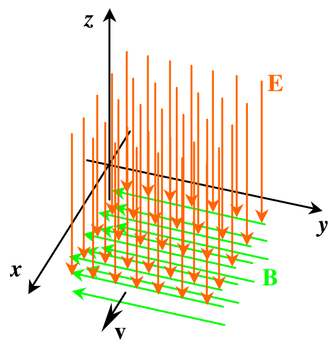
Bewegte Felder

Im Folgenden betrachten wir elektrische und magnetische Felder. Hier wird untersucht, wie sie unter Bewegung transformieren. Dabei wird vorausgesetzt, dass irgendein Objekt diese Felder generiert. Ich beziehe mich bei der Berechnung der Einfachheit halber auf ein kartesisches Koordinatensystem mit den Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$. Ich beschränke mich hier auf konkrete Beispiele, die deutlich machen, wie die Transformation wirkt. Die berechneten Felder beziehen sich immer auf die bewegten Koordinatensysteme. Soll das ruhende Koordinatensystem mit einbezogen werden, so sind 6 Koordinaten notwendig, d.h. die Stelle an der sich der Ursprung des bewegten Koordinatensystem befindet. Besser wäre es sogar, das begleitende Dreibein zur Beschreibung heranzuziehen. Dies soll hier aber nicht geschehen, da die Darstellung schwieriger ist. Der Anfänger wäre überfordert.

Bewegte magnetische Felder

1. Ein homogenes Feld wird bewegt



Es sei $\mathbf{B}(x,y,z) = -B\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{v}(x,y,z) = v\mathbf{e}_1$. Die homogene Magnetfelddichte besitzt eine Richtung in negativer y-Achse, die Bewegung ist in positiver x-Achse. Die Transformation wird durch $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ beschrieben. Dazu rechne ich erst das zugehörige Flächenelement aus. Es ist

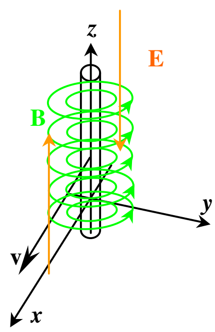
$$*(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = v\mathbf{e}_1 \times (-B)\mathbf{e}_2 = -vB(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2).$$

Dem Flächenelement $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ wird der Vektor $\mathbf{e}_3$ zugeordnet. Diese Zuordnung ist durch die positive Orientierung des Vektorraumes durch die Physiker definiert. Es gilt folglich

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -vB\mathbf{e}_3.$$

Die Einheit der bewegten Magnetfelddichte ist $1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2} = 1\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$, also die Einheit eines elektrischen Feldes. Somit erhalten wir $\mathbf{E}(x,y,z) = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = -vB\mathbf{e}_3$. Insbesondere steht das elektrische Feld senkrecht auf der Magnetfelddichte. Hier sollte Vorsicht walten. Der Beobachter „sieht“ als Außenstehender ein elektrisches Feld, die Magnetfelddichte „sieht“ er nicht. Er kann nur aus der Ruhe der Bewegung wissen, dass hier eine Magnetfelddichte bewegt wird. Befindet sich ein ruhender Leiter der Länge $\boldsymbol{\ell} = \ell_1\mathbf{e}_1 + \ell_2\mathbf{e}_2 + \ell_3\mathbf{e}_3$ in der bewegten Magnetfelddichte, so wird durch das elektrische Feld die Spannung $u_{\mathrm{ind}} = -\mathbf{E}(x,y,z) \bullet \boldsymbol{\ell} = vB\ell_3\mathbf{e}_3^2$ induziert. Hierbei wird das natürliche Skalarprodukt verwendet, wobei $\mathbf{e}_3^2 = 1$ den Richtungsanteil beschreibt. Hier ist zu beachten, dass die Induktionsspannung auf die Bewegungsrichtung des Leiters festgelegt ist.

2. Ein stromdurchflossener Leiter wird bewegt



Die Magnetfelddichte um einen zylindrischen stromdurchflossenen Leiter wird im Abstand $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ durch $\mathbf{B}(x,y,z) = \mu_0 \cdot \frac{I}{2r\pi}(-y\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2)$ beschrieben, wobei μ_0 die Permeabilität mit der Einheit $[\mu_0] = 1\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$ ist. Der Leiter ruht im Koordinatensystem in der z-Achse und die technische Stromrichtung ist durch die Richtung der positiven z-Achse definiert. Die Richtung und Stärke der Magnetfelddichte wird meist durch Feldlinien dargestellt. In einer Schnittzeichnung sind es konzentrische Kreise, die in Richtung positiver z-Achse rechtsherum drehen. Der Leiter wird nun in positiver x-Achse mit der Geschwindigkeit v bewegt, also $\mathbf{v}(x,y,z) = v\mathbf{e}_1$. Es folgt

$$*(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = v\mathbf{e}_1 \times \left(\mu_0 \cdot \frac{I}{2r\pi}(-y\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2)\right) = \mu_0 \cdot \frac{I}{2r\pi} vx(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2).$$

Die Einheit ist wieder die einer elektrischen Feldstärke. Durch die positive Orientierung wird dem Flächenelement $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ wieder $\mathbf{e}_3$ zugeordnet. Also

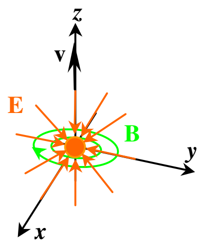
$$\mathbf{E}(x,y,z)=\mathbf{v}\times\mathbf{B}=\mu_0\cdot\frac{I}{2r\pi}vx\mathbf{e}_3 .$$

Der bewegte Leiter besitzt nun von außen betrachtet ein elektrisches Feld. Das reale **E**-Feld ist schwierig darzustellen. In der Ebene $x=0$ ist die **E**-Feldstärke null. In Bezug auf die Bewegungsrichtung ist das **E**-Feld vor dem Leiter positiv und hinter dem Leiter negativ.

Ich habe hier eine vereinfachte Magnetfelddichte angenommen. Nach Biot-Savart ist die magnetische Felddichte etwas fassförmig. Der Leser berechne auch $\mathbf{v}(x,y,z)=-v\mathbf{e}_3$ und vergleiche.

Bewegte elektrische Felder

3. Das bewegte Elektron



Das im Ursprung ruhende Elektron wird durch $\mathbf{E}(x,y,z)=\frac{-e}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2+z\mathbf{e}_3)$ beschrieben. Mit $\mathbf{v}(x,y,z)=v\mathbf{e}_3$ folgt

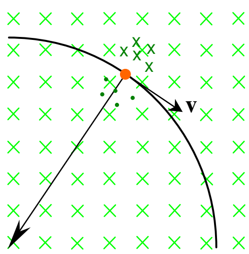
$$\begin{aligned}*(\mathbf{v}\times\mathbf{E})&=v\mathbf{e}_3\times\left(\frac{-e}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2+z\mathbf{e}_3)\right)\\&=\frac{-ev}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(x\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_2)\\&=\frac{-ev}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(x\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1-y\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)\end{aligned}$$

Nun transformieren wir und erhalten

$$*(\mathbf{v}\times\mathbf{E})=\frac{ev}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(-x\mathbf{e}_2+y\mathbf{e}_1)=\frac{ev}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(y\mathbf{e}_1-x\mathbf{e}_2).$$

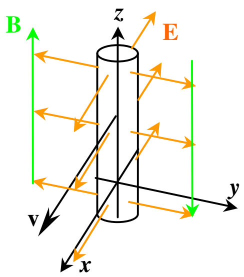
Durch die Multiplikation mit der Permittivität ε_0, $[\varepsilon_0]=1\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$ und der Permeabilität μ_0 bekommen wir eine Magnetfelddichte

$$\mathbf{B}(x,y,z)=\mu_0\varepsilon_0\frac{ev}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(y\mathbf{e}_1-x\mathbf{e}_2)=\mu_0\frac{ev}{4\pi r^3}(y\mathbf{e}_1-x\mathbf{e}_2).$$



Natürlich steht die magnetische Flussdichte senkrecht auf dem elektrischen Feld. Der Vergleich mit dem stromdurchflossenen Leiter zeigt eine Übereinstimmung mit der Richtung der Magnetfelddichte. Befindet sich das Elektron in einem magnetischen Feld, so wird es in Richtung der geringeren Feldstärke abgelenkt. Für das Proton hat das **B**-Feld die entgegengesetzte Richtung. Da keine Tangentialbeschleunigung vorhanden ist, zeigt der Beschleunigungsvektor an jeder Stelle auf einen gemeinsamen Punkt. Dies ist der Mittelpunkt eines Kreises.

4. Der bewegte geladene Leiter



Der geladene Leiter befinde sich in der z-Achse. Das elektrische Feld sei vereinfacht durch $\mathbf{E}(x,y,z)=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r\ell}(x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2)$ dargestellt. Er werde in Richtung der x-Achse mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(x,y,z)=v\mathbf{e}_1$ bewegt. Wir erhalten

$$\begin{aligned}*(\mathbf{v}\times\mathbf{E})&=v\mathbf{e}_1\times\left(\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r\ell}(x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2)\right)\\&=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r\ell}vy(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2).\end{aligned}$$

Nach Transformation endlich

$$\mathbf{v}\times\mathbf{E}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r\ell}vy\mathbf{e}_3.$$

Die Magnetfelddichte ist folglich $\mathbf{B}(x,y,z)=\mu_0\varepsilon_0\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r\ell}vy\mathbf{e}_3=\mu_0\frac{Q}{2\pi r\ell}vy\mathbf{e}_3$.

Auch hier gilt das bereits unter 2. gesagte, so dass ich mich hier auf die zwei unterschiedlichen Richtungen der magnetischen Felddichte beschränke.

Berechnen Sie auch $\mathbf{v}(x,y,z)=-v\mathbf{e}_3$! Vergleiche!

Bewegte Planeten

Das im Ursprung ruhende Gravitationsfeld wird durch $\mathbf{G}(x,y,z) = -\gamma \frac{M}{r^3}(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3)$ beschrieben. Der Einfachheit halber bewege sich dieses Feld auf einer Kreisbahn. Dazu verschieben wir den Planeten auf die Kreisbahn $\mathbf{R}(t) = R\left(\cos\frac{v}{R}t\,\mathbf{e}_1 + \sin\frac{v}{R}t\,\mathbf{e}_2\right)$. Dann bewegt sich der Planet mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(x,y,z,t) = -v\left(\sin\frac{v}{R}t\,\mathbf{e}_1 - \cos\frac{v}{R}t\,\mathbf{e}_2\right)$. Das Gravitationsfeld bezüglich des Ursprungs wird nun durch

$$\mathbf{G}(x,y,z) = -\gamma \frac{M}{\left\|\mathbf{x} - \mathbf{R}(t)\right\|^3}\left(\left(x - R\cos(\tfrac{v}{R}t)\right)\mathbf{e}_1 + \left(y - R\sin(\tfrac{v}{R}t)\right)\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3\right)$$

beschrieben. Hierbei ist $\mathbf{x}$ der Vektor, der auf den Punkt (x,y,z) zeigt (Ortsvektor).
Für das bewegte Gravitationsfeld folgt

$$\begin{aligned}
*(\mathbf{v}\times\mathbf{G}) &= -v\left(\sin\tfrac{v}{R}t\,\mathbf{e}_1 - \cos\tfrac{v}{R}t\,\mathbf{e}_2\right)\times\left(-\gamma\frac{M}{\left\|\mathbf{x}-\mathbf{R}(t)\right\|^3}\left((x - R\cos\tfrac{v}{R}t)\mathbf{e}_1 + (y - R\sin\tfrac{v}{R}t)\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3\right)\right) \\
&= \gamma\frac{Mv}{\left\|\mathbf{x}-\mathbf{R}(t)\right\|^3}\left(\left(x\cos\tfrac{v}{R}t - R\cos^2\tfrac{v}{R}t + y\sin\tfrac{v}{R}t - R\sin^2\tfrac{v}{R}t\right)\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2\right. \\
&\qquad \left. - z\cos\tfrac{v}{R}t\,\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3 - z\sin\tfrac{v}{R}t\,\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1\right) \\
&= \gamma\frac{Mv}{\left\|\mathbf{x}-\mathbf{R}(t)\right\|^3}\left(\left(x\cos\tfrac{v}{R}t + y\sin\tfrac{v}{R}t - R\right)\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2 - z\cos\tfrac{v}{R}t\,\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3 - z\sin\tfrac{v}{R}t\,\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1\right)
\end{aligned}$$

Das neue bewegte Gravitationsfeld Γ ist folglich

$$\Gamma(x,y,z) = -\gamma\frac{Mv}{\left\|\mathbf{x}-\mathbf{R}(t)\right\|^3}\left(z\cos\tfrac{v}{R}t\,\mathbf{e}_1 + z\sin\tfrac{v}{R}t\,\mathbf{e}_2 + \left(R - x\cos\tfrac{v}{R}t - y\sin\tfrac{v}{R}t\right)\mathbf{e}_3\right).$$

Offen bleibt, um was für ein Feld es sich hier handelt.

Abschließende Bemerkung

Der geneigte Rezipient möge bitte beachten, dass es sich hier um reine Mathematik handelt. Es sollte durch physikalische Messungen möglich sein, diese Ergebnisse zu überprüfen. Leider habe ich bis heute keine derartigen Untersuchungen gefunden. Alle Formeln beruhen auf den newtonschen Axiomen und, obwohl Coulomb in der Dynamik nicht anwendbar ist, auf dem coulombschen Gesetz. Hier ist folglich noch ein richtiges Fundament zu erarbeiten. Zum Induktionsgesetz will ich noch bemerken, dass bei der Bewegung des Leiters allen Elektronen ein Magnetfeld zugeschrieben werden kann. Für den ruhenden Leiter im äußeren Magnetfeld existiert im Mittel über alle Elektronen das resultierende Magnetfeld im Leiter nicht. Wird der Leiter bewegt, so werden die freien Elektronen zusätzlich aus ihrer Bahn lokal auf Kreisbahnen gelenkt. Die gebundenen Elektronen werden in ihren Orbitalen verschoben, also polarisiert. Mit anderen Worten: Die Leitungselektronen tragen nichts zur Induktionsspannung bei.

In der modernen Fassung werden Differentialformen verwendet. Wir deuten $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$ und $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$ als Zweiform, also

$$\mathbf{B}(x,y,z) = B_1 dy\wedge dz + B_2 dz\wedge dx + B_3 dx\wedge dy \text{ und } \mathbf{D}(x,y,z) = D_1 dy\wedge dz + D_2 dz\wedge dx + D_3 dx\wedge dy\,.$$

Das Kreuzprodukt wird durch die Verjüngung $\mathbf{E} = \iota_{\mathbf{v}}(\mathbf{B})$ und $\mathbf{H} = \iota_{\mathbf{v}}(\mathbf{D})$ dargestellt. Zu beachten ist die Definition der Bewegungsrichtung.