Faktorisierungen und Teilbarkeiten natürlicher Zahlen

Erinnerung: Eine natürliche Zahl heißt **faktorisierbar**, wenn sie als Produkt mit Faktoren geschrieben werden kann.

Beispiel: $21 = 1 \cdot 21$ oder $21 = 3 \cdot 7$

Natürlich gilt das Kommutativgesetz! Deshalb genügt es alle Faktorisierungen anzugeben, wo der erste Faktor kleiner als der zweite Faktor ist oder beide Faktoren gleich sind.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 36 &= 1 \cdot 36 \\ &= 2 \cdot 18 \\ &= 3 \cdot 12 \\ &= 4 \cdot 9 \\ &= 6 \cdot 6 \end{aligned}$$

Faktoren liest du von oben nach unten (1. Faktor) und dann von unten nach oben (2. Faktor) ab.

Festlegung:

1. Eine natürliche Zahl, die in jeder Faktorisierung stets die 1 als Faktor besitzt heißt **triviale Faktorisierung**.
2. Natürliche Zahlen, außer 1 und 0, die nur triviale Faktorisierungen besitzen heißen **Primzahlen**.

Beispiele: 2; 3; 5; 7; 11 besitzen nur triviale Faktorisierungen und sind damit Primzahlen.

Teiler natürlicher Zahlen

Festlegung:
Eine natürliche Zahl x heißt Teiler einer natürlichen Zahl y, wenn x ein Faktor von y ist.

Beispiel: $6 = x$ und $42 = y$, denn $42 = 6 \cdot 7$. 6 ist also ein Teiler von 42.

Dafür schreibst du kurz: $6 \mid 42$ **und liest** 6 **teilt** 42**.**

Aufgabe: Finde alle Teiler von 68!
Lösung: Diese Aufgabe ist gleichbedeutend mit: Finde alle Faktorisierungen von 68.

$$\begin{aligned} 68 &= 1 \cdot 68 \\ &= 2 \cdot 34 \\ &= 4 \cdot 17 \end{aligned}$$

Bis auf Kommutativität, gibt es keine weiteren Faktorisierungen. Die Teiler von 68 sind folglich 1; 2; 4; 17; 34; 68. Hierfür schreibst du wieder kurz: $T(68) = \{1; 2; 4; 17; 34; 68\}$ und liest: Die Teiler von 68 sind 1; 2; 4; 17; 34; 68.

Du weißt natürlich: 5 **teilt nicht** 21.

Dafür schreibst du $5 \nmid 21$**.**

Teilbarkeitsregeln

Zuerst stellen wir vier wichtige Regeln auf.

Die erste Regel beruht auf dem Assoziativgesetz.

Jedoch zuerst wieder ein Beispiel. $7 \mid 28$, denn $28 = 7 \cdot 4$. Ich behaupte $7 \mid 28 \cdot 11$ und beweise es sofort.

$$\begin{aligned} 28 \cdot 11 &= (7 \cdot 4) \cdot 11 \\ &= 7 \cdot (4 \cdot 11) \end{aligned}$$

Die 7 ist folglich ein Faktor von $28 \cdot 11$, also $7 \mid 28 \cdot 11$.

Dies ist wieder ein allgemeines Prinzip, denn das Assoziativgesetz gilt für alle natürlichen Zahlen.

1. Aus $x \mid a$ folgt $x \mid a \cdot b$.

Merke: Jeder Teiler eines beliebigen Faktors einer natürlichen Zahl ist auch Teiler jedes Produktes mit diesem Faktor.

Für die zweite Regel betrachten wir ein einfaches Beispiel. Wir suchen Teiler der Zahl 60. Du siehst sofort $60 = 6 \cdot 10$ und erkennst auch $3 \mid 6$ und $5 \mid 10$. Jetzt schließt du messerscharf $3 \cdot 5 \mid 6 \cdot 10$, also $15 \mid 60$. Schreiben wir es auf.

$$\begin{aligned} 60 &= 6 \cdot 10 \\ &= (3 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 2) && \text{faktorisiert} \\ &= 3 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 2 && \text{Assoziativgesetz verwendet} \\ &= 3 \cdot (5 \cdot 2) \cdot 2 && \text{Kommutativgesetz verwendet} \\ &= (3 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 2) && \text{Assoziativgesetz verwendet} \end{aligned}$$

2. Aus $x \mid a$ und $y \mid b$ folgt $x \cdot y \mid a \cdot b$.

Merke: Das Produkt der Teiler verschiedener Faktoren einer natürlichen Zahl ist auch Teiler des Produktes der Faktoren.

Die dritte Regel ist eigentlich eine Anwendung der zweiten Regel.

Beispiel: Du weißt $2 \mid 330$ und $3 \mid 330$. Du faktorisierst $330 = 2 \cdot 165$. Demzufolge muss $3 \mid 165$ richtig sein und schließt nun nach Regel 2, da 2 den ersten Faktor und 3 den zweiten Faktor teilt, auf $6 \mid 330$.

Das wusste ich auch vorher schon, meinst du. Ich antworte dir aber, dass hier ein allgemeines Prinzip dahinter steckt. Es lautet:

Teilen zwei natürliche Zahlen eine dritte natürliche Zahl und haben die zwei natürlichen Zahlen keinen gemeinsamen Teiler außer der 1, so teilt auch das Produkt der zwei natürlichen Zahlen die dritte natürliche Zahl.

Beispiel: $9 \mid 630$ und $14 \mid 630$. Die 9 und 14 haben keinen gemeinsamen Teiler, also gilt auch $9 \cdot 14 \mid 630$.

Dieses Prinzip gilt für beliebig viele Teiler, solange alle Teiler selbst keinen von 1 verschiedenen gemeinsamen Teiler haben.

3. Haben x und y außer 1 keinen Teiler, so folgt aus $x \mid a$ und $y \mid a$ auch $x \cdot y \mid a$.

Merken wir uns diese Regel wenigstens für Primzahlen.

Merke: Teilen zwei oder mehrere Primzahlen eine natürliche Zahl, so ist das Produkt dieser Primzahlen auch Teiler dieser natürlichen Zahl.

Die vierte und letzte Regel beruht auf dem Distributivgesetz.

Beispiel: „Ich weiß $6 \mid 42$ sowie $6 \mid 54$ und behaupte $6 \mid (42+54)$." „Das erkläre mir bitte.", sage ich. „Das ist ganz einfach.", antwortest du mir. „Ich verwende das Distributivgesetz. $6 \mid 42$ heißt nichts anderes als $42 = 6 \cdot 7$ und $6 \mid 54$ entsprechend $54 = 6 \cdot 9$. Bilde ich jetzt die Summe von 42 und 54, so erhalte ich

$$\begin{aligned} 42 + 54 &= 6 \cdot 7 + 6 \cdot 9 \\ &= 6 \cdot (7+9)." \end{aligned}$$

„Das habe ich jetzt verstanden. Gilt diese Regel immer?", gebe ich zu bedenken. „Natürlich, dies ist doch ein allgemeines Prinzip! Das Distributivgesetz gilt für alle natürlichen Zahlen."

4. Aus $x \mid a$ und $x \mid b$ folgt $x \mid (a+b)$.

Merke: Teilt eine natürliche Zahl die Summanden einer natürlichen Zahl so ist sie auch Teiler der Summe.

Die Summenregel lässt sich auch verallgemeinern, indem du Regel 1 und 4 zusammenführst.

Schreiben wir sie als Aussageform (Formel):

$$x \mid a \wedge x \mid b \overset{\text{R1}}{\Rightarrow} x \mid a \cdot n \wedge x \mid b \cdot m \overset{\text{SR}}{\Rightarrow} x \mid (a \cdot n + b \cdot m)$$

R1 steht für Regel 1 und SR für Summenregel. Das Zeichen $\wedge$ wird als „und" gelesen.

Nun möchtest du diese vier Regeln auch anwenden, um Teiler zu finden.

Aufgabe: Finde alle Teiler von 770!

Aus $770 = 77 \cdot 10$ (Regel 2) lese ich die Teiler 10, 77 sowie 2, 5, 7 und 11 (Regel 2) ab. Außerdem habe ich noch die Teiler $2 \cdot 7$, $2 \cdot 11$ und weitere Produkte. Damit du alle Teiler schneller findest, schreibst du sie als Faktorisierungen.

$$\begin{aligned} 770 &= 1 \cdot 770 \\ &= 2 \cdot (5 \cdot 77) \\ &= 5 \cdot (2 \cdot 77) \\ &= 7 \cdot (10 \cdot 11) \\ &= 10 \cdot 77 \\ &= 11 \cdot (7 \cdot 10) \\ &= 14 \cdot (5 \cdot 11) \\ &= 22 \cdot (5 \cdot 7) \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} 770 &= 1 \cdot 770 \\ &= 2 \cdot 385 \\ &= 5 \cdot 154 \\ &= 7 \cdot 110 \\ &= 10 \cdot 77 \\ &= 11 \cdot 70 \\ &= 14 \cdot 55 \\ &= 22 \cdot 35 \end{aligned}$$

Du erhältst: $T(770) = \{1; 2; 5; 7; 10; 11; 14; 22; 35; 55; 70; 77; 110; 154; 385; 770\}$.

Das war ein schweres Stück Arbeit. Gibt es nicht einfache Regeln für die ersten 10 oder 20 Zahlen, fragst du dich sicher? In der Tat die gibt es!

Elementare Teilbarkeiten

Damit du alle Teiler schnell finden kannst, musst du wissen, wann Primzahlen Teiler sind. Einige kennst du schon.

1. Eine natürliche Zahl ist durch 2 bzw. 5 teilbar, wenn die letzte Ziffer der natürlichen Zahl durch 2 bzw. 5 teilbar ist.

Betrachten wir als Beispiel 56. Du zerlegst: $56 = 5 \cdot 10 + 6$. Da $2 \mid 10$ und $2 \mid 6$, folgt aus der verallgemeinerten Summenregel auch $2 \mid 56$.

Für 5 betrachte 135. Du zerlegst $135 = 13 \cdot 10 + 5$.

Jede natürliche Zahl lässt sich auf diese Weise zerlegen. Ist a die letzte Ziffer, so schreibt sich die natürliche Zahl als $b \cdot 10 + a$. Nun teilt 2 bzw. 5 die Zahl 10. Da 2 und 5 die Ziffer a teilt, folgt aus der Summenregel die Behauptung.

2. Eine natürliche Zahl ist durch 3 bzw. durch 9 teilbar, wenn die Quersumme der natürlichen Zahl durch 3 bzw. 9 teilbar ist.

Die Quersumme einer natürlichen Zahl ist als Summe aller Ziffern erklärt.

Beispiel: $5\,782$ liefert die Quersumme $5 + 7 + 8 + 2 = 22$.

Du willst sicher wieder die verallgemeinerte Summenregel anwenden. Hierbei musst du aber die Teilbarkeiten der natürlichen Zahlen $9; 99; 999; 9\,999; 99\,999; \ldots$ ausnutzen. Sie sind alle durch 9 bzw. 3 teilbar.

Beispiel: $57\,825$. Du schreibst

$$\begin{aligned}
57\,825 &= 5 \cdot (9\,999 + 1) + 7 \cdot (999 + 1) + 8 \cdot (99 + 1) + 2 \cdot (9 + 1) + 5 \\
&= 5 \cdot 9\,999 + 5 + 7 \cdot 999 + 7 + 8 \cdot 99 + 8 + 2 \cdot 9 + 2 + 5 \\
&= 5 \cdot 9\,999 + 7 \cdot 999 + 8 \cdot 99 + 2 \cdot 9 + 5 + 7 + 8 + 2 + 5 \\
&= \left(5 \cdot 1111 + 7 \cdot 111 + 8 \cdot 11 + 2\right) \cdot 9 + \left(5 + 7 + 8 + 2 + 5\right) \\
&= \left(5 \cdot 1111 + 7 \cdot 111 + 8 \cdot 11 + 2\right) \cdot 9 + 27 \\
&= \left(5 \cdot 1111 + 7 \cdot 111 + 8 \cdot 11 + 2\right) \cdot 9 + 3 \cdot 9
\end{aligned}$$

Jetzt schließt du sonnenklar auf $9 \mid 57\,825$.

Listen wir der Vollständigkeit halber auch noch 4, 6, 8 und 10 auf.

3. Eine natürliche Zahl ist durch 4 bzw. 25 teilbar, wenn die letzten beiden Ziffern der natürlichen Zahl als Zahl gelesen durch 4 bzw. 25 teilbar sind.

Dazu zerlegst du die natürliche Zahl in $a \cdot 100 + b = a \cdot 4 \cdot 25 + b$. Wenn 4 bzw. 25 auch b teilt, muss 4 bzw. 25 auch $a \cdot 100 + b$ teilen.

Beispiel: $23\,796 = 237 \cdot 100 + 96$. Aus $4 \mid 96$ und $4 \mid 100$ folgt $4 \mid 23\,796$.

4. Eine natürliche Zahl ist durch 6 teilbar, wenn die natürliche Zahl durch 2 und durch 3 teilbar ist. (Regel 3)
5. Eine natürliche Zahl ist durch 10 teilbar, wenn die letzte Ziffer der natürlichen Zahl eine 0 ist. (Regel 3)
6. Eine natürliche Zahl ist durch 8 bzw. 125 teilbar, wenn die letzten drei Ziffern der natürlichen Zahl als Zahl gelesen durch 8 bzw. 125 teilbar ist.

Dazu zerlegst du die natürliche Zahl in $a \cdot 1\,000 + b = a \cdot 8 \cdot 125 + b$. Wird b von 8 bzw. 125 geteilt, so auch die Summe nach der Summenregel.

7. Eine natürliche Zahl ist durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme der natürlichen Zahl durch 11 teilbar ist.

Was ist eine alternierende Quersumme?

Beispiel: $274\,813$. Bilde die Summen $7+8+3=18$ und $2+4+1=7$ sowie nun die Differenz $18-7=11$.

Jetzt kannst du sagen $11 \mid 274\,813$.

Dazu benutzt du die Teilbarkeiten $11;\ 99;\ 990+11=1\,001;\ 9\,999;\ 99\,990+11=100\,001;\ 999\,999;\ \ldots$ und findest

$$\begin{aligned} 274\,813 &= 3+1\cdot(11-1)+8\cdot(99+1)+4\cdot(1\,001-1)+7\cdot(9\,999+1)+2\cdot(100\,001-1) \\ &= 3+8+7-(1+4+2)+[1\cdot 11+8\cdot 99+4\cdot 1\,001+7\cdot 9\,999+2\cdot 100\,001] \\ &= 18-7+[1\cdot 11+8\cdot 99+4\cdot 1\,001+7\cdot 9\,999+2\cdot 100\,001] \\ &= 11+[1\cdot 11+8\cdot 99+4\cdot 1\,001+7\cdot 9\,999+2\cdot 100\,001] \end{aligned}$$

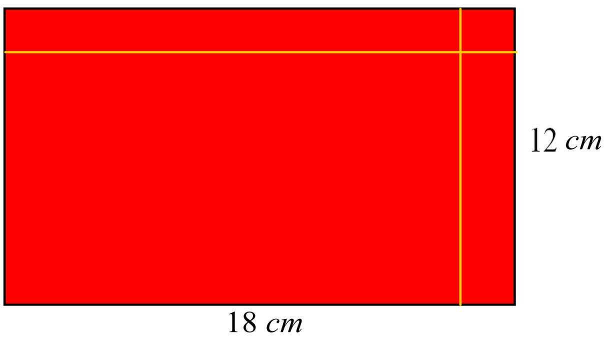
Die eckige Klammer ist durch 11 teilbar. Folglich ist auch $274\,813$ durch 11 teilbar.

Die Regeln werden immer komplizierter. Das war den Mathematikern aber nicht so wichtig, denn sie besaßen keinen Taschenrechner! Er ist gerade mal ca. 40 Jahre alt!

Damit schließt sich das Kapitel der Teilbarkeiten einer Zahl.

Der größte gemeinsame Teiler

Aria möchte mit ihrem Gelstift goldene Quadrate auf einen roten rechteckigen Karton mit den Kantenlängen von 12 cm und 18 cm erzeugen. Dazu zeichnet sie Linien in gleichen Abständen.



Sie will natürlich ihren Karton nicht verzeichnen und überlegt, welchen Abstand die Linien haben müssen, damit alle Quadrate gleich groß sind. Wenn x der Abstand der Linien ist, dann muss $x \mid 12$ und $x \mid 18$ erfüllt sein. x ist folglich ein gemeinsamer Teiler von 12 und 18.

Aria listet auf.

$$T(12)=\{1;2;3;4;6;12\}$$
$$T(18)=\{1;2;3;6;9;18\}$$

Gemeinsame Teiler unterstreicht sie. 1; 2; 3; 6. Dabei ist 6 die größte Zahl aller gemeinsamen Teiler. Diese Zahl erhält daher den Namen „**größter gemeinsamer Teiler**“.

Aria schreibt dafür $ggT(12;18)=6$. Der größte gemeinsame Teiler von 12 und 18 ist somit 6.

Eine Liste aller Teiler anzufertigen ist sehr aufwendig, wird doch nur der *ggT* benötigt. Deshalb sucht der Mathematiker nach Verfahren, die eine einfache Bestimmung des *ggTs* ermöglichen. Das ***Euklid*** (300 vor Christus) zugeschriebene Verfahren ist sehr effizient. Wir wissen schon

$$x \mid a \wedge x \mid b \overset{\text{R1}}{\Rightarrow} x \mid a \cdot n \wedge x \mid b \cdot m \overset{\text{SR}}{\Rightarrow} x \mid (a \cdot n + b \cdot m)$$

Ersetzen wir das Plus-Zeichen durch ein Minus-Zeichen und beachten, dass $a \cdot n - b \cdot m \in \mathbb{N}$ sein muss, so erhalten wir für $n=1$ den Fall

$$x \mid a \wedge x \mid b \Rightarrow x \mid (a - b \cdot m).$$

Beginnen wir mit einfachen **Beispielen**.

Überprüfen wir $ggT(12;18)=6$. Sei also x der *ggT*.

Dann muss x auch $18-12=6$ teilen. Wegen $12-6\cdot 2=0$ sind wir schon fertig und 6 ist der *ggT*.

Beispiel: Gesucht ist der größte gemeinsamer Teiler von 88 und 36. Sei x der *ggT*.

Wegen $88-36\cdot 2=16$ und $36-16\cdot 2=4$ sowie $16-4\cdot 4=0$, ist $ggT(88;36)=4$.

Das Verfahren ist folglich sehr schnell.

Wie aber finden wir bei großen Zahlen das m?

Lösen wir auf. Dazu betrachten wir

$$a - b \cdot m = r \Leftrightarrow a = b \cdot m + r.$$

Hier steht eine Divisionsaufgabe mit Rest r.

Bestimme $ggT(459;2\,778)$! Wir erhalten nacheinander

$2\,778 = 459 \cdot 6 + 24$, $459 = 24 \cdot 19 + 3$ und $24 = 3 \cdot 8 + 0$. Also $ggT(459;2\,778)=3$.

Bestimme $ggT(375;121)$! Wir erhalten nacheinander

$375 = 121 \cdot 3 + 12$, $121 = 12 \cdot 10 + 1$ und $12 = 1 \cdot 12 + 0$. Also $ggT(375;121)=1$. Sie sind **teilerfremd**.

Merke: Zwei natürliche Zahlen a, b heißen *teilerfremd*, wenn $ggT(a;b)=1$.

Zeige durch logisches Argumentieren, dass hierdurch wirklich der *ggT* bestimmt wird.

Bei kleinen Zahlen darf auch ein gemeinsamer Teiler herausgezogen werden.

$$\begin{aligned} ggT(3375;2115) &= 9 \cdot ggT(375;225) \\ &= 9 \cdot 5 \cdot ggT(75;45) \\ &= 9 \cdot 5 \cdot 5 \cdot ggT(15;9) \\ &= 3 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 5 \cdot ggT(5;3) \\ &= 3 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 5 \\ &= 675 \end{aligned}$$

Zeige nun $ggT(a;b;c) = ggT(ggT(a;b);c) = ggT(a;ggT(b;c)) = ggT(b;ggT(a;c))$.

Vielfache einer natürlichen Zahl

Vielfache einer natürlichen Zahl sind dir wohlbekannt. Zum Beispiel sind $3; 6; 9; 12; 15; \ldots$ Vielfache von 3. Jede dieser Zahlen lässt sich als $3 \cdot x = x \cdot 3$ für jede von null verschiedene Zahl x schreiben.

Der Mathematiker schreibt hierfür $x \cdot \mathbb{N}^*$ als Anweisung, wobei das Sternchen angibt, das null nicht vorkommt. Also

$$\{x \cdot 1;\ x \cdot 2;\ x \cdot 3;\ x \cdot 4;\ \ldots\}.$$

In den Schulbüchern schreibt man $V(x)$. Diese Menge heißt Vielfachmenge von x. In der geschweiften Klammer stehen folglich alle Vielfachen von x.

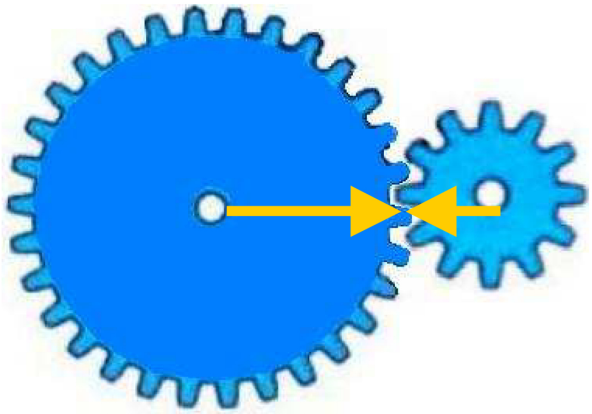
Das kleinste gemeinsame Vielfache

Beispiel: $4 \cdot \mathbb{N}^* = \{4 \cdot 1;\ 4 \cdot 2;\ 4 \cdot 3;\ 4 \cdot 4;\ \ldots\} = \{4;\ 8;\ 12;\ 16;\ 20;\ 24;\ \ldots\}$

Zwischen Teilern und Vielfachen besteht der Zusammenhang: $x \mid 48$, wenn 48 ein Vielfaches von x ist und umgekehrt, denn $48 = x \cdot y$.

Zum Beispiel $3 \mid 48 \Leftrightarrow 48 \in V(3) = 3 \cdot \mathbb{N}^*$, denn $48 = 3 \cdot 16$.

Betrachte das folgende Bild. Hier greifen Zahnräder ineinander. Dreht sich ein Zahnrad, so dreht sich auch das andere, aber in entgegengesetzten Richtungen.



Zähle nun die Zähne auf beiden Rädern und schreibe die natürliche Zahl in die Räder. Die Anzahl der vollen Umdrehungen multipliziert mit den Zähnen ist dann ein Vielfaches der Zähne, die sich an einer bestimmten Stelle vorbeibewegt haben.

Für das große Rad lautet die Vielfachen $30 \cdot x$, für das kleine Rad $12 \cdot y$. Die natürliche Zahl x gibt an, wie viele Umdrehungen das große und die natürliche Zahl y wie viele Umdrehungen das kleine Rad gemacht hat. Diese sind natürlich verschieden. Darum verwenden wir zwei verschieden Buchstaben.

Die Frage ist nun: Wann stehen sich die Pfeile zum ersten Mal wieder gegenüber, wenn die Drehrichtung der Räder nicht geändert wird?

Die Anzahl der Zähne, die sich an der Berührstelle vorbeibewegen ist für beide Räder gleich. Deshalb ist deine Forderung $30 \cdot x = 12 \cdot y$. Du fertigst also eine Tabelle an und trägst ein, wann die Vielfachen übereinstimmen. Beginne mit x.

x	1	2	3	4
$30\cdot x=12\cdot y$	$30=12\cdot y$	$60=12\cdot y$	$90=12\cdot y$	$120=12\cdot y$
y		5		10

Die Pfeile stehen sich zum ersten Mal wieder gegenüber, wenn das große Rad zwei und das kleine Rad fünf Umdrehungen gemacht hat. Dann haben sich 60 Zähne an der Markierung vorbeibewegt.

Mathematisch hast du mit der natürlichen Zahl 60 das ***kleinste gemeinsame Vielfache*** bestimmt.

Dafür schreibt der Mathematiker $kgV\left(30;12\right)=60$. Das kleinste gemeinsame Vielfache von 30 und 12 ist 60.

Vielfache des kleinsten gemeinsamen Vielfachen heißen ***gemeinsame Vielfache***. Es gilt somit:

$$gV\left(30;12\right)=60\cdot\mathbb{N}^*=V(60).$$

Ob es auch ohne Probieren geht, fragst du sicher. Aber ja!

Es gibt doch den größten gemeinsamen Teiler. Bestimmen wir ihn. Der größte gemeinsame Teiler von 30 und 12 ist 6. Damit gilt

$$30\cdot x=12\cdot y\Leftrightarrow 5\cdot x=2\cdot y.$$

Da 2 und 5 teilerfremd sind, ergeben sich die kleinsten Zahlen für x und y zu $x=2$ und $y=5$. Hieraus folgt sofort

$$kgV\left(30;12\right)=60.$$

Du kannst aber auch wie folgt vorgehen.

$$\begin{aligned}kgV\left(30;12\right)&=6\cdot kgV\left(5;2\right)\\&=6\cdot 10\\&=60\end{aligned}$$

Du hältst als Ergebnis fest: Sind a und b teilerfremd, so gilt

$$kgV\left(a;b\right)=a\cdot b$$

sowie

$$kgV\left(x;\ y\right)=ggT\left(x;\ y\right)\cdot kgV\left(\tfrac{x}{ggT(x;y)};\ \tfrac{y}{ggT(x;y)}\right).$$

Insbesondere gilt

$$kgV\left(a;1\right)=a.$$

Zeige nun für alle natürlichen Zahlen $a,b\in\mathbb{N}^*$ die Gleichheit

$$ggT\left(a;b\right)\cdot kgV\left(a;b\right)=a\cdot b.$$

Zeige darüber hinaus auch

$$kgV\left(a;b;c\right)=kgV\left(kgV\left(a;b\right);c\right)$$

und

$$kgV\left(x_1;\ldots;x_n\right)=ggT\left(x_1;\ldots;x_n\right)\cdot kgV\left(\tfrac{x_1}{ggT(x_1;\ldots;x_n)};\ldots;\tfrac{x_n}{ggT(x_1;\ldots;x_n)}\right).$$