Vorwort

Anlass dieses ersten Artikels ist der Versuch moderne Mathematik im Unterricht zu betreiben. Schneiden und tangieren unterscheiden sich sehr wohl und sollte auch so in Schulbücher und Unterricht einfließen. Eins ist sicher: Was nicht in den Schulbüchern steht, wird auch nicht gelehrt. Darüber hinaus sind Schulbücher voll mit Unsinnigkeiten, ja sogar falsche mathematische Fertigkeiten werden bis zum Abitur vermittelt. Na, dann viel Spaß beim Studium mit über 80 % Durchfallquote in den ersten Mathematikklausuren.
Ist moderne Mathematik für Schüler und Lehrer nicht mehr zu verstehen? Bringt das Moderne nicht einfachere Erkenntnisse?

Schneiden und Tangieren

Jeder Schüler, mancher Lehrer, fragt sich irgendwann einmal nach dem Unterschied zwischen einem Schnitt einer Gerade mit einer Kurve und der Tangente an diese Kurve. Oftmals werden hilflose Antworten, auch Tautologien auf diese Frage gegeben. Als Beispiel sollen folgende Kostproben dienen: Die Tangente berührt die Kurve in einem Punkt. Die Tangente ist die Grenzlage der Sekante durch den Punkt. Hier ist Präzision gefordert!

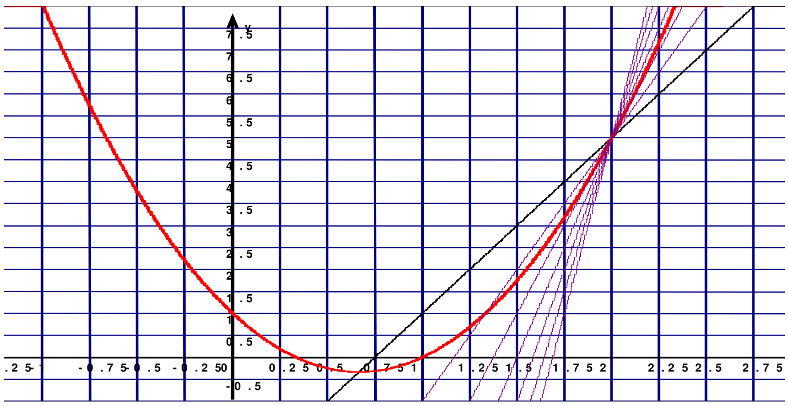
In diesem 1. Aufsatz soll endgültig Schluss gemacht werden. Es gibt eine klare und eindeutige Antwort auf diese Frage.

Ich stelle hier kurz die Idee vor. Der geneigte Leser kann dies dann weiter ausbauen.

Starten wir mit zwei Beispielen. Auf Anwendungen wird bewusst verzichtet.

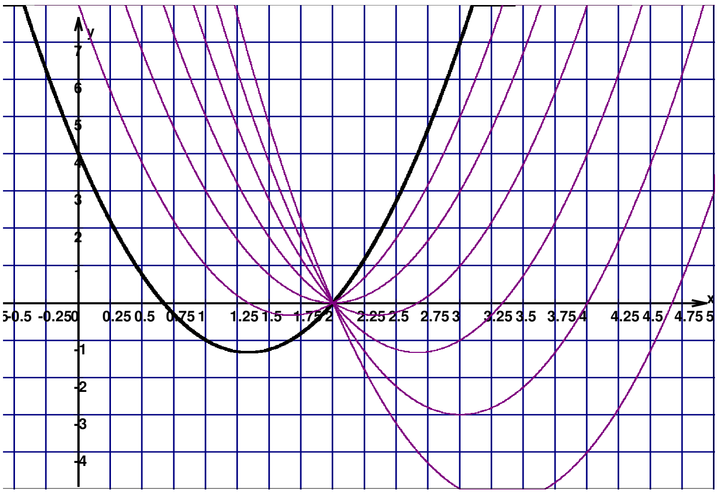
1. Beispiel

Gegeben ist die Funktion *f* definiert durch $f(x) := 3x^2 - 4x + 1$. Gesucht ist die Tangente im Punkt $T(2|5)$. Stellen wir alle Geraden g_m durch den Punkt *T* als Funktion auf. Natürlich verwendet man sofort die Punkt-Steigungsform, da sonst gerechnet werden muss und das hat nichts mit Mathematik zu tun. Sie lautet allgemein $g_m(x) := m(x-a) + f(a)$, also in diesem Fall $g_m(x) := m(x-2) + 5$. Die Graphen **G**(f) und **G**(g_m) schneiden sich im Punkt *T*, denn $5 = f(2) = g_m(2)$.



Betrachten wir nun die Differenzfunktion $d_m := f - g_m$. Wir erhalten mittels Faktorisierung

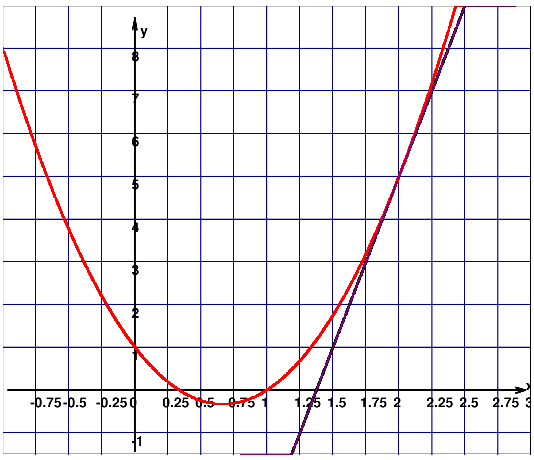
$$\begin{aligned} d_m(x) &= f(x) - g_m(x) \\ &= 3x^2 - 4x + 1 - 5 - m(x-2) \\ &= 3x^2 - 4x - 4 - m(x-2) \\ &= (3x+2)(x-2) - m(x-2) \\ &= (3x+2-m)(x-2). \end{aligned}$$



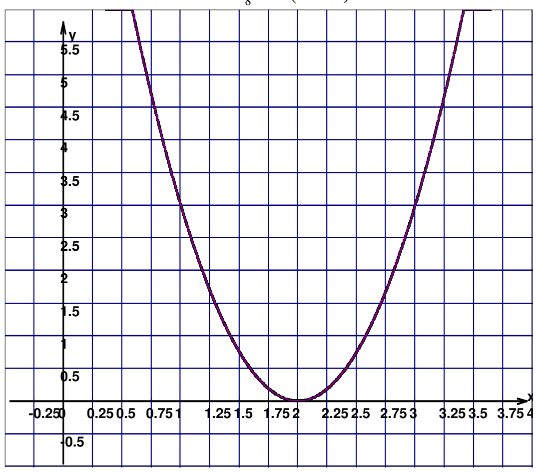
Die Differenzfunktion verschwindet für $x = 2$ für jede Gerade. Was zeichnet aber die Tangente aus? Dazu formen wir weiter um.

$$d_m(x) = (3(x-2) + 8 - m)(x-2),$$

denn die zu untersuchende Stelle ist $x = 2$. Wir finden:
Nur für $m = 8$ hat d_m eine doppelte Nullstelle, also $d_8 = 3(x-2)^2$. Die Tangente lautet $g_8(x) := 8(x-2) + 5$.

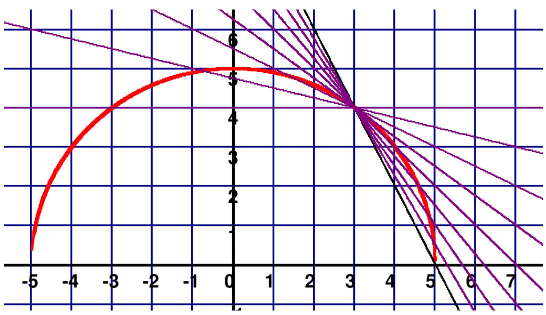


$d_8 = 3(x-2)^2$



2. Beispiel

Gegeben ist die Relation $x^2 + y^2 - 25 = 0$ zwischen Punkten des Koordinatensystems. Es handelt sich offensichtlich um einen Kreis mit Radius 5. Gesucht ist die Tangente im Punkt $T(3|4)$. Wir benutzen wieder die Gerade in der Punkt-Steigungsform, aber als Relation. Andere Darstellungen folgen später. Die Gerade durch T lautet $m\left(x-3\right)+4-y=0$. Um die Tangente, d.h. m zu bestimmen, verfolgen wir den Ansatz der doppelten Nullstelle.



Wir setzen ein.

$$x^2+\left(m(x-3)+4\right)^2-25=0$$

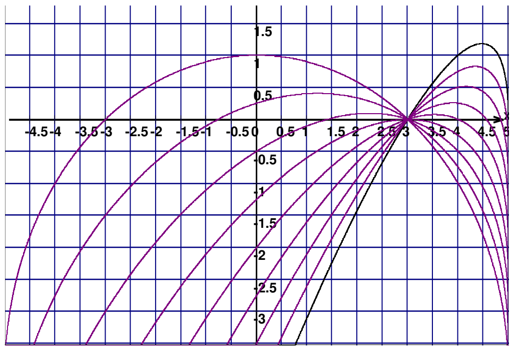
$$x^2+m^2(x-3)^2+8m(x-3)+16-25=0$$

$$x^2-9+m^2(x-3)^2+8m(x-3)=0$$

$$(x+3)(x-3)+m^2(x-3)^2+8m(x-3)=0$$

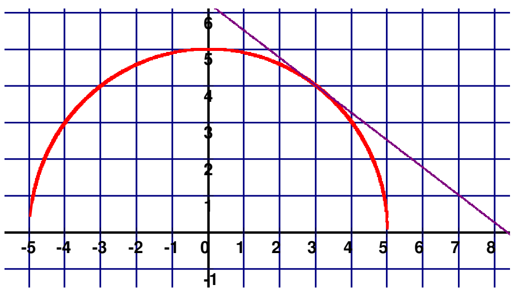
$$\left((x+3)+m^2(x-3)+8m\right)(x-3)=0$$

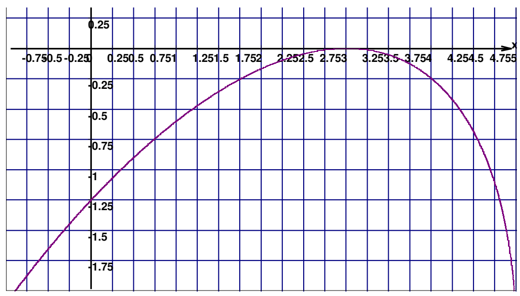
Da an der Stelle $x=3$ eine doppelte Nullstelle vorliegen soll, muss die linke Klammer für $x=3$ verschwinden, also $(3+3)+8m=0$.



Nur für $m=-\frac{3}{4}$ wird diese Bedingung erfüllt $\frac{25}{16}(x-3)^2=0$. Die Tangentengleichung lautet folglich $-\frac{3}{4}(x-3)+4-y=0$ bzw. $3(x-3)+4(y-4)=0$ bzw. $3x+4y-25=0$.

An diesen beiden Beispielen wird klar, was die Tangente auszeichnet. Die Tangente ist die einzige Gerade, die mit der Kurve mindestens eine doppelte Nullstelle lieferte. Alle anderen Geraden liefern genau eine Nullstelle im obigen Sinn.





Tangente eines Kreises durch den Punkt $T(a|b)$

a) Kreis um den Ursprung

Die Kreisgleichung lautet $x^2+y^2-r^2=0$. Gesucht ist die Tangente durch den Punkt $T(a|b)$ des Kreises. Es gilt folglich auch $a^2+b^2-r^2=0$, also

$$x^2+y^2-\left(a^2+b^2\right)=0 \Leftrightarrow x^2-a^2+y^2-b^2=0 \Leftrightarrow (x+a)(x-a)+(y+b)(y-b)=0.$$

i) Gerade in Punkt-Steigungsform als Relation

Sie lautet $m(x-a)+b-y=0$ bzw. $m(x-a)=y-b$, wobei m gesucht ist. Eine Gerade ist Tangente, wenn für $x=a$ mindestens eine doppelte Nullstelle vorliegt. Wir setzen ein. Es folgt

$$(x+a)(x-a)+(y+b)\left(m(x-a)\right)=0 \Leftrightarrow \left((x+a)+m(y+b)\right)(x-a)=0.$$

Für $x = a$ ist $y = b$, da die Gerade durch $T(a|b)$ geht. Folglich muss

$$(a+a)+m(b+b)=0 \Leftrightarrow m=-\tfrac{a}{b},\ b\neq 0$$

sein, damit eine doppelte Nullstelle für $x = a$ vorliegt.
Einsetzen in die Tangentengleichung liefert

$$-\frac{a}{b}(x-a)+b-y=0 \Leftrightarrow a(x-a)+b(y-b)=0.$$

Multiplizieren wir die Klammer aus und resubstituieren $a^2+b^2-r^2=0$, so folgt

$$ax-a^2+by-b^2=0 \Leftrightarrow ax+by-r^2=0.$$

Nachteil: b darf zwischendurch nicht null sein.

ii) Gerade in allgemeiner Punkt-Steigungsform

Sie lautet $s(x-a)+t(y-b)=0$, wobei s,t gesucht sind. Eine Gerade ist Tangente, wenn für $x = a$ und $y = b$ mindestens eine doppelte Nullstelle vorliegt.

$$\begin{aligned}(x-a)(x+a)+(y-b)(y+b)&=0\,\big|\cdot t\\ t(x-a)(x+a)+t(y-b)(y+b)&=0\\ t(x-a)(x+a)-s(x-a)(y+b)&=0\\ (x-a)\big(t(x+a)-s(y+b)\big)&=0\end{aligned}$$

Folglich muss $t(x+a)-s(y+b)=0$ für $x = a$ und $y = b$ sein.
Es folgt

$$2at-2bs=0 \Leftrightarrow at-bs=0.$$

Eine Lösung ist $(s|t)=(a|b)$. Eine Tangentengleichung ist $a(x-a)+b(y-b)=0$. Hieraus folgt $ax-a^2+by-b^2=0 \Leftrightarrow ax+by-r^2=0$.

iii) Gerade in Parameterdarstellung

Sie lautet $(x|y)=(a|b)+(s|t)u$, $u\in\mathbf{R}$. Eine Gerade ist Tangente durch $T(a|b)$, wenn für $u=0$ mindestens eine doppelte Nullstelle vorliegt.

$$\begin{aligned}x^2+y^2-r^2&=0\\ (a+su)^2+(b+tu)^2-\left(a^2+b^2\right)&=0\\ a^2+2asu+s^2u^2+b^2+2btu+t^2u^2-a^2-b^2&=0\\ 2asu+s^2u^2+2btu+t^2u^2&=0\\ \left(2as+s^2u+2bt+t^2u\right)u&=0\end{aligned}$$

Folglich muss für $u=0$ die erste Klammer verschwinden. Wir finden

$$2as+2bt=0 \Leftrightarrow as+bt=0.$$

Eine Lösung ist $(s|t)=(-b|a)$. Eine Tangente in Parameterdarstellung ist

$$(x|y)=(a|b)+(-b|a)u,\ u\in\mathbf{R}.$$

Hieraus folgt durch Elimination von u: $(x-a)a+(y-b)b=0$.

Bemerkung: Den allgemeinen Fall erreichen wir durch eine Translation. Führen Sie es aus.

Der Leser kann dieses Prinzip auf beliebige algebraische Kurven verallgemeinern.

Aufgaben

Versuchen Sie für ***a)*** $x^3 - y^2 - t = 0$, wobei t ein Parameter, ***b)*** $x^2 + x^3 - y^2 = 0$ und ***c)*** $\left(x^2 + y^2 + 4y\right)^2 - 16\left(x^2 + y^2\right) = 0$ im Punkt $T\left(a|b\right)$ die Tangente zu bestimmen.

Lösungen: a) $3a^2\left(x-a\right) - 2b\left(y-b\right) = 0$, ***b)*** $\left(2a + 3a^2\right)\left(x-a\right) - 2b\left(y-b\right) = 0$ und ***c)*** $4a\left(\left(a^2 + b^2 + 4b\right) - 8\right)\left(x-a\right) + \left(2\left(a^2 + b^2 + 4b\right)\left(2b+4\right) - 32b\right)\left(y-b\right) = 0$.

iv) Allgemeine Kreisgleichung

Die allgemeine Kreisgleichung $\left(x-v\right)^2 + \left(y-w\right)^2 - r^2 = 0$ liefert im Punkt $T\left(a|b\right)$ die Tangentialbedingung

$$\left(a-v\right)\left(x-a\right) + \left(b-w\right)\left(y-b\right) = 0 \Leftrightarrow \left(a-v\right)\left(x-v\right) + \left(b-w\right)\left(y-w\right) - r^2 = 0.$$

Für die Parameterform finden wir

$$\begin{aligned}
\left(x-v\right)^2 + \left(y-w\right)^2 - r^2 &= 0\\
\left(a+su-v\right)^2 + \left(b+tu-w\right)^2 - \left(a-v\right)^2 - \left(b-w\right)^2 &= 0\\
\left(a-v\right)^2 + 2\left(a-v\right)su + s^2u^2 + \left(b-w\right)^2 + 2\left(b-w\right)tu + t^2u^2 - \left(a-v\right)^2 - \left(b-w\right)^2 &= 0\\
2\left(a-v\right)su + s^2u^2 + 2\left(b-w\right)tu + t^2u^2 &= 0\\
\left(2\left(a-v\right)s + s^2u + 2\left(b-w\right)t + t^2u\right)u &= 0
\end{aligned}$$

Also

$$2\left(a-v\right)s + 2\left(b-w\right)t = 0 \Leftrightarrow \left(a-v\right)s + \left(b-w\right)t = 0.$$

Eine Lösung ist $\left(s|t\right) = \left(-b+w|a-v\right)$. Eine Tangente in Parameterdarstellung ist

$$\left(x|y\right) = \left(a|b\right) + \left(-b+w|a-v\right)u,\ u \in \mathbf{R}.$$

Hieraus folgt durch Elimination von u: $\left(x-a\right)\left(a-v\right) + \left(y-b\right)\left(b-w\right) = 0$.

Eine Gleichung der Geraden durch den Mittelpunkt $M\left(v|w\right)$ und den Tangentenpunkt $T\left(a|b\right)$ lautet $\left(a|b\right) + \left(v-a|w-b\right)t,\ t \in \mathbf{R}$. Diese steht senkrecht auf der Tangente, da $\left(v-a\right)\left(w-b\right) + \left(w-b\right)\left(a-v\right) = 0$. Es genügt also die Gerade durch $M\left(v|w\right)$ und $T\left(a|b\right)$ zu bestimmen.

v) Kreis in Parameterform

Wir setzen $x = v + r\cos\varphi$ und $y = w + r\sin\varphi$ mit $\varphi \in [0, 2\pi[$. In $T\left(a|b\right)$ ist $a = v + r\cos\varphi_0$ und $b = w + r\sin\varphi_0$. Eine Gerade durch $M\left(v|w\right)$ und $T\left(a|b\right)$ lautet $G\left(t\right) = \left(v|w\right) + \left(a-v|b-w\right)t,\ t \in \mathbf{R}$. Setzen wir ein, so folgt

$$\begin{aligned}
G\left(t\right) &= \left(v|w\right) + \left(\left(v + r\cos\varphi_0\right) - v|\left(w + r\sin\varphi_0\right) - w\right)t\\
&= \left(v|w\right) + \left(r\cos\varphi_0|r\sin\varphi_0\right)t,\ t \in \mathbf{R}.
\end{aligned}$$

Die Tangente wird damit durch

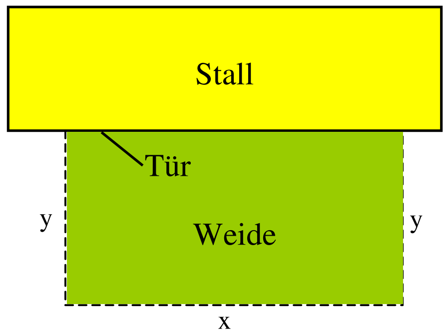
$$T\left(s\right) = \left(v|w\right) + \left(-r\sin\varphi_0|r\cos\varphi_0\right)s,\ s \in \mathbf{R}$$

beschrieben.

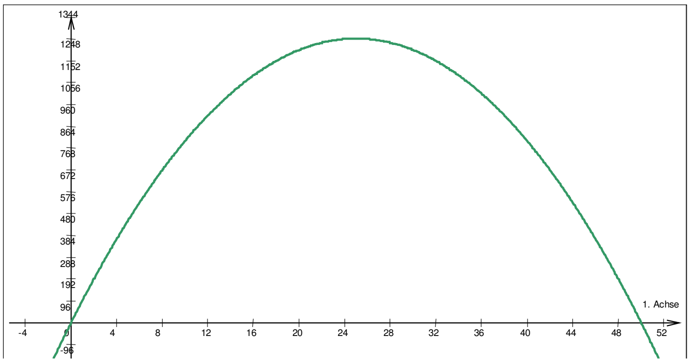
Extremwertaufgaben in der Sekundarstufe I

Zuerst werden Fälle behandelt, die sich auf quadratische Funktionen beziehen.

Aufgabe 1:
Ein Farmer besitzt noch $100\,\mathrm{m}$ Draht. Eine Seite des Stalls, in dem sich die Tiere befinden, soll als Begrenzung dienen (siehe Skizze). Wie sind die Maße zu wählen, damit die Weidefläche maximal wird, wenn die Fläche ein Rechteck ist?



Lösung:
Die Einheit der Länge ist m und die Einheit der Fläche ist m^2.
Es sind $x+2y=100$ für die Länge des Drahtes und $A=xy$ für den Flächeninhalt gegeben. Es sind folglich zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Da A maximiert werden soll, muss eine der Unbekannten in $A=xy$ eliminiert werden.
Lösen wir $x+2y=100$ nach x auf und setzen in $A=xy$ ein, so folgt $A(y)=(100-2y)y=-2y^2+100y$.



Der Scheitelpunkt kann sofort angegeben werden. Wir wollen aber an dieser Stelle den Scheitelpunkt $\mathbf{S}\big(s;A\big(s\big)\big)$ auf eine andere Weise berechnen. Wir bilden die Differenz $d(y):=A(y)-A(s)$. Damit erreichen wir, dass der Graph von d die 1. Achse an der Stelle s berührt. d besitzt folglich in s eine doppelte Nullstelle. Wir können eine Faktorisierung mit $y-s$ durchführen.

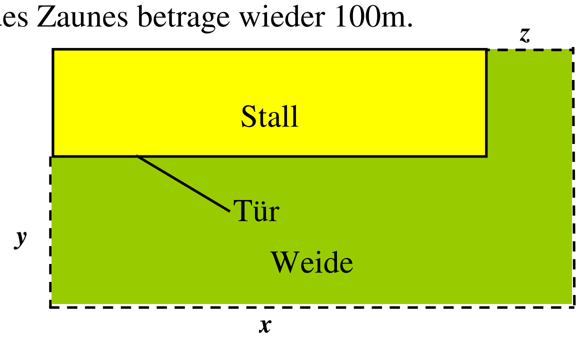
$$\begin{aligned}A(y)-A(s)&=-2y^2+100y-(-2s^2+100s)\\&=-2(y^2-s^2)+100(y-s)\\&=\big(-2(y+s)+100\big)(y-s)\\&=-2\big(y+s-50\big)(y-s)\end{aligned}$$

Wegen der doppelten Nullstelle an der Stelle s, muss $s+s-50=0$ sein. Dies liefert $s=25$. Hieraus ergeben sich folgende Maßzahlen:

Der maximale Flächeninhalt wird an der Stelle $y = 25$ bzw. $x = 50$ angenommen und beträgt $A(25) = 50 \cdot 25 = 1250$. Voraussetzung ist natürlich, dass der Stall überhaupt eine solche Länge besitzt. Ist er kürzer, so gibt es keine Lösung.

Erweitertes Problem

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, eine konkrete Länge und Breite des Stalls anzugeben. Der Stall habe nun eine Länge von 20 m und eine Breite von 5 m. Weide ist genügend vorhanden. Die Länge des Zaunes betrage wieder 100m.



Wir finden $x = 20 + z$. Der Flächeninhalt beträgt folglich $A = xy + 5z \Leftrightarrow A = xy + 5(x-20)$. Der Umfang ist damit $100 = y + x + y + 5 + z \Leftrightarrow 100 = 5 + 2y + x + x - 20 \Leftrightarrow 115 = 2y + 2x \Leftrightarrow y = 57{,}5 - x$. Damit erhalten wir für den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} A(x) &= x(57{,}5 - x) + 5(x-20) \\ &= 57{,}5x - x^2 + 5x - 100 \\ &= -x^2 + 62{,}5x - 100. \end{aligned}$$

Jetzt ergibt unser Verfahren

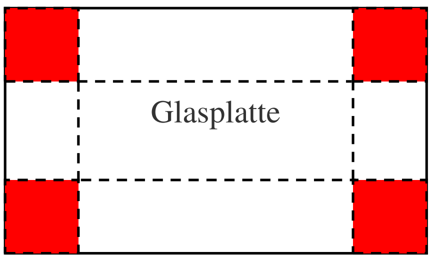
$$\begin{aligned} A(x) - A(s) &= -x^2 + 62{,}5x - 100 - (-s^2 + 62{,}5s - 100) \\ &= -(x^2 - s^2) + 62{,}5(x-s) \\ &= -(x + s - 62{,}5)(x-s) \end{aligned}$$

Da wieder eine doppelte Nullstelle vorliegt, muss $s + s - 62{,}5 = 0$ sein. Hieraus folgt $s = 31{,}25$ und erhalten den maximalen Flächeninhalt für $x = 25\,\text{m}$, $z = 5\,\text{m}$ und $y = 32{,}5\,\text{m}$. Dieser beträgt $A = 837{,}5\,\text{m}^2$.

In einer weiteren Aufgabe, soll die Wirksamkeit des Verfahrens an einer Funktion dritten Grades durchgeführt werden. Hier gibt es im Allgemeinen keine Scheitelpunktform.

Aufgabe 2:

Ein Kind bittet ihren Vater aus einer alten Glasplatte mit den Maßen $10\,\text{dm} \times 6\,\text{dm}$ ein Aquarium zu bauen, das möglichst viel Wasser fasst.

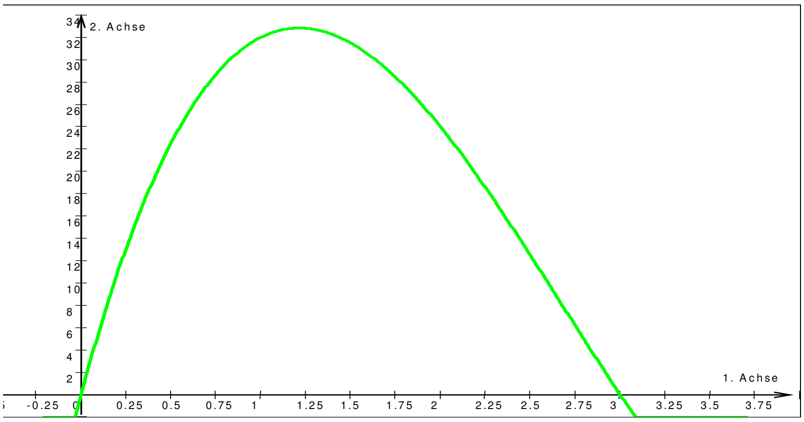


Dieses Beispiel wird gerne genommen, ist aber widersinnig, wie wir abschließend sehen.

Gib die fertigen Maße des Aquariums an! Die vier roten Quadrate sind Abfall.

Lösung:

Das Volumen des Aquariums (Quaders) berechnet sich aus $V = G \cdot h$, wobei G die Grundfläche und h die Höhe des Aquariums ist. Es bleibt die Grundfläche des Aquariums zu berechnen. Wir erhalten $G = (10-2h)(6-2h) = 4h^2 - 32h + 60$ und setzen das Ergebnis in $V = G \cdot h$ ein. Die Volumenfunktion lautet: $V(h) = \left(4h^2 - 32h + 60\right)h = 4h^3 - 32h^2 + 60h$, wobei $0 < h < 30$. Schauen wir uns den Graphen der Funktion V an.



Die maximale Stelle des Volumens finden wir über den Ansatz

$$d(h) := V(h) - V(m) = 4h^3 - 32h^2 + 60h - \left(4m^3 - 32m^2 + 60m\right)$$

mittels Faktorisierung, da $d(h)$ an der Stelle $h = m$ eine doppelte Nullstelle besitzt.

$$\begin{aligned} V(h) - V(m) &= 4h^3 - 32h^2 + 60h - \left(4m^3 - 32m^2 + 60m\right) \\ &= 4\left(h^3 - m^3\right) - 32\left(h^2 - m^2\right) + 60(h-m) \\ &= \left(4\left(h^2 + hm + m^2\right) - 32(h+m) + 60\right)(h-m) \end{aligned}$$

Folglich muss $4\left(h^2 + hm + m^2\right) - 32(h+m) + 60$ für $h = m$ null sein. Dies liefert $12m^2 - 64m + 60 = 0$. Hieraus erhalten wir die Nullstellen $m = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{19} = \frac{1}{3}\left(8 - \sqrt{19}\right)$ und $m = \frac{1}{3}\left(8 + \sqrt{19}\right)$. Die zweite Nullstelle liegt außerhalb des Definitionsbereiches für h.

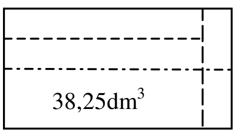
Das maximale Volumen ergibt sich für $h = \frac{1}{3}\left(8 - \sqrt{19}\right) \approx 1,2137$.

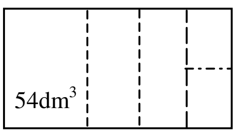
Die Maße des Aquariums betragen $7,5726\,\text{dm}$, $3,5726\,\text{dm}$ und $1,2137\,\text{dm}$.

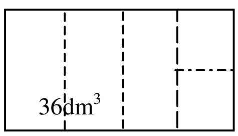
Das maximale Volumen beträgt $32,8353\,\text{dm}^3$.

Nachbetrachtung:

Wie ist das Glas zu schneiden, damit kein Glasverlust auftritt und welches Volumen stellt sich jetzt ein? Vergleiche die drei Lösungen mit der berechneten Lösung!







Abschließendes Beispiel einer Rationale Funktion 3. Grades

Für Parabeln haben wir schon die Tangente berechnet. Betrachten wir daher eine Funktion 3. Grades und berechnen die Steigung der Tangente. Für eine Funktion f und ein Punkt des Graphen $\left(a\middle|f(a)\right)$ ist $t_a(x) = m(x-a) + f(a)$ die Gleichung der Tangente.

Es genügt also m zu berechnen. Da es die Steigung der Funktion f ist, bezeichnen wir sie mit $f'(a)$. Die Tangente lautet nun $t_a(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Betrachten wir die Funktion f definiert durch

$$f(x) = |x|x^2.$$

Sie stellt eine nach oben geöffnete Parabel 3. Ordnung dar und ist das Produkt aus zwei Funktionen. Der Betrag von x und x^2. Wir betrachten nun statt

$$\begin{aligned} f(x) - t_a(x) &= f(x) - f'(a)(x-a) - f(a) \\ &= f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \end{aligned}$$

die Differenz $f(x) - f(a)$. Wir erhalten für $a \geq 0,\ x \geq 0$

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= |x|x^2 - |a|a^2 \\ &= x^3 - a^3 \\ &= \left(x^2 + ax + a^2\right)(x-a). \end{aligned}$$

Folglich ist $f'(a) = 3a^2$. Entsprechend finden wir für $a < 0,\ x < 0$ die Steigung $f'(a) = -3a^2$, da jetzt $f(x) - f(a) = -\left(x^2 + ax + a^2\right)(x-a)$. Insgesamt erhalten wir

$$f'(a) = 3|a|a.$$

Haben wir die Produktregel für Funktionen $f = g \cdot h$ zur Verfügung, so erhalten wir mit $f'(a) = g'(a)h(a) + g(a)h'(a)$ und $g(x) = |x|$ sowie $h(x) = x^2$ die Lösung

$$\begin{aligned} f'(a) &= \tfrac{a}{|a|} \cdot a^2 + |a| \cdot 2a \\ &= |a|a + 2|a|a \\ &= 3|a|a. \end{aligned}$$

An diesem Beispiel erkennen wir, dass es notwendig ist Regeln für Summen, Produkte und Verkettungen von Funktionen zu kennen, um aus den Steigungen der Einzelfunktionen auf die Steigung der Gesamtfunktion schließen zu können.