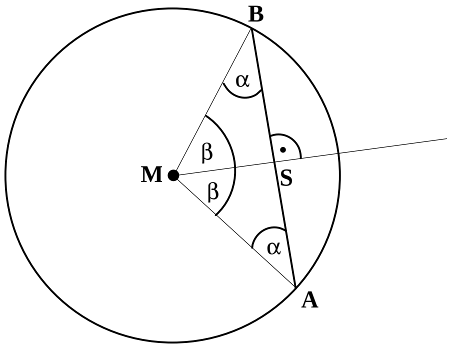
Umkreis eines n-Ecks

Soll ***der Umkreis*** eines Dreiecks, Vierecks, usw. konstruiert werden, so ***liegt der Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten einer jeden Seite***.

Der Beweis ist sehr einfach.

1. Die Mittelsenkrechte einer Strecke ist Symmetrieachse dieser Strecke, da sie senkrecht aufeinander stehen. Folglich ist der Abstand eines beliebigen Punktes auf der Symmetrieachse zu den Endpunkten der Strecke gleich. Dies ist der Radius.
2. Ist umgekehrt die Sehne $\overline{AB}$ und der Kreis mit Mittelpunkt M gegeben, so ist $|\overline{MA}| = |\overline{MB}|$ der Radius. Das Dreieck ΔMAB ist folglich gleichschenklig und damit $\sphericalangle MAB = \sphericalangle ABM$. Die Winkelhalbierende zeigt, dass $\Delta MSB \cong \Delta MAS$ ist. Wegen $2\alpha + 2\beta = 180°$, also $\alpha + \beta = 90°$, ist der 90°-Winkel in S nachgewiesen.



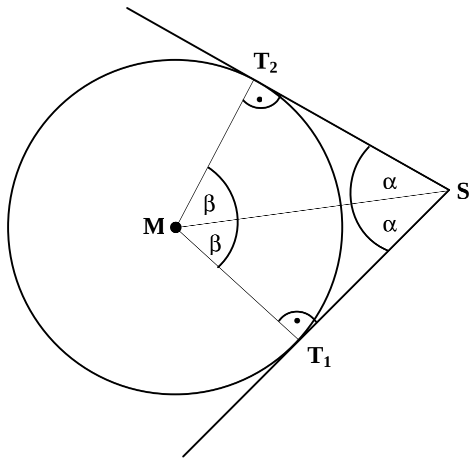
Inkreis eines n-Ecks

Alle Konstruktionen eines **berührenden Kreises** zweier sich **schneidender Geraden** (Halbgeraden oder Strahlen, Strecken) geht **immer** auf die Konstruktion der **Winkelhalbierenden** zurück.

Mit anderen Worten: ***Der Mittelpunkt des Berührkreises liegt immer auf der Winkelhalbierenden zweier sich schneidender Geraden.***

Beweis:
Ausgehend von folgender Figur sind zwei Aussagen zu beweisen.

1. Schneiden sich zwei Geraden in einem Punkt **S** und ist **M** der Mittelpunkt des Berührkreises beider Geraden, so ist $\overline{\mathbf{SM}}$ ein Teil der Winkelhalbierenden.
2. Schneiden sich zwei Geraden in einem Punkt **S**, so liegt der Mittelpunkt **M** des Berührkreises auf der Winkelhalbierenden dieser Geraden.



Zu 1. Wir haben nachzuweisen, dass $\sphericalangle T_1SM = \sphericalangle MST_2$ ist. Dazu genügt es die Kongruenz der Dreiecke $\Delta T_1SM \cong \Delta MST_2$ nachzuweisen. Wegen $|\overline{MT_1}| = |\overline{MT_2}|$ (Radius) und gleicher Seitenlänge $|\overline{MS}|$ sowie des 90°-Winkels sind die Dreiecke nach **Ssw** kongruent.

Zu 2. Wir haben nachzuweisen, dass $|\overline{MT_1}| = |\overline{MT_2}|$ ist. Dies ist aber offensichtlich mit dem Kongruenzsatz **wsw** erfüllt, denn beide Dreiecke haben gleiche Winkel und die Seite $\overline{MS}$ gemeinsam.