante Wellenlängen durchquert werden. Der Empfänger durchquert die Strecke der Wellenlänge λ_K mit der Relativgeschwindigkeit $c_K \pm v_E$. Dabei wird die Zeit T_E gemessen. Beim Pluszeichen bewegt sich der Empfänger auf den Sender zu. Beim Minuszeichen vom Sender fort. Folglich gilt



$$\lambda_K = (c_K \pm v_E) T_E.$$

Mit den Grundgleichungen $\lambda_K = c_K T_K$ und $Tf = 1$ sowie $\lambda_E = c_K T_E$ folgen die Relationen

$$\lambda_E = \lambda_K \frac{1}{1 \pm \frac{v_E}{c_K}} \quad \text{und} \quad f_E = f_K \left(1 \pm \frac{v_E}{c_K} \right).$$

Wegen $\frac{\lambda_K}{\lambda_E} = \frac{f_E}{f_K}$ genügt es sich eine Formel zu merken.

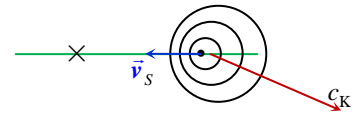
Alle Daten sind bekannt. λ_K sowie c_K werden vorher bestimmt und als konstant angenommen. Die Geschwindigkeit v_E , die Wellenlänge λ_E und die Frequenz f_E werden im Empfänger gemessen. Die Formeln können somit im Experiment bestätigt werden.

³ <https://de.wikipedia.org/wiki/Schallgeschwindigkeit>

2. Der Empfänger ruht, der Sender bewegt sich gleichförmig auf SE

Sender und ruhender Empfänger befinden sich wieder auf einer gemeinsamen Geraden. Eine konstante Geschwindigkeit des Senders wird a priori vorausgesetzt. Diese Situation ist schwieriger.

Der Sender bewege sich gleichförmig mit der Relativgeschwindigkeit v_S auf den ruhenden Empfänger zu und sende Schallwellen der Geschwindigkeit c_K aus. Da der Sender hinter seinen gesendeten Wellenfronten herfährt, erscheinen die Fronten dem Empfänger in kürzeren Zeiten. Die Schallgeschwindigkeit hat sich natürlich nicht verändert.



Die neue Wellenlänge (Stauchung) λ_E ist folglich die Differenz der Wellenlänge der Ruhe λ_K und der Verkürzung $v_S T_K$, die Länge, die das Fahrzeug in der Zeit T_K weitergefahren ist.

$$\lambda_E = \lambda_K - v_S T_K$$

Mit $\lambda_K = c_K T_K$ und $\lambda_E = c_K T_E$ erhalten wir $c_K T_E = \lambda_E = (c_K - v_S) T_K = (c_K - v_S) \frac{\lambda_K}{c_K}$, also

$$\lambda_E = \lambda_K \left(1 - \frac{v_S}{c_K}\right) \quad \text{und} \quad f_E = f_K \frac{1}{1 - \frac{v_S}{c_K}}.$$

In Gegenrichtung (Dehnung der Wellenlänge) ergibt sich $\lambda_E = (c_K + v_S) T_K$. Es wird also v_S durch $-v_S$ ersetzt. Folglich sind in diesem Fall

$$\lambda_E = \lambda_K \left(1 + \frac{v_S}{c_K}\right) \quad \text{und} \quad f_E = f_K \frac{1}{1 + \frac{v_S}{c_K}}.$$

Eine andere Betrachtungsweise ist, wie unter 1. geschehen, über die Relativgeschwindigkeit möglich. Da der Sender hinter seinem gesendeten Signal hinterherfährt, beträgt die Relativgeschwindigkeit des Signals in Fahrtrichtung bezüglich der Antenne $c_K - v_S$; in Gegenfahrtrichtung $c_K + v_S$. Weil nach jeder Zeit T_K eine Wellenfront gesendet wird, beträgt die an der Empfangsstation gemessene Wellenlänge $\lambda_E = (c_K - (\pm v_S)) T_K = (c_K \mp v_S) T_K$. Da der Empfänger nicht weiß, ob sich der Sender bewegt oder nicht, wird dort für die Schallgeschwindigkeit c_K der Zusammenhang $\lambda_E = c_K T_E$ oder $c_K = \lambda_E f_E$ gemessen. Mit der Grundgleichung $\lambda_K = c_K T_K$ folgen wieder die von der Zeit unabhängigen gefundenen Gleichungen.

$$\lambda_E = \lambda_K \left(1 \mp \frac{v_S}{c_K}\right) \quad \text{und} \quad f_E = f_K \frac{1}{1 \mp \frac{v_S}{c_K}}.$$

Das Minuszeichen gilt für die Messung in Fahrtrichtung.

An dieser Stelle erkennen wir sofort, dass es einen Unterschied macht, ob eine Wellenlänge vom Empfänger durchfahren wird und der Sender ruht oder ob der Sender hinter seiner eigenen Welle herfährt und der Empfänger ruht.

Was leisten diese Gleichungen, was leisten sie nicht?

Diese Gleichungen gelten nur, wenn sich Sender und Empfänger während der Bewegung immer auf der Verbindungsgeraden SE befinden.

Der Abstand $|\overline{SE}|$ zwischen Sender und Empfänger kann nicht bestimmt werden, damit auch nicht die Laufzeit des Signals für diese Strecke. Die Formeln bleiben Relationen.

Sind z. B. die Frequenzen f_E (gemessen) und f_K, c_K (Laborwerte) bekannt, so kann die Geschwindigkeit v_S berechnet werden.

Natürlich kann auch mittels Referenzsignal (Radiowelle) die Geschwindigkeit v_S mitgeteilt werden. In dem Rahmen der Messgenauigkeit spielt die Laufzeit des Referenzsignals mit der Geschwindigkeit ca. $300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ gegen $0,34 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ eine untergeordnete Rolle. Die Formeln wären damit auf Richtigkeit zu prüfen. Eine weitere Ausnahme ist die virtuelle Sichtweise durch Radar. Hier wird das Signal gesendet und die reflektierte Welle als gesendet interpretiert. Ich komme in den Anwendungen darauf zurück.

Bei Beobachtungen im Weltall können z. B. Nachbarsterne herangezogen werden, um auf das Verhalten eines besonderen Sternes zu schließen. Auch verschiedene Teleskope können dienlich sein. Zu bedenken ist dabei, dass es sich immer um einen Blick in die Vergangenheit handelt. Ich komme darauf zurück.

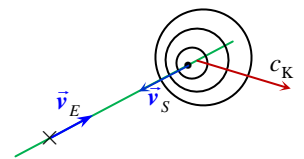
3. Sender und Empfänger bewegen sich gleichförmig auf der Geraden SE

a) Sender und Empfänger bewegen sich gleichförmig aufeinander zu

Die schon verkürzte Wellenlänge des bewegten Senders $\lambda_{E_S} = (c_K - v_S)T_K$ wird vom Empfänger mit der Geschwindigkeit v_E durchfahren. Die dafür benötigte Zeit T_E wird gestoppt. Folglich gilt $(c_K - v_S)T_K = \lambda_{E_S} = (c_K + v_E)T_E$. Also

$$f_E = f_K \frac{(c_K - v_E)}{(c_K + v_S)} \Leftrightarrow f_E = f_K \frac{\left(1 - \frac{v_E}{c_K}\right)}{\left(1 + \frac{v_S}{c_K}\right)} \quad \text{und} \quad \lambda_E = \lambda_K \frac{\left(1 - \frac{v_S}{c_K}\right)}{\left(1 + \frac{v_E}{c_K}\right)},$$

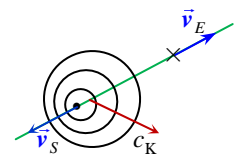
weil die wahrgenommene Wellenlänge $\lambda_E = c_K T_E$ beträgt.



b) Sender und Empfänger bewegen sich gleichförmig voneinander weg

Wie leicht zu verifizieren, wechseln alle Zeichen in a) von Plus in Minus bzw. von Minus in Plus, also $\lambda_{E_S} = (c_K + v_S)T_K$ und $\lambda_{E_S} = (c_K - v_E)T_E = (c_K + v_S)T_K$. Wir erhalten folglich

$$f_E = f_K \frac{\left(1 + \frac{v_E}{c_K}\right)}{\left(1 - \frac{v_S}{c_K}\right)} \quad \text{und} \quad \lambda_E = \lambda_K \frac{\left(1 + \frac{v_S}{c_K}\right)}{\left(1 - \frac{v_E}{c_K}\right)}.$$



Schauen wir uns beide zusammen an und vergleichen mit den ersten beiden Ergebnissen

$$\lambda_E \left(1 \pm \frac{v_E}{c_K}\right) = \lambda_K \quad \text{und} \quad f_E = f_K \left(1 \pm \frac{v_E}{c_K}\right) \quad \text{sowie} \quad \lambda_E = \lambda_K \left(1 \mp \frac{v_S}{c_K}\right) \quad \text{und} \quad f_E \left(1 \mp \frac{v_S}{c_K}\right) = f_K,$$

so erkennen wir

$$\lambda_E \left(1 \pm \frac{v_E}{c_K}\right) = \lambda_K \left(1 \mp \frac{v_S}{c_K}\right) \quad \text{und} \quad f_E \left(1 \mp \frac{v_S}{c_K}\right) = f_K \left(1 \pm \frac{v_E}{c_K}\right)$$

als alles umfassende Formeln, wenn sich beide auf der Verbindungsgeraden SE bewegen.

Auch im 3. Fall verändern sich die Wellenlängen und Frequenzen während der gesamten Zeit nicht. Wegen $\vec{v}_S = \zeta \vec{v}_E$ bleiben auch für diese Gleichungen die bereits gemachten Aussagen gelten. Natürlich können λ_E und ν_E am Ort gemessen werden, um die Geschwindigkeit ν_S zu berechnen.

Diese vier Fälle werden mittels Vektoren zusammengefasst.

Allgemeiner Fall

Bewegen sich Sender und Empfänger relativ zueinander nicht auf einer gemeinsamen Geraden, sondern bewegen sich aneinander vorbei, so verändert sich jeder Anteil der Geschwindigkeiten auf der gemeinsamen Verbindungsgeraden SE .

Die auf mich zukommende Wellenfront wird nur durch diesen Anteil verändert. Damit diese Gerade, genauer der Verbindungsvektor \overline{SE} bestimmt werden kann, muss die Sendezeit oder Senderort und die Empfangszeit oder Empfangsort bekannt sein. Ansonsten wäre eine Formel sinnlos. Aus der Zeitdifferenz erhalten wir mit der als konstant angenommenen Ausbreitungsgeschwindigkeit die Entfernung zwischen Sender und Empfänger. Wir schreiben t für die Sendezeit (real) und t^* für die Empfangszeit (virtuell, da sich die Laufzeit ständig ändert).

Die Geschwindigkeiten des Senders \vec{v}_S und des Empfängers \vec{v}_E müssen folglich auf den Verbindungsvektor \overline{SE} projiziert werden, der bereits via Laufzeit oder Orte berechnet wurde. Bezeichnen wir daher den Verbindungseinheitsvektor mit $\vec{se} = \frac{\overline{SE}(t)}{\|\overline{SE}(t)\|}$.

Berechnen wir nun die Projektion eines Vektors \vec{a} auf einen Vektor \vec{b} . Sie ist definiert durch

$$p_{\vec{b}}^{\sigma}(\vec{a}) := \sigma\left(\vec{a}, \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\right) \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \sigma(\vec{a}, \vec{b}) \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}.^4$$

Die Bilinearform σ stellt das Skalarprodukt dar. Wir beschränken uns hier auf das kanonische Skalarprodukt. Da in einigen Formeln der Kosinus des eingeschlossenen Winkels zwischen zwei Vektoren zur Berechnung auftaucht, werde ich auch diesen Zusammenhang zeigen. Es gilt

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \sigma\left(\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}, \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\right),$$

so dass wir $\sigma\left(p_{\vec{b}}^{\sigma}\left(\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}\right), \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\right) = \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ schreiben können.

Zurück zum Doppler-Effekt.

Untersuchen wir diese „einfachen Fälle“ einmal genauer und versuchen universelle Formeln zu finden. Beginnen wir! Es sei dazu \vec{v}_X die Geschwindigkeit, X für S oder E . Es seien

$$w_S(t) = \vec{v}_S \cdot (t - t_0) + w_S(t_0) \quad \text{und} \quad w_E(t) = \vec{v}_E \cdot (t - t_0) + w_E(t_0)$$

⁴ Vgl. Seite XXX

die Wege des Senders und Empfängers. Zu der Zeit t_0 wird ein Signal von dem Sender emittiert. Der Sender befindet sich an dem Ort $w_S(t_0)$, der Empfänger an der Stelle $w_E(t_0)$. Der Einfachheit halber stellen wir uns eine Kugelwelle vor. Die Zeit, die das Signal benötigt, um den Empfänger mit der konstanten Geschwindigkeit c_K zu erreichen, heißt **Laufzeit**, in Zeichen $\tau_L(t_0)$. Diese ändert sich ständig, außer das Objekt beschreibt einen Kreis um den Empfänger. Der Empfänger befindet sich folglich an der Stelle

$$w_E(\tau_L(t_0) + t_0) = \vec{v}_E \cdot \tau_L(t_0) + w_E(t_0),$$

wenn er zum ersten Mal ein eingehendes Signal registriert. Fragen wir uns wie sich die Laufzeit eine Sekunde später verändert hat. Es ist $w_S(t_0 + 1s) = \vec{v}_S \cdot 1s + w_S(t_0)$ und ein Signal geht auf die Reise. Währenddessen hat der Empfänger den Ort $w_E(\tau_L(t_0) + t_0)$ verlassen. Nach welcher Zeit er ein neues Signal aufnimmt, kann jedoch nicht bestimmt werden. Dazu bedarf es entweder des Verbindungsvektors $\overrightarrow{w_S(t_0 + 1s)w_E(\tau_L(t_0 + 1s) + t_0 + 1s)}$ oder der Laufzeit $\tau_L(t_0 + 1s)$ selbst.

Umgekehrt, nimmt der Empfänger ein eingehendes Signal wahr, also dessen gemessenen Wellenlänge und Frequenz, so muss die eigene Relativgeschwindigkeit, wogegen auch immer gemessen, bekannt sein. Das ist bei großen Distanzen - verschiedene Galaxien - schon ein mächtiges Problem. Selbst im Kleinen auf dieser Erde wäre ja die Relativgeschwindigkeit gegen die Erdoberfläche gemessen, also sind sphärische Dreiecke euklidische Dreiecke. Das ist klein.

Wie an diesen einfachen dargelegten Sachverhalten ersichtlich wird, ist ohne Referenzpunkt gar nichts zu messen. *Wir unterscheiden zwischen der realen Zeit des Senders t und der virtuellen Zeit des Empfängers t^* .*

Beginnen wir mit dem einfachsten Fall.

1. Der Empfänger bewegt sich gleichförmig, der Sender ruht.

Wir nehmen sogar eine geradlinige und gleichförmige Bewegung an. Wir fragen nicht, woher wir wissen, dass der Sender ruht. Da sich immer alles in Bewegung befindet, handelt es sich auch hier um eine virtuelle Ruhe. Es sei

$$w_E(t) = \vec{v}_E \cdot (t - t_0) + w_E(t_0)$$

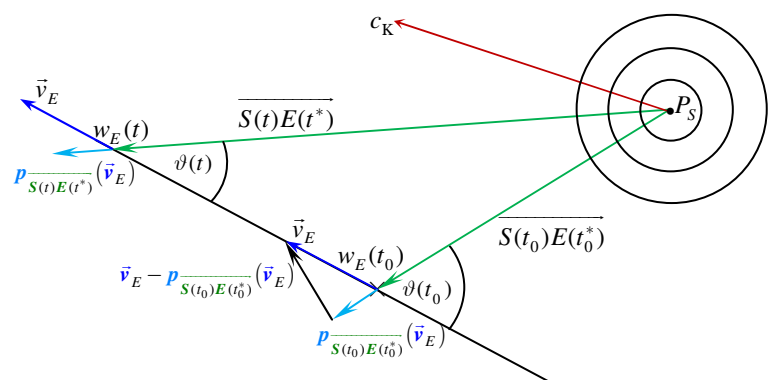
der Weg des Empfängers mit der konstanten Geschwindigkeit \vec{v}_E . Die Spur des Weges liegt folglich auf einer Geraden.

Es sei P_S der Standort des Senders. Dann ist

$$\overrightarrow{S(t)E(t^*)} := \overrightarrow{P_S(t)w_E(t^*)}$$

der Verbindungsvektor vom Sender zum Zeitpunkt t bis zum Empfänger zum Zeitpunkt t^* .

Bekannt sind alle gemessenen Daten.



Relativgeschwindigkeit \vec{v}_E , Position des Empfängers $w_E(t)$, Wellenlänge λ_E und Frequenz f_E am Empfänger, gesendete Wellenlänge λ_K bzw. Frequenz f_K durch Vergleich mit einem Referenzwert (wird angenommen, wenn nicht messbar), Ausbreitungsgeschwindigkeit c_K .

Damit eine Formel aufgestellt werden kann, ist der bisherige Betrag v_E durch $\|\vec{v}_E\|$ zu ersetzen. Weiter ist nur der Teil der Zerlegung des Geschwindigkeitsvektors maßgeblich, der auf uns zeigt. Dies ist die Projektion der Geschwindigkeit auf den Verbindungsvektor $\overrightarrow{S(t)E(t^*)}$, also

$$p_{\overrightarrow{S(t)E(t^*)}}(\vec{v}_E) := \left(\vec{v}_E \cdot \overrightarrow{S(t)E(t^*)} \right) \overrightarrow{S(t)E(t^*)}$$

mit

$$p_{\overrightarrow{S(t)E(t^*)}}(\vec{v}_E) \cdot \overrightarrow{S(t)E(t^*)} = \vec{v}_E \cdot \overrightarrow{S(t)E(t^*)}, \text{ wobei } \overrightarrow{S(t)E(t^*)} = \frac{\overrightarrow{S(t)E(t^*)}}{\|\overrightarrow{S(t)E(t^*)}\|}.$$

Der Geschwindigkeit $\pm v_E$ aus 1. entspricht damit $p_{\overrightarrow{S(t)E(t^*)}}(\vec{v}_E) \cdot \overrightarrow{S(t)E(t^*)} = \vec{v}_E \cdot \overrightarrow{S(t)E(t^*)}$. Folglich ist $\pm \frac{v_E}{c_K}$ durch $\pm \frac{\vec{v}_E \cdot \overrightarrow{S(t)E(t^*)}}{c_K}$ zu ersetzen. Wir erhalten die Formeln

$$\lambda_E(t^*) = \lambda_K \frac{1}{1 + \frac{\vec{v}_E \cdot \overrightarrow{S(t)E(t^*)}}{c_K}} \text{ und } f_E(t^*) = f_K \left(1 + \frac{\vec{v}_E \cdot \overrightarrow{S(t)E(t^*)}}{c_K} \right).$$

Die Laufzeit $\tau_L(t) := \frac{\|\overrightarrow{S(t)E(t^*)}\|}{c_K}$ erhalten wir nur, wenn $\|\overrightarrow{S(t)E(t^*)}\|$ bekannt ist oder umgekehrt.

Der Empfänger nimmt das zur Zeit $t \geq t_0$ gesendete Signal zum Zeitpunkt $t^* > t \geq t_0$ mit $t^* := t + \tau_L(t)$ wahr. Die „Zeit“ t^* heißt **virtuelle Zeit. Sie ist nichtlinear und nur eine Rechengröße.**

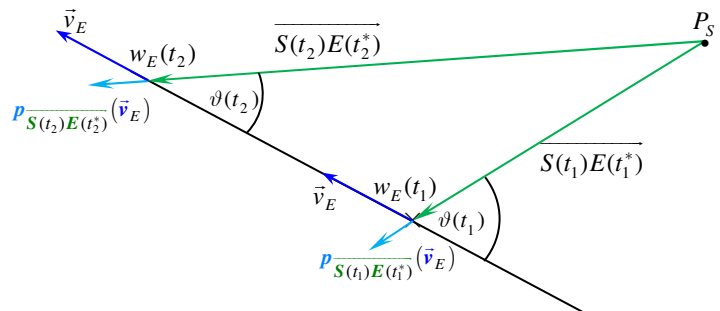
Diskussion

Da in diesem Fall die Wellenlänge reziprok erscheint, ist es besser mit der Frequenz zu rechnen. Das minimiert Rundungsfehler.

Bekannt sind: Der Sender ruht (Annahme), f_K gesendete Frequenz (?), c_K Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium, \vec{v}_E Geschwindigkeit des Empfängers, gemessene empfangene Frequenz

f_E , Formeln $f_E(t^*) = f_K \left(1 + \frac{\vec{v}_E \cdot \overrightarrow{S(t)E(t^*)}}{c_K} \right)$, $\cos \varphi \left(\vec{v}_E, \overrightarrow{S(t)E(t^*)} \right) = \frac{\vec{v}_E \cdot \overrightarrow{S(t)E(t^*)}}{\|\vec{v}_E\| \cdot \|\overrightarrow{S(t)E(t^*)}\|}$, $v_E = \|\vec{v}_E\|$.

Kann nun der Winkel ϑ durch die Intensität des Signals sehr genau bestimmt werden, so auch die Formel auf Richtigkeit. Oder, falls die gesendete Frequenz unbekannt ist, auch diese. Die Entfernung kann, wenn überhaupt, nur durch zwei exakte Winkel bestimmt werden.



Hier darf folglich schon von universellen Formeln gesprochen werden.

Bei astronomischen Messungen wird hier insbesondere sehr deutlich, dass die Annahme einer konstanten Geschwindigkeit ohne Richtungsänderung problematisch ist. Die Erde in ihrer Bewegung um die Sonne bewegt sich, bei der keplerschen Projektion, auf einer Ellipsenbahn, wobei die Sonne in einem der beiden Brennpunkte steht. Wird noch die Bewegung unserer Sonne berücksichtigt, so käme auch noch eine Torsion hinzu, was jedoch unproblematisch ist. Die Rotation und die evtl. Translation unserer Galaxie wären natürlich auch in Betracht zu ziehen, z. B. durch Messungen zu Nachbargalaxien und das unter der Annahme, dass sich alle Galaxien gleichmäßig voneinander entfernen. **Hier von Inertialsystemen zu sprechen ist schon ein wenig abwegig.**

Es ist jedoch auch jedem klar, dass die Skizze in Anbetracht extrem großer Entfernungen sehr grob ist, da wegen $\vartheta(t_1) \approx \vartheta(t_2)$ die Differenz der Winkel $\vartheta(t_1)$ und $\vartheta(t_2)$ extrem klein ist. Die Rotation der Erde spielt während der Beobachtungszeit eines halben Jahres sicher eine untergeordnete Rolle, ist aber auch zu berücksichtigen.

2. Der Sender bewegt sich gleichförmig, der Empfänger ruht.

Wir nehmen auch hier eine geradlinige und gleichförmige Bewegung an. Es sei

$$w_S(t) = \vec{v}_S \cdot (t - t_0) + w_S(t_0)$$

der Weg des Senders mit der bekannten konstanten Geschwindigkeit \vec{v}_S . Die Spur des Weges liegt folglich auf einer Geraden. Es sei P_E der Standort des Empfängers. Dann ist

$$\overrightarrow{S(t)E(t^*)} := \overrightarrow{w_S(t)P_E(t^*)}$$

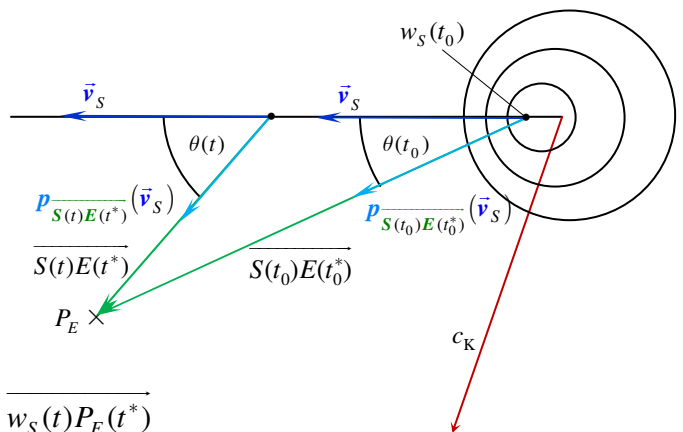
der Verbindungsvektor vom Sender zum Zeitpunkt t bis zu dem Empfänger zum Zeitpunkt $t^* := t + \tau_L(t)$ mit $c_K \tau_L(t) := \|\overrightarrow{S(t)E(t^*)}\|$.

Zunächst messe ich ein ankommendes Signal, z. B. $f_E(t^*)$. Möglicherweise gibt es einen Hinweis auf einen Raumsektor aus dem das Signal kam. Möglicherweise beobachte ich auch ein Objekt schon länger. Wo sich der Sender befindet, geschweige denn, mit welcher Geschwindigkeit er sich bewegt, weiß ich zunächst nicht. Selbst wenn ich den Sender lokalisiert habe, kann ich immer noch nicht sagen, wann und wo das Signal gesendet wurde.

Nur die Projektion der Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \text{pr}_{\overrightarrow{S(t)E(t^*)}}(\vec{v}_S)$ auf den Verbindungsvektor $\overrightarrow{S(t)E(t^*)}$ wird benötigt, da tangential zur Ausbreitungsrichtung keine Veränderungen auftreten. Wir deuten daher **die Projektion als virtuelle Geschwindigkeit** mit der sich der Sender auf den Empfänger zubewegt. Vgl. 1. Da $\overrightarrow{S(t)E(t^*)}$ eine Funktion der Zeit ist, gilt dies auch für die virtuelle Geschwindigkeit.

Ersetzen wir $\pm \frac{v_S}{c_K}$ aus 1. durch $+\frac{\vec{v}_S}{c_K} \cdot \overrightarrow{s(t)e(t^*)}$, so bleibt noch die Laufzeit des Signals für die

Strecke $\|\overrightarrow{S(t)E(t^*)}\|$ zu bestimmen. Mit $\tau_L(t) := \frac{\|\overrightarrow{S(t)E(t^*)}\|}{c_K}$ und $t^* := t + \tau_L(t)$ folgen die Formeln



$$\lambda_E(t^*) = \lambda_K \left(1 + \frac{\vec{v}_S}{c_K} \cdot \overrightarrow{s(t)e(t^*)} \right) \text{ und } f_E(t^*) = f_K \frac{1}{1 + \frac{\vec{v}_S}{c_K} \cdot \overrightarrow{s(t)e(t^*)}}.$$

Der Empfänger nimmt die zur Zeit $t \geq t_0$ gesendete Wellenlänge λ_E bzw. Frequenz f_E zum Zeitpunkt $t^* > t \geq t_0$ wahr. Gemessen wird folglich genau das Signal, das nach der Laufzeit $\tau_L(t)$ ankommt.

Ausführliche Diskussion des Sachverhaltes

Bekannt sind: Der Empfänger ruht, c_K Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium, gemessene empfangene Wellenlänge λ_E ,

Formeln: $\lambda_E(t^*) = \lambda_K \left(1 + \frac{\vec{v}_S}{c_K} \cdot \overrightarrow{s(t)e(t^*)} \right)$, $\frac{\vec{v}_S}{c_K} \cdot \overrightarrow{s(t)e(t^*)} = \frac{v_S}{c_K} \cdot \frac{\vec{v}_S}{\|\vec{v}_S\|} \cdot \overrightarrow{s(t)e(t^*)} = \frac{v_S}{c_K} \cdot \cos(\theta(t))$.

Unbekannt sind: λ_K gesendete Wellenlänge, \vec{v}_S Geschwindigkeit des Senders.

Damit liegen zunächst zwei Unbekannte Größen vor, nämlich λ_K und $\frac{\vec{v}_S}{c_K} \cdot \overrightarrow{s(t)e(t^*)}$. Ist eine der beiden bekannt, so auch die andere. Nun sind jedoch $\theta(t)$ und v_S in $\frac{v_S}{c_K} \cdot \cos(\theta(t))$ wieder zwei Unbekannte.

Eine Möglichkeit zur Bestimmung des Senders besteht wieder in der Stationierung eines zweiten Empfängers. Durch Peilung der stärksten Intensität kann nun der Winkel $\theta(t)$ und somit die Geschwindigkeit v_S bestimmt werden.

Werden die Messungen für „kleine Distanzen“ durchgeführt, so sind $\theta(t)$ und v_S in $\frac{v_S}{c_K} \cdot \cos(\theta(t))$ durch die zwei Empfänger vollständig bestimmt und λ_K bzw. f_K kann berechnet werden.

Hierzu werden $\lambda_E(t_1^*)$ und $\lambda_E(t_2^*)$ gemessen. Wir erhalten

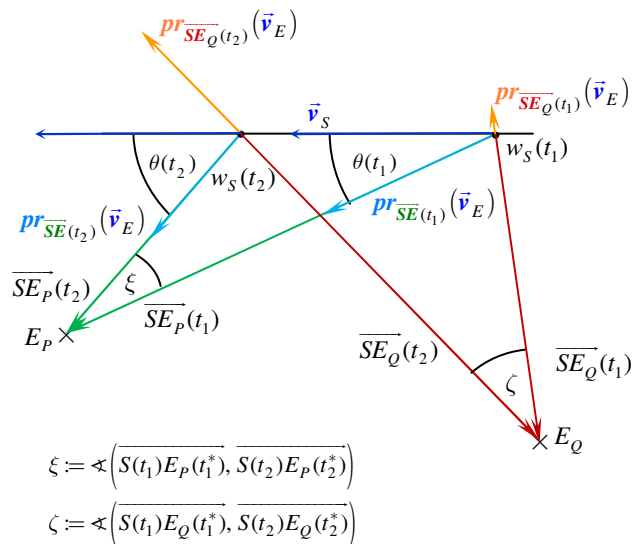
$$f_K \left(\lambda_E(t_2^*) - \lambda_E(t_1^*) \right) = \vec{v}_S \cdot \left(\overrightarrow{s(t_2)e(t_2^*)} - \overrightarrow{s(t_1)e(t_1^*)} \right) = v_S \cdot \left(\cos(\theta(t_2)) - \cos(\theta(t_1)) \right)$$

deren rechte Seite und damit auch die linke Seite bekannt sind.

Weiterhin ist natürlich immer noch $\tau_L(t) := \frac{\|S(t)E(t^*)\|}{c_K}$ unbekannt. Die Länge kann nun aus dem Dreieck $E_P w_S(t_1) w_S(t_2)$ berechnet werden. Und $t^* := t + \tau_L(t)$ ist auch bekannt.

Für Weltraumbeobachtungen ist ein zweiter Empfänger E_Q unumgänglich. Synchronisation via Satelliten.

Anhand des zweiten Empfängers kann nun relativ die genaue Position $w_S(t_1)$ bzw. $w_S(t_2)$ bestimmt werden. Natürlich werden wieder etliche hunderte Messwerte aufgezeichnet und



statistisch ausgewertet. Die Laufzeit des Signals wird nun berechnet und damit liegt der Maßstab fest.

Ist die Laufzeit bekannt, so auch die Entfernung und umgekehrt, wenn wir davon ausgehen, dass sich die Geschwindigkeit c_K des Signals nicht verändert. Da selbst die Lichtgeschwindigkeit nicht konstant sein muss, ist hier wieder Vorsicht geboten.^{5,6}

Hier von einer universellen Formel zu sprechen ist sicher übertrieben!

Letzter Fall

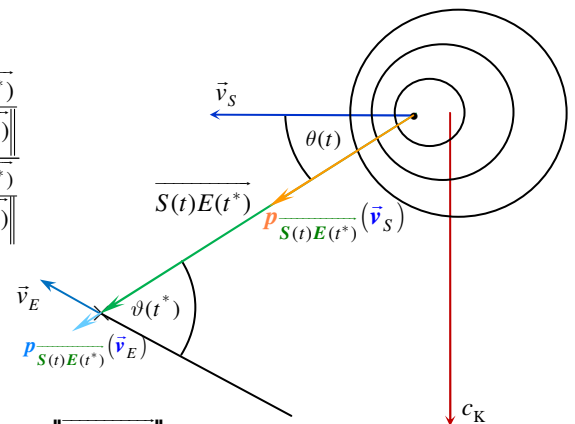
3. Sender und Empfänger bewegen sich gleichförmig auf verschiedenen Geraden

Setzen wir in die Formeln unter 3. die Skalarprodukte ein, so erhalten wir mit t als Sendezeit und t^* als Empfangszeit

$$f_E(t^*) = f_K \frac{1 + \frac{\vec{v}_E \cdot \overline{S(t)E(t^*)}}{c_K \|\overline{S(t)E(t^*)}\|}}{1 + \frac{\vec{v}_S \cdot \overline{S(t)E(t^*)}}{c_K \|\overline{S(t)E(t^*)}\|}} \quad \text{und} \quad \lambda_E(t^*) = \lambda_K \frac{1 + \frac{\vec{v}_S \cdot \overline{S(t)E(t^*)}}{c_K \|\overline{S(t)E(t^*)}\|}}{1 + \frac{\vec{v}_E \cdot \overline{S(t)E(t^*)}}{c_K \|\overline{S(t)E(t^*)}\|}}$$

oder

$$f_E(t^*) = f_K \frac{c_K + \vec{v}_E \cdot \overline{s(t)e(t^*)}}{c_K + \vec{v}_S \cdot \overline{s(t)e(t^*)}} \quad \text{und} \quad \lambda_E(t^*) = \lambda_K \frac{c_K + \vec{v}_S \cdot \overline{s(t)e(t^*)}}{c_K + \vec{v}_E \cdot \overline{s(t)e(t^*)}}$$



Für die Strecke $\|\overline{S(t)E(t^*)}\|$ benötigt ein Signal die Zeit $\tau_L(t) = \frac{\|\overline{S(t)E(t^*)}\|}{c_K}$.

Untersuchen wir, ob es auch in diesem Fall gelingt alle Daten zu bestimmen.

$$f_E(t^*) = f_K \frac{c_K + \vec{v}_E \cdot \overline{s(t)e(t^*)}}{c_K + \vec{v}_S \cdot \overline{s(t)e(t^*)}} \Leftrightarrow f_E(t^*) (c_K + \vec{v}_S \cdot \overline{s(t)e(t^*)}) = f_K (c_K + \vec{v}_E \cdot \overline{s(t)e(t^*)})$$

Bekannt: $f_E(t^*)$ und \vec{v}_E gemessen, c_K bekannte Grundkonstante, die Spuren der Wege sind im Allgemeinen windschief.

Formeln: $f_E(t^*) \cdot (c_K + \vec{v}_S \cdot \overline{s(t)e(t^*)}) = f_K \cdot (c_K + \vec{v}_E \cdot \overline{s(t)e(t^*)})$, $\frac{\vec{v}_S \cdot \overline{s(t)e(t^*)}}{c_K} = \frac{v_S}{c_K} \cdot \cos(\theta(t))$ und $\frac{\vec{v}_E \cdot \overline{s(t)e(t^*)}}{c_K} = \frac{v_E}{c_K} \cdot \cos(\vartheta(t))$.

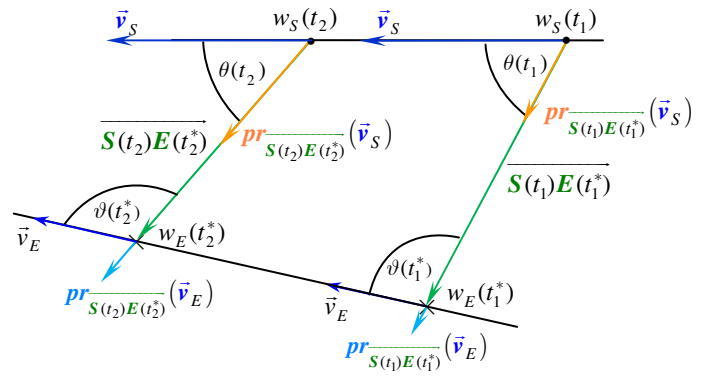
Unbekannt: die Geschwindigkeit des Senders \vec{v}_S , die gesendete Frequenz f_K , die Entfernung $\overline{S(t_0)E(t_1)}$ oder die Laufzeit $\tau_L(t)$.

Wegen $f_E(t^*) \cdot (c_K + \vec{v}_S \cdot \overline{s(t)e(t^*)}) = f_K \cdot (c_K + \vec{v}_E \cdot \overline{s(t)e(t^*)})$ haben wir zunächst, da $\overline{s(t)e(t^*)}$ unbekannt sind, drei Unbekannte f_K , $\vec{v}_S \cdot \overline{s(t)e(t^*)}$ und $\vec{v}_E \cdot \overline{s(t)e(t^*)}$.

⁵ http://www.wissenschaft-aktuell.de/artikel/Gebremstes_Licht1771015589742.html
<http://www.sciencemag.org/content/347/6224/857>

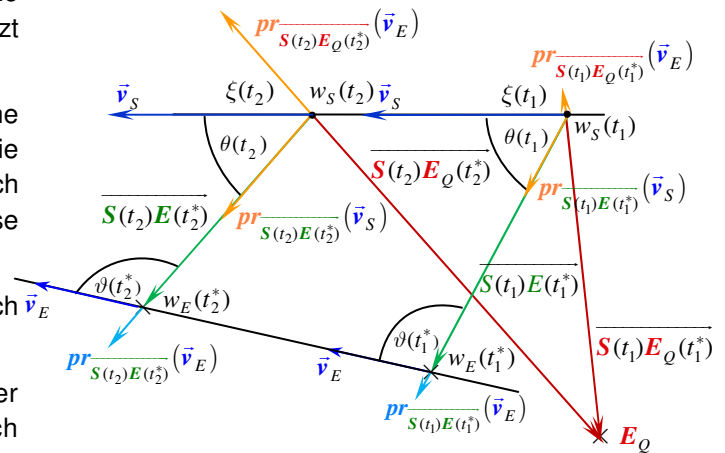
⁶ <http://www.scinexx.de/wissen-aktuell-18752-2015-04-09.html>
<http://arxiv.org/pdf/1502.01151v1.pdf>

Kann das Signal genauer lokalisiert werden, so kann auch der Winkel ϑ und damit $\frac{v_E}{c_K} \cdot \cos(\vartheta(t))$ bestimmt werden. Es verbleiben f_K und \vec{v}_S in $\vec{v}_S \cdot \overline{s(t)e(t^*)}$ zu bestimmen, wenn auch $\vec{v}_S \cdot \overline{s(t)e(t^*)}$ bekannt ist, da $\overline{s(t)e(t^*)}$ nun bekannt ist. Folglich bleiben zwei Unbekannte f_K und \vec{v}_S übrig, von denen eine zu bestimmen ist.



Natürlich kann der Sender seine Geschwindigkeit übermitteln, falls er dazu in der Lage ist. Es kann auch eine Richt- oder eine Kreiselantenne (wie beim Radar, nur sehr schnell drehend) eingesetzt werden.

Ist dies alles nicht möglich, könnte wieder eine zweite Empfangsstation eingesetzt werden, die wie im 2. Fall stationär sein kann. Genau dies soll doch aber vermieden werden, denn sonst wäre diese Messung unsinnig.



An dieser Stelle wird deutlich, wie schwierig sich die praktische Bestimmung gestaltet.

Werden weit entfernte Objekte außerhalb der Erde betrachtet, so ist der Aufwand wesentlich höher, eine exakte Bestimmung durchzuführen. Hier müssen Höchstleistungsrechner, möglichst Parallelrechner, eingesetzt werden. In den meisten Fällen erweist sich eine Näherung als sehr nützlich.

Sind $v_S/c_K \ll 1$ und $v_E/c_K \ll 1$, so ist $\frac{\vec{v}_E \cdot \overline{SE}}{c_K \|\overline{SE}\|} \cdot \frac{\vec{v}_S \cdot \overline{SE}}{c_K \|\overline{SE}\|} \approx 0$.

Setzen wir $\vec{v} = \vec{v}_S - \vec{v}_E$ als Relativgeschwindigkeit und benutzen Taylor mit

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots, \text{ hier } \frac{1}{1+x} \approx 1 - x,$$

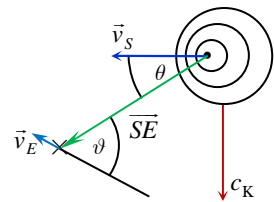
so folgt

$$\begin{aligned} f_E(t^*) &= f_K \cdot \frac{1 + \frac{\vec{v}_E \cdot \overline{s(t)e(t^*)}}{c_K}}{1 + \frac{\vec{v}_S \cdot \overline{s(t)e(t^*)}}{c_K}} \\ &= f_K \cdot \left(1 + \frac{\vec{v}_E \cdot \overline{s(t)e(t^*)}}{c_K}\right) \left(1 - \frac{\vec{v}_S \cdot \overline{s(t)e(t^*)}}{c_K}\right) \\ &= f_K \cdot \left(1 + \left(\frac{\vec{v}_E}{c_K} - \frac{\vec{v}_S}{c_K}\right) \cdot \overline{s(t)e(t^*)} - \frac{\vec{v}_E \cdot \overline{s(t)e(t^*)}}{c_K} \cdot \frac{\vec{v}_S \cdot \overline{s(t)e(t^*)}}{c_K}\right) \\ &= f_K \cdot \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \overline{s(t)e(t^*)}}{c_K}\right) \end{aligned}$$

oder

$$f_E(t^*) = f_K \cdot \left(1 - \frac{\vec{v}_S - \vec{v}_E \cdot \overline{s(t)e(t^*)}}{c_K}\right)$$

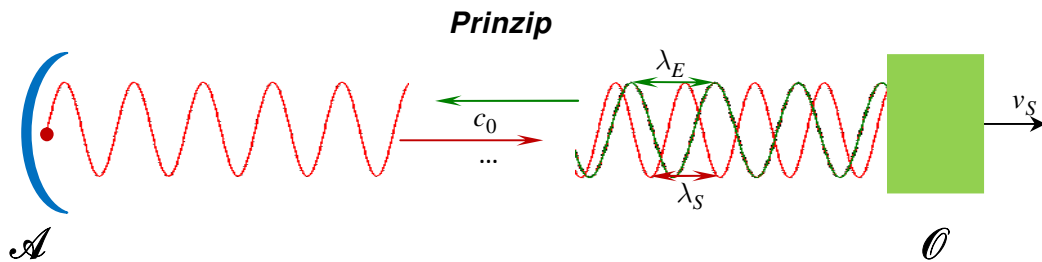
da unsere Betrachtungen immer vom Sender ausgehen.



4. Sender und Empfänger sind identisch

Dieser Fall tritt auf, wenn ein Objekt ein gesendetes Signal $\lambda_S = \lambda_K$ reflektiert. Der Reflektor wird folglich als virtueller Sender betrachtet, welches wir als Signal λ_E messen. In den meisten Fällen wird der Sender stationär sein und eine elektromagnetische Welle mit Lichtgeschwindigkeit verwendet, also $c_K = c_0$. Hierbei bezeichnet c_0 die Vakuumlichtgeschwindigkeit. Eingesetzt wird es bei der Radar- oder Lasermessung.⁷

Das Prinzip soll an der Sinuswelle erklärt werden. Sie steht synonym für alle Möglichkeiten der Longitudinal- und Transversalwellen. Schallausbreitung und -messung, Pulsraten bei der Lasermessung sowie die Elektromagnetische Welle bei der Radarmessung.



Die Antenne \mathcal{A} sendet eine **Welle** aus, die auf das Objekt \mathcal{O} trifft. Sie wird dort als **Welle** reflektiert, also virtuell gesendet, und von der Antenne wieder empfangen. Da sich das Objekt vom Sender entfernt, erscheint die reflektierte Welle gedehnt, **was einer Phasenverschiebung gleich kommt**. Dies gilt natürlich auch für eine gestauchte Welle. Die Wellenlänge und damit auch die Frequenz haben sich folglich verändert. Bei einer Geschwindigkeit von ca. $c_0 = 300'000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ kann die Entfernung sofort angegeben werden, denn die Antenne sendet und empfängt gleichzeitig. Bei einer gemessenen Laufzeit Δt ergibt sich eine Entfernung von $2|\overline{SE}| = c_0 \Delta t$, da Δt die Zeit für Hin- und Rückweg des Signals darstellt. Nun,

$$\lambda_E = \lambda_S \left(1 + \frac{\vec{v}_S \cdot \vec{se}}{c_0} \right) \text{ bzw. } \frac{\lambda_E}{c_0 + \vec{v}_S \cdot \vec{se}} = \frac{\lambda_S}{c_0}.$$

Meistens wird die Verschiebung der Wellenlänge in Bezug auf die bekannte Wellenlänge gemessen, also $\frac{\lambda_S - \lambda_E}{\lambda_S}$. Da die Messungen auf der Erdoberfläche meist im Millisekundenbereich liegen, kann auf die Zeitangaben verzichtet werden. Wir schreiben folglich kurz

$$\frac{\lambda_S - \lambda_E}{\lambda_S} = -\frac{\vec{v}_S \cdot \vec{se}}{c_0} \text{ bzw. } -v_S \cos \alpha = c_0 \frac{\lambda_S - \lambda_E}{\lambda_S} = f_S \cdot (\lambda_S - \lambda_E).$$

Natürlich kann aus der Wellenlängendifferenz auf die Geschwindigkeit $v_S \cos \alpha$ geschlossen werden.

Dazu setzen wir $v_n := v_S \cos \alpha$ und betrachten einen bestimmten Augenblick, indem die Wellenfront, sagen wir der Wellenberg, auf das Objekt trifft. Das v_n sagt uns, dass die „Normale“ orthogonal auf der Wellenfront steht. Betrachten wir das Ganze grob, so können wir sagen, dass die Welle vollständig reflektiert wird, also die Wellenlänge erhalten bleibt, wenn das Objekt ruht. Entfernt sich das Objekt vom Sender/Empfänger mit der Geschwindigkeit $v_n = -v_S$ und ist $\lambda_S = c_0 \cdot T_{\lambda_S}$, so erreicht die nächste Wellenfront (Wellenberg) das Objekt nach der Zeit $T_{\lambda_S} + \Delta t$.

⁷ Vgl. Die Longitudinalwelle, Seite 14

Das Objekt hat sich folglich um die Strecke $\Delta\lambda = v_S \cdot T$ vom Sender/Empfänger entfernt. Für die reflektierte Welle gilt daher $T_{\lambda_E} = T_{\lambda_S} + \Delta t$, da in diesem Augenblick ein λ_E vollständig ist. Damit müssen aber $T = T_{\lambda_E}$ und $\Delta\lambda = \lambda_E - \lambda_S$ sein. Wir erhalten für die Wellenlängen

$$\begin{aligned}\lambda_S &= c_0 \cdot T_{\lambda_S} \\ &= c_0 \cdot (T_{\lambda_E} - \Delta t) = c_0 \cdot T_{\lambda_E} - c_0 \cdot \Delta t = c_0 \cdot T_{\lambda_E} - \Delta\lambda = c_0 \cdot T_{\lambda_E} - v_S \cdot T_{\lambda_E} \\ &= (c_0 - v_S) \cdot T_{\lambda_E} \\ &= \frac{c_0 - v_S}{c_0} \cdot \lambda_E.\end{aligned}$$

Und für die Frequenzen

$$c_0 \cdot T_{\lambda_S} = (c_0 - v_S) \cdot T_{\lambda_E} \Leftrightarrow (c_0 - v_S) \cdot f_S = c_0 \cdot f_E.$$

Kommt das Objekt auf uns zu, also $v_n = +v_S$, so erhalten wir eine verkürzte Welle. Das $+ \Delta t$ ist durch $- \Delta t$ zu ersetzen. Also

$$\lambda_S = \frac{c_0 + v_S}{c_0} \cdot \lambda_E \text{ bzw. } (c_0 + v_S) \cdot f_S = c_0 \cdot f_E.$$

Zusammengefaßt haben wir

$$\lambda_S = \frac{c_0 + v_n}{c_0} \cdot \lambda_E \text{ bzw. } (c_0 + v_n) \cdot f_S = c_0 \cdot f_E.$$

Unsere Formeln haben wir auf diese Weise noch einmal bestätigt. Bewegt sich das Objekt tangential zur Wellenfront, so ist keine Geschwindigkeitsmessung möglich. Dies wäre durch modulierte Wellen in den Griff zu bekommen. Eine weitere Möglichkeit besteht in der Auswertung des Winkels und der Entfernung via Dreiecke.

Sehr schnell bewegte Objekte, größer 10fache Schallgeschwindigkeit, sind extrem schwierig zu messen.

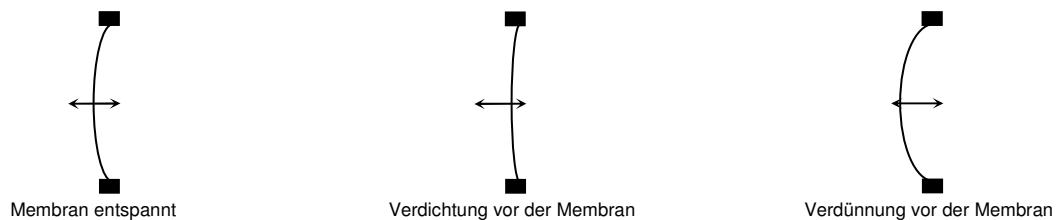
Sollen die Zusammenhänge dynamisch dargestellt werden, so ist Δ durch d zu ersetzen und mittels alternierender Differentialformen zu lösen.

Longitudinalwelle

Die Schallwelle

Sie entsteht durch Verdichtung und damit auch Verdünnung von Molekülen in Gasen und Flüssigkeiten bzw. durch Schwingungen von Atomen in festen Stoffen.

Beschränken wir uns auf die Gase, da anschließend der Transfer auf Flüssigkeiten und feste Stoffe gelingen sollte. Als Schallquelle diene ein Lautsprecher als Ersatz für den Mund. Ein Lautsprecher besteht im Prinzip aus einer schnell schwingenden Membran.

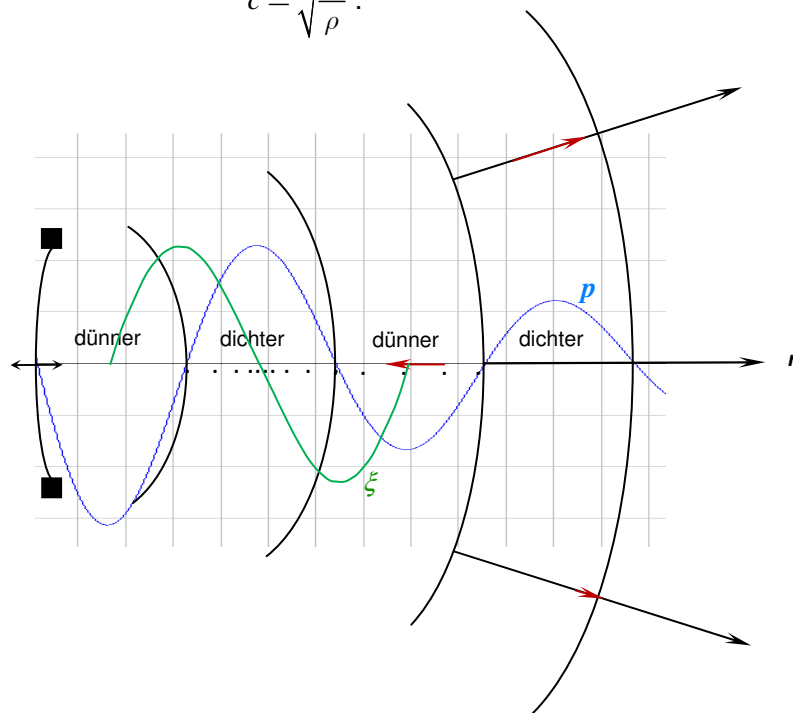


Vergleichbar mit einer schwingenden Stahlfeder⁸



Durch die ständigen Wechsel von Verdichtung und Verdünnung von Molekülen vor der Membran werden weitere Moleküle angestoßen usw. Im Prinzip kehrt aber jedes Molekül ungefähr an seine Stelle zurück, da sonst ein Raumbereich ohne Moleküle entstünde. Schwingungen im niedrigen Frequenzbereich (Infraschall) können mittels Nebels sichtbar gemacht werden. Manchmal wird auch die Ausbreitung eines Rauchringes mittels einer „Pistole“ gezeigt. Hierbei geht es nicht um die Schallausbreitung, die bleibt im Verborgenen, sondern um die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Ringes innerhalb des Mediums Luft. Den Knall der „Pistole“ hören wir natürlich sofort, da die Schallgeschwindigkeit ca. $c_{15^\circ\text{C}} = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ beträgt. Die Schallgeschwindigkeit ist eine Funktion der Dichte ρ und des Kompressionsmoduls K . Sie hängt folglich von der Temperatur ab. Es gilt folgende Formel

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$



⁸ <https://www.youtube.com/watch?v=Rbuhdo0AZDU>

Zur Erinnerung: Der **Druck** ist definiert als die **Impulsstromdichte**. Ein **Sinuston (Schalldruck p)** breitet sich aus. Die Funktionswerte der Kurve geben die Stärke der Verdichtung (positiv) bzw. Verdünnung (negativ) an; werden jedoch in Ausbreitungsrichtung gezeichnet. Die **Auslenkung (Schallauschlag ξ)** ist eine um 90° verschobene Sinusfunktion gleichbleibender Amplitude. Auch hier sehen wir nun die Welle deutlich. Der Unterschied ist jetzt aber, dass die Moleküle idealisiert um eine Ruhelage (**rote Pfeile**) in Ausbreitungsrichtung (**schwarze Pfeile**) schwingen. Der Schallauschlag einer Kugelwelle wird im Allgemeinen durch $\xi = \frac{\hat{\xi}}{r^2} \cdot \cos(\omega t - \varphi_\xi)$ beschrieben mit $[\xi] = 1 \text{ m}$. Insbesondere kann durch $\xi = \frac{\hat{\xi}}{r^3} \mathbf{r} \cdot \cos(\omega t - \varphi_\xi)$ die Beschreibung der Welle in Ausbreitungsrichtung erzwungen werden. Da bei der Ausbreitung immer auch Wärme durch Stoßen von Molekülen entsteht, nimmt auch hier, wie auch schon bei der Transversalwelle, die Energiedichte mehr als r^2 ab.

Die zeitliche Ableitung

$$\nu = \frac{d\xi}{dt} = \dot{\xi}$$

heißt die **Schallschnelle**, kurz **Schnelle**, mit der Einheit $[\nu] = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Sie gibt an, mit welcher Geschwindigkeit ein Teilchen des Mediums, hier Molekül, um seine Ruhelage schwingt. Es gilt

$$\nu = -\omega \frac{\hat{\xi}}{r^3} \mathbf{r} \cdot \sin(\omega t - \varphi_\xi).$$

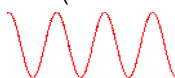
Soweit der kurze Einblick in die Theorie der Longitudinalwellen.

Transversalwelle

In der Veranschaulichung unterscheidet sich eine elektromagnetische Welle (Transversalwelle), auch Hertz'sche Welle⁹ genannt, wenig von der Longitudinalwelle. Das wäre auch komisch, genügen sie doch derselben partiellen Differentialgleichung. Hier eine zu Ehren Heinrich Hertz 1994 herausgegebene Briefmarke, die einen Dipol darstellt.

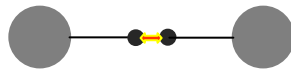


Im Uhrzeigersinn, beginnend rechts oben, ist die Ablösung des elektrischen Feldes **E** zu verfolgen. Dabei stellen die inneren Tori das sich schon während des Aufbaus befindlichen elektrischen Feldes geringerer Feldstärke dar (beachte die Sinusfunktion).



⁹ https://de.wikipedia.org/wiki/Hertzscher_Dipol

Ferner existiert das Feld ja nicht nur an einer Stelle des Dipols (Kondensator mit Funkenstrecke).



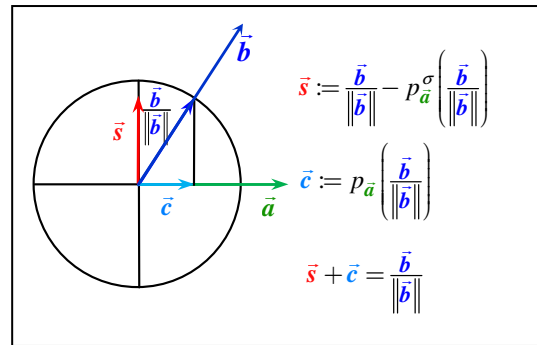
Natürlich existieren Feldlinien nicht, sondern dienen nur der Anschauung der Feldstärke.

Deutlich ist im letzten 4. Bild der vollständige Torus zu erkennen, der sich am Dipol löst. Die Strömung innerhalb des Torus ist deutlich zu erkennen. Der nächste entstehende und sich lösende Torus, hat aufgrund der Potentialwechsel am Dipol auch ein umgekehrtes elektrisches Feld zur Folge, so dass sich die Felder abstoßen. Der nachfolgende Torus „dehnt“ den vor sich ausbreitenden Torus ein. Eine sehr schöne zusammenfassende Darstellung mit historischen Bildern befindet sich in *heureka-stories*.¹⁰ Insbesondere Bild 13 zeigt die Ablösung der Welle korrekt. Lediglich die Darstellung des B -Feldes ist inkorrekt. Es sollten „Schalen“ gleicher Feldstärke statt Kreise dargestellt sein, da das B -Feld auf dem ganzen Dipol vorhanden ist, wenn auch nach außen schwächer werdend.

¹⁰ <http://heureka-stories.de/Erfindungen/1887---Die-elektromagnetischen-Wellen/Die-ganze-Geschichte>

Die Projektion eines Vektors auf einen anderen Vektor via Skalarprodukt^{11, 12}

Bei der Betrachtung der Projektion eines Vektors \vec{a} auf einen Vektor \vec{b} via Skalarprodukt σ , in Zeichen $p_b^\sigma(\vec{a})$, genügt es die durch \vec{a} und \vec{b} erzeugte Ebene zu betrachten, um die gewünschte Darstellung zu finden. Die Projektion soll orthogonal sein bzgl. σ .



D.h. $\vec{a} \perp \vec{b}$ impliziert $p_b^\sigma(\vec{a}) = \vec{0}$. Folglich impliziert $\vec{a} - p_b^\sigma(\vec{a}) \perp \vec{b}$ auch $p_b^\sigma(p_b^\sigma(\vec{a})) = p_b^\sigma(\vec{a})$, da

$0 = p_b^\sigma(\vec{a} - p_b^\sigma(\vec{a})) = p_b^\sigma(\vec{a}) - p_b^\sigma(p_b^\sigma(\vec{a}))$. Wir definieren daher die Projektion durch

$$p_b^\sigma(\vec{a}) := \sigma\left(\vec{a}, \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\right) \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \sigma(\vec{a}, \vec{b}) \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}.$$

Begründung

Es sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum. Es sei $[\vec{c}] := \{\vec{x} \mid \vec{x} = \lambda\vec{c}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ der von \vec{c} erzeugte \mathbb{R} -Unterraum. Es sei $\sigma: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \sigma(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$ ein Skalarprodukt. Es sei

$$p_b^\sigma: \begin{cases} V & \rightarrow & [\vec{b}] \\ \vec{a} & \mapsto & p_b^\sigma(\vec{a}) \end{cases}, \quad p_b^\sigma(\vec{a}) := \sigma\left(\vec{a}, \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\right) \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \sigma(\vec{a}, \vec{b}) \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}.$$

Für die σ -Projektion $p_b^\sigma(\vec{a})$, wobei $\vec{b} \neq \vec{0}$ ist, sind folgende Eigenschaften erfüllt.

- $p_b^\sigma(\vec{x} + \vec{y}) = p_b^\sigma(\vec{x}) + p_b^\sigma(\vec{y})$, $x, y \in V$
- $p_b^\sigma(\omega\vec{z}) = \omega p_b^\sigma(\vec{z})$, $\omega \in \mathbb{R}$
- $V = \ker(p_b^\sigma) \perp \text{im}(p_b^\sigma) = \ker(p_b^\sigma) \perp [\vec{b}]$
- $p_b^\sigma(\vec{c}) = \vec{c}$ für alle $\vec{c} \in [\vec{b}]$

Beweis

Die Aussagen 1. und 2. sagen, dass es sich um eine lineare Abbildung handelt. Dies folgt sofort aus der Linearität im ersten Argument des Skalarproduktes. Aussage 3. Ist die orthogonale Zerlegung des Vektorraumes via Projektion erweitert durch ein Skalarprodukt.¹³ Aussage 4. folgt mit $\sigma(\vec{b}, \vec{b}) = \|\vec{b}\|^2$ und $\vec{c} = \rho\vec{b}$.

Der Cosinus eines Winkels zwischen zwei Vektoren

Für die Darstellung des Cosinus zweier Vektoren \vec{a}, \vec{b} betrachten wir den Einheitskreis, den wir in die Ebene legen, die durch \vec{a}, \vec{b} erzeugt wird und identifizieren die erste Achse mit $\lambda \cdot \vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Die senkrechte Projektion des normierten Vektors von \vec{b} auf den Vektor \vec{a} heißt

¹¹ Oeljeklaus, E.; Remmert R.: *Lineare Algebra I. HT*, Springer-Verlag, ISBN 3-540-06715-9, S. 98ff, S. 148

¹² Holman, H.: *Lineare und Multilineare Algebra. BI, Bd. 173/173a**, 1970, S. 148ff

¹³ Holmann, H.: *Lineare und Multilineare Algebra. BI, Bd. 173/173a**, 1970, S. 152 Satz 5

Richtungskosinus und wird mit \vec{c} bezeichnet. Für $\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ entspricht somit die Länge des Vektors

$\vec{c} := p_{\vec{a}}\left(\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\right)$ auf der 1. Achse bis auf das Vorzeichen dem $\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$, wobei $0 \leq \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \leq \pi$, also

$\vec{c} = p_{\vec{a}}\left(\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ und damit $\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = p_{\vec{a}}\left(\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\right) \cdot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$. Damit ist die Bezeichnung

Richtungskosinus gerechtfertigt $\vec{c}_{\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}} = \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$.

Letztendlich gelten die Zusammenhänge $\sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \cos \sphericalangle(\vec{b}, \vec{s})$, $\sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \sin \left(\cos^{-1} \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} \right) \right)$

und $\|\vec{s}\|^2 = \vec{s} \cdot \vec{s} = 1 - \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} \right)^2 = \sin^2 \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$. Vgl. auch $\sin^2 \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) + \cos^2 \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 1$, da hier

$0 \leq \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \leq \pi$.

In der Physik wird gerne für den Ortsvektor $\vec{r}_0 := \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$ und für die Einheitsvektoren - entstanden

aus dem Körper der Quaternionen - \vec{i} , \vec{j} und \vec{k} gesetzt. Mit $\vec{r} = r_i \cdot \vec{i} + r_j \cdot \vec{j} + r_k \cdot \vec{k}$ erhalten wir nun drei Richtungskosinus

$$\vec{c}_{\vec{i}} = p_{\vec{i}}(\vec{r}_0) = (\vec{r}_0 \cdot \vec{i}) \vec{i} = \frac{r_i}{\|\vec{r}\|} \vec{i} = \cos \sphericalangle(\vec{i}, \vec{r}) \vec{i}$$

$$\vec{c}_{\vec{j}} = p_{\vec{j}}(\vec{r}_0) = (\vec{r}_0 \cdot \vec{j}) \vec{j} = \frac{r_j}{\|\vec{r}\|} \vec{j} = \cos \sphericalangle(\vec{j}, \vec{r}) \vec{j}$$

$$\vec{c}_{\vec{k}} = p_{\vec{k}}(\vec{r}_0) = (\vec{r}_0 \cdot \vec{k}) \vec{k} = \frac{r_k}{\|\vec{r}\|} \vec{k} = \cos \sphericalangle(\vec{k}, \vec{r}) \vec{k}$$

mit

$$\vec{c}_{\vec{i}} + \vec{c}_{\vec{j}} + \vec{c}_{\vec{k}} = \frac{r_i}{\|\vec{r}\|} \vec{i} + \frac{r_j}{\|\vec{r}\|} \vec{j} + \frac{r_k}{\|\vec{r}\|} \vec{k} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \vec{r}_0$$

und

$$\|\vec{c}_{\vec{i}}\|^2 + \|\vec{c}_{\vec{j}}\|^2 + \|\vec{c}_{\vec{k}}\|^2 = 1$$

sowie

$$\|\vec{c}_{\vec{i}} + \vec{c}_{\vec{j}} + \vec{c}_{\vec{k}}\| = \|\vec{r}_0\| = 1.$$

Ende des Exkurses

Wird fortgesetzt.