1. Die natürlichen Zahlen

Viele Dinge kannst du zählen. Verwechsle aber nicht Zählen (eins, zwei, ...) mit Abzählen (erster, zweiter, dritter, ...)!

Die natürlichen Zahlen geben dir an, wie viele verschiedene Dinge sich in einem abgeschlossenen Raum (Korb, Tasche, Karton, ...) befinden.

Die natürlichen Zahlen werden in der Mathematik durch die **Symbole** $\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\dots$ bezeichnet.
Sie gehen auf Albrecht Dürer zurück.

Alle ***natürlichen Zahlen*** werden durch das **Symbol** $\mathbf{N}$ abgekürzt.
Die Symbolik $\mathbf{7} \in \mathbf{N}$ wird gelesen als:

Sieben ist eine natürliche Zahl.
Oder:
Sieben gehört zu den natürlichen Zahlen.

Zu jeder natürlichen Zahl gibt es einen Nachfolger.

Beispiele: 7 ist Nachfolger von **6**, denn $\mathbf{7 = 6 + 1}$ und **102** ist Nachfolger von **101**, denn $\mathbf{102 = 101 + 1}$

Es gibt folglich keine größte natürliche Zahl.

Die Anzahl der natürlichen Zahlen ist ohne Ende (*unendlich*)!

Vergleichen natürlicher Zahlen

Natürliche Zahlen kannst du vergleichen, indem du auf die Anzahl der Dinge schaust.
Drei Dinge sind weniger als fünf Dinge. Acht Dinge sind mehr als sechs Dinge. Vier Dinge sind genau soviel wie vier Dinge. In der Mathematik benutzen wir die Wörter

3 ist kleiner als **5**,
8 ist größer als **6**
4 ist gleich **4**.

Hierfür führen wir die folgenden Symbole ein:

$<$, gelesen: ist kleiner als,
$>$, gelesen: ist größer als,
$=$, gelesen: ist gleich.

Du schreibst kurz:

$$\mathbf{3 < 5}\,,$$
$$\mathbf{8 > 6}\,,$$
$$\mathbf{4 = 4}\,.$$

Bei mehreren natürlichen Zahlen darfst du auch $\mathbf{3 < 4 < 5 < 6 < 8 < 21 < 101}$ schreiben.

Große natürliche Zahlen

Große natürliche Zahlen setzen sich aus den Ziffern $\mathbf{1,2,3,4,5,6,7,8,9,0}$ zusammen. Sie werden im Positionssystem oder in ein Stellenwertsystem dargestellt. Stelle dir dafür ein Parkhaus mit 999 Parkplätzen in jedem Stockwerk vor. Der 1. Stock hat den Namen Tausend, der 2. Stock Millionen, usw.

Das Positionssystem

Mrd			**Mio**			**T**					
H	**Z**	**E**	**H**	**Z**	**E**	**H**	**Z**	**E**	**H**	**Z**	**E**
				8	**7**	**3**	**0**	**2**	**4**	**6**	**9**
7	**1**	**4**	**9**	**0**	**5**	**8**	**8**	**4**	**2**	**5**	**1**

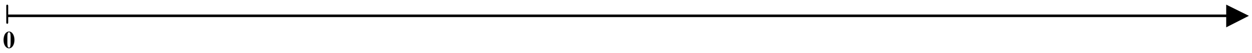
Diese Zahlen liest du nach folgendem Schema:

siebenundachtzig Millionen dreihundertzwei(tausend)vierhundertneunundsechzig
siebenhundertvierzehn Milliarden neunhundertfünf Millionen achthundertvierundachtzig(tausend)zweihunderteinundfünfzig

Hierbei ist die Klammer (Stockwerk) eine Lesehilfe für dich. Du lässt sie natürlich weg.

1.1 Der Zahlenstrahl für natürliche Zahlen

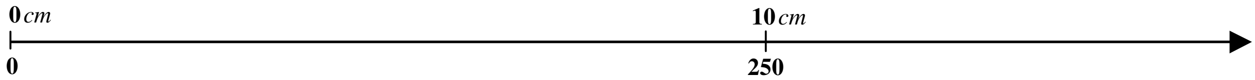
Der Zahlenstrahl beginnt immer mit der natürlichen Zahl null und zeigt in Richtung größer werdender Zahlen. Hier werden ***Längen als Zahlen*** interpretiert.



Zeichnest du jetzt eine weitere natürliche Zahl ein, so kannst du den Abstand zwischen null und der natürlichen Zahl in ***cm*** messen.

Beispiel:

Du zeichnest mit dem Geodreieck im Abstand **10** *cm* von **0** einen kleinen Strich und trägst dort die natürliche Zahl **250** ein.



Durch die Wahl **250** in **10** *cm* Abstand kannst du nun alle anderen natürliche Zahlen eintragen.
Dazu musst du etwas rechnen.

Schreibe zuerst das Paar $(\mathbf{250};\mathbf{10}\,cm)$ auf. An erster Stelle steht die natürliche Zahl und an zweiter Stelle der Abstand, hier in *cm* gemessen. Jetzt dürfen ***beide*** Zahlen durch ***dieselbe*** natürliche Zahl ohne Rest geteilt werden.

$$(\mathbf{250};\mathbf{10}\,cm):\mathbf{10}=(\mathbf{25};\mathbf{1}\,cm)$$

$$(\mathbf{250};\mathbf{10}\,cm):\mathbf{5}=(\mathbf{50};\mathbf{2}\,cm)$$

$$(\mathbf{250};\mathbf{10}\,cm):\mathbf{2}=(\mathbf{125};\mathbf{5}\,cm)$$

Du darfst aber auch alle bereits erhaltenen Paare mit derselben natürlichen Zahl multiplizieren.

$$(\mathbf{250};\mathbf{10}\,cm)\cdot\mathbf{2}=(\mathbf{500};\mathbf{20}\,cm)$$

$$(\mathbf{25};\mathbf{1}\,cm)\cdot\mathbf{3}=(\mathbf{75};\mathbf{3}\,cm)$$

$$(\mathbf{25};\mathbf{1}\,cm)\cdot\mathbf{4}=(\mathbf{100};\mathbf{4}\,cm)$$

$$(\mathbf{75};\mathbf{3}\,cm)\cdot\mathbf{2}=(\mathbf{150};\mathbf{6}\,cm)$$

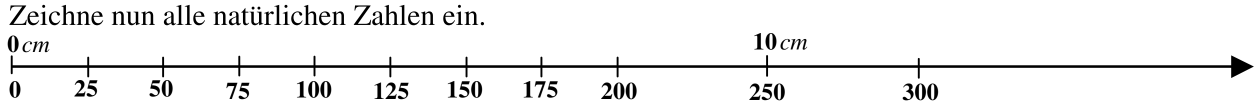
$$(\mathbf{25};\mathbf{1}\,cm)\cdot\mathbf{7}=(\mathbf{175};\mathbf{7}\,cm)$$

$$(\mathbf{100};\mathbf{4}\,cm)\cdot\mathbf{2}=(\mathbf{200};\mathbf{8}\,cm)$$

Selbstverständlich dürfen Paare auch addiert und subtrahiert werden.

$$(\mathbf{100};\mathbf{4}\,cm)+(\mathbf{200};\mathbf{8}\,cm)=(\mathbf{300};\mathbf{12}\,cm)\,.$$

Zeichne nun alle natürlichen Zahlen ein.



Wie kannst du weitere natürliche Zahlen einzeichnen?

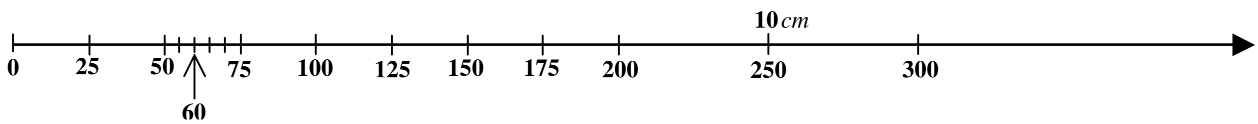
Zum Beispiel möchtest du zwischen **50** und **75** weitere natürliche Zahlen einzeichnen.

Die Gleichheit $\mathbf{1}\,cm=\mathbf{10}\,mm$ ist dir bekannt. Folglich kannst du mit $(\mathbf{25};\mathbf{1}\,cm)=(\mathbf{25};\mathbf{10}\,mm)$ weiter rechnen.

$$(\mathbf{5};\mathbf{2}\,mm)\,,\ (\mathbf{10};\mathbf{4}\,mm)\,,\ (\mathbf{15};\mathbf{6}\,mm)\,,\ (\mathbf{20};\mathbf{8}\,mm)$$

Beachte aber stets die Einheit in der zweiten Stelle mit zu schreiben!

Ergebnis: Alle $\mathbf{2}\,mm$ addierst du zu der vorherigen natürlichen Zahl einfach die natürliche Zahl **5**.



1.2 Addition natürlicher Zahlen

Du hast in einem Karton **68** Legosteine, in einem anderen Karton **27** Legosteine. Schütte nun die **27** Legosteine in den Karton mit **68** Legosteinen.
Wie viele Legosteine befinden sich insgesamt in den Kartons?

Um diese Frage zu beantworten, erinnere dich daran, dass jede natürliche Zahl einen Nachfolger besitzt. Legst du immer einen Stein um, so wird die Anzahl der **68** Legosteine um einen Legostein erhöht. Dafür schreibst du

$$\mathbf{68+1=69}, \ldots$$

Diesen Vorgang wiederholst du solange, bis alle **27** Legosteine umgelegt sind. Für die Anzahl schreibst du nun

$$\mathbf{68+1=69},\ \mathbf{69+1=70},\ \ldots,\ \mathbf{94+1=95}.$$

Du bist natürlich schlau und willst alle auf einmal hintereinander umlegen. Das geht auch!

$$\mathbf{68+\underbrace{1+1+1+1+\cdots+1}_{\text{27 mal umlegen}}=95}.$$

Die Abkürzung hierfür ist

$$\mathbf{68+27=95}.$$

Damit du schneller rechnen kannst und dich nicht verzählst, musst du dies oft üben. Lies aber bitte erst den nächsten Abschnitt, damit du eine einfache Methode kennen lernst, wie es schneller geht.

Erinnere dich! Es gibt nur die Ziffern **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** und **0**. Willst du die Aufgabe

$$\mathbf{9+1}$$

lösen, so muss ein neues Symbol aus zwei Ziffern her. Da wir von links nach rechts lesen, beginnen wir mit der **1** und schreiben an die zweite Stelle eine **0**. Das neue Symbol ist **10**, gelesen zehn. Die zweite Stelle kann jetzt wieder so lange aufgefüllt werden, bis du **19** erreicht hast.

Du hast $\mathbf{10+1=11, 11+1=12, 12+1=13, \ldots, 18+1=19}$ ausgerechnet. Für die Rechnung $\mathbf{19+1}$ muss wieder ein neues Symbol her. Du zählst auf der ersten Stelle weiter und erhältst **20**. Nun hast du sicher das Prinzip erkannt und machst so weiter.

Du willst die Aufgabe $\mathbf{26+17}$ lösen. Dazu rechnest du $\mathbf{26+4+13=30+13}$ und $\mathbf{30+13=43}$. Der erste Teil heißt **Zehnerüberschreitung**, der zweite Teil **Positionsrechnung**.
Dies hast du in der Grundschule gelernt.

Sprechweisen
Zu dem Symbol oder Zeichen **+** sagst du **plus** (***mehr***) und zu **=** sagst du **gleich** oder **ist gleich**. Die Zeichen haben nun einen Namen bekommen. Sage aber niemals „und“ zu **+** und „ist“ zu **=**.
Das Gleichheitszeichen sagt dir, dass links und rechts des Zeichens = dieselben Zahlen stehen.

Der Mathematiker sagt **addieren** (*lateinisch*) statt zusammenzählen. Die Anweisung

„**Addiere** **27** zu **68**“ bedeutet $\mathbf{68+27}$ hinzuschreiben.

Willst du auch das Ergebnis haben, so musst du sagen:

„Addiere **27** zu **68** und gib das Ergebnis dieser Addition an“.

Das Ergebnis bekommt auch einen eigenen Namen. Es heißt **Summe**. Die Zahlen in einer Summe heißen **Summanden**. Da auf beiden Seiten eines Gleichheitszeichens das Gleiche steht, wenn auch in verschiedenen Schreibweisen, sagst du auch zu $\mathbf{68+27}$ Summe.
Übersichtlich geschrieben

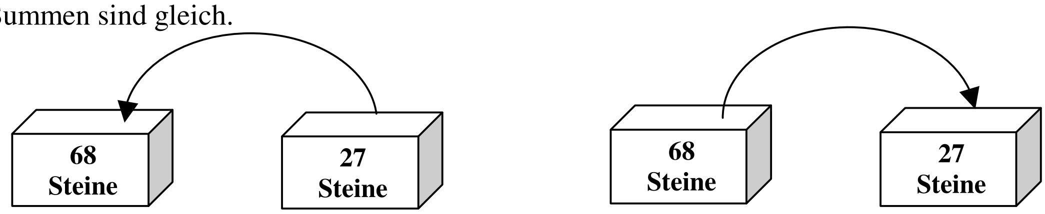
$$\mathbf{\overbrace{\underbrace{68}_{\text{Summand}}+\underbrace{27}_{\text{Summand}}}^{\text{Summe}}=\overbrace{95}^{\text{Summe}}}$$

Statt: „Addiere **27** und **68** und gib das Ergebnis an!“ darfst du auch „**Summiere 27** und **68**!“ sagen.

1.3 Erste Gesetze der natürlichen Zahlen

Das Kommutativgesetz der Addition

Ob du die **27** Legosteine in den Karton mit **68** Legosteinen schüttest oder umgekehrt die **68** Legosteine in den Karton mit **27** Legosteinen schüttest, die Anzahl der gesamten Legosteine bleibt **95**. Mathematisch sagen wir im ersten Fall: „Addiere **27** zu **68**" oder im zweiten Fall: „Addiere **68** zu **27**". Die Summen sind gleich.



Diese Gesetzmäßigkeit heißt ***Kommutativgesetz*** (lateinisch) oder **Vertauschungsgesetz** (deutsch).

$$\mathbf{68+27=27+68}$$

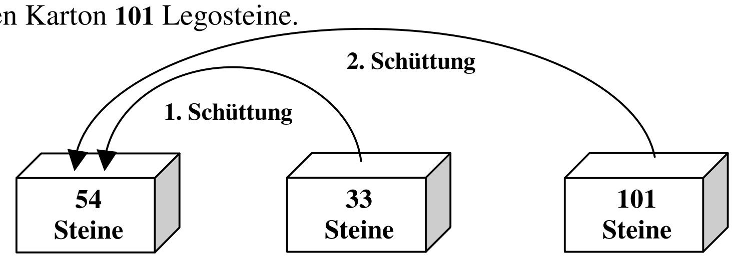
Dieses Gesetz gilt für alle natürlichen Zahlen, das weißt du schon. Darum schreibst du allgemeiner:

Für alle natürlichen Zahlen x **und** y **gilt:** $x+y=y+x$ **.**

Die Buchstaben x und y stehen als **Platzhalter** oder **Variablen**. Du darfst dafür beliebige natürliche Zahlen einsetzen. Setzt du für x die natürliche Zahl **68** und für y die natürliche Zahl **27** ein, so erhältst du wieder die obige Gleichung. Du musst also für jedes x in der Gleichung dieselbe natürliche Zahl einsetzen. Dies gilt auch für y.

Das Assoziativgesetz der Addition

Als nächstes nehmen wir drei Kartons. Im ersten Karton liegen **54** Legosteine, im zweiten Karton **33** Legosteine und im dritten Karton **101** Legosteine.

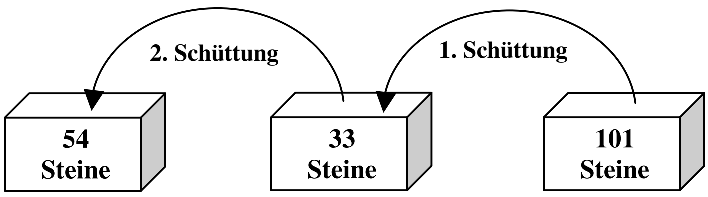


Schüttest du zuerst den Inhalt des zweiten in den ersten und danach den dritten in den ersten Karton, so ergibt es folgende Anzahlen

$$\mathbf{(54+33)+101=87+101}\,,$$

also **188** Legosteine. **Hier musst du Klammern setzen, um die Schüttungen auseinander zu halten.**

Nun schüttest du zuerst den dritten in den zweiten Karton und danach den Inhalt des zweiten Kartons in den ersten Karton.



Du erhältst

$$\mathbf{54+(33+101)=54+134}\,,$$

also auch **188** Legosteine. Diese Gesetzmäßigkeit, die dir natürlich klar ist, bekommt einen Namen.

$$\mathbf{(54+33)+101=54+(33+101)}$$

heißt ***Assoziativgesetz*** (*lateinisch*) oder Verbindungsgesetz. Setzt du wieder **Variable** (Platzhalter) ein, so schreibt sich das Assoziativgesetz:

Für alle natürlichen Zahlen x**,** y **und** z **gilt:** $(x+y)+z=x+(y+z)$ **.**

Fassen wir noch einmal die Gesetze der natürlichen Zahlen bezüglich der Addition zusammen.

1. Jede natürliche Zahl x hat einen **Nachfolger**, nämlich $x+1$.

2. Für je zwei natürliche Zahlen x, y gilt das **Kommutativgesetz** $x+y=y+x$.

3. Für je drei natürliche Zahlen x, y, z gilt das **Assoziativgesetz** $(x+y)+z=x+(y+z)$.

4. Die **Bezeichnungen** bezüglich der **Addition** lauten:

$$\overbrace{\underbrace{68}_{\textbf{Summand}} \quad \underbrace{+}_{\textbf{Plus}} \quad \underbrace{27}_{\textbf{Summand}}}^{\textbf{Summe}} = \overbrace{95}^{\textbf{Summe}} \ .$$

1.4 Schriftliche Addition natürlicher Zahlen

Die Addition größerer natürlicher Zahlen kann schematisiert werden. Dazu betrachten wir die Aufgabe $\mathbf{257+196}$. Hierzu zerlegst du diese Aufgabe wie folgt nach Positionen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{257+196} &= \mathbf{200+50+7+100+90+6} \\
&= \mathbf{200+100+50+90+7+6} \\
&= \mathbf{200+100+50+90+10+3} \\
&= \mathbf{200+100+100+50+3} \\
&= \mathbf{400+50+3} \\
&= \mathbf{453}
\end{aligned}$$

Um hieraus ein Schema zu entwickeln schreibst du die zu addierenden Zahlen untereinander.

$$\begin{array}{r}
\mathbf{257} \\
\mathbf{+196} \\
\hline
\end{array}$$

Nun rechnest du in den Positionen. Also $\mathbf{7+6=13}$. Da hier der Zehner überschritten wird, muss die **1** an der Zehnerstelle in der weiteren Rechnung addiert werden. Die **1** schreibst du folglich an die Zehnerposition in eine neue Zeile. Nenne sie den Übertrag. Bis hierher sieht deine Rechnung so aus:

$$\begin{array}{r}
\mathbf{257} \\
\mathbf{+196} \\
\scriptstyle\mathbf{1} \\
\hline
\mathbf{3}
\end{array}$$

In der Zehnerposition stehen nun die zu addierenden Zahlen, also $\mathbf{5+9+1=15}$. Wieder hast du eine Positionsüberschreitung. Hierbei handelt es sich um die Hunderterstelle. Wieder schreibst du die **1** in den Übertrag in die Hunderterposition. Du bist jetzt schon so weit.

$$\begin{array}{r}
\mathbf{257} \\
\mathbf{+196} \\
\scriptstyle\mathbf{11} \\
\hline
\mathbf{53}
\end{array}$$

Nun hast du nur noch die Hunderterposition zu bearbeiten. Du rechnest $\mathbf{2+1+1=4}$ und trägst das Ergebnis ein. Deine Rechnung ist beendet.

$$\begin{array}{r}
\mathbf{257} \\
\mathbf{+196} \\
\scriptstyle\mathbf{11} \\
\hline
\mathbf{153}
\end{array}$$

Du bist nun in der Lage beliebig viele natürliche Zahlen schriftlich zu addieren! Du hast Positionsrechnung mit Überträgen begriffen! Außerdem ersparst du dir Schreibarbeit!

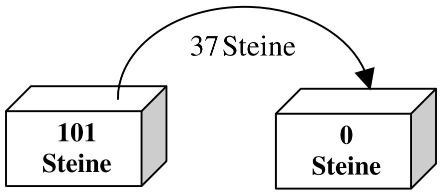
Dazu meinen Glückwunsch!

1.5 Subtraktion natürlicher Zahlen

Subtrahieren (*lateinisch:* ***abziehen*****)**

Stell dir wieder zwei Kisten mit Legosteinen vor. In der ersten Kiste befinden sich **101** Steine, die zweite Kiste ist leer. Aus der Kiste mit **101** Steine sollen **37** Steine herausgenommen werden. Wie viele Steine befinden sich nach der Entnahme noch in der ersten Kiste. Du bestimmst damit den zweiten Summanden, denn anschließend liegt vor dir eine Summe.

Natürlich weißt du längst, was du rechnen musst. Also nimmst du einen nach den anderen heraus und zählst rückwärts.



Du bist jedoch schlau und nimmst erst **31** und dann noch **6** Steine heraus. (Erinnere dich an die **Zehnerüberschreitung** und **Positionsrechnung**.) Du rechnest folglich:

$$\begin{aligned}(\mathbf{101}-\mathbf{31})-\mathbf{6} &= \mathbf{70}-\mathbf{6}\\ &= \mathbf{64.}\end{aligned}$$

Das geht auch schriftlich. Dazu schreibst du die Zahlen wie folgt untereinander.

$$\begin{array}{r} \mathbf{1\,0\,1} \\ -\quad \mathbf{3\,7} \\ \hline \end{array}$$

Da du von der **1** keine **7** abziehen kannst, zerlegst du deine Rechnung in zwei Teile:

$$\begin{aligned}\mathbf{101}-\mathbf{37} &= \mathbf{90}+\mathbf{11}-\mathbf{30}-\mathbf{7}\\ &= (\mathbf{90}-\mathbf{30})+(\mathbf{11}-\mathbf{7})\end{aligned}$$

Deshalb musst du mit **11** beginnen, also $\mathbf{11}-\mathbf{7}=\mathbf{4}$. Das Ergebnis steht an der Einer-Position. Da du die **10** dazugenommen hast, merkst du dir dies, indem du eine $-\mathbf{1}$ über der Zehner-Position vermerkst. Das sieht nun wie folgt aus.

$$\begin{array}{r} \scriptstyle -1 \\ \mathbf{1\,0\,1} \\ -\quad \mathbf{3\,7} \\ \hline \mathbf{4} \end{array}$$

Nun hast du noch die Subtraktion $\mathbf{100}-\mathbf{30}$ zu lösen.

An der Zehner-Position steht oben $\mathbf{0}-\mathbf{1}$. Das ist für natürliche Zahlen nicht lösbar. Du leihst dir deshalb einen Hunderter und merkst dir dies wieder mit einer $-\mathbf{1}$ über der Hunderter-Position. Von **9** kannst du **3** subtrahieren. Deine Rechnung sieht jetzt so aus.

$$\begin{array}{r} \scriptstyle -1\,-1 \\ \mathbf{1\,0\,1} \\ -\quad \mathbf{3\,7} \\ \hline \mathbf{6\,4} \end{array}$$

Natürlich hast du in Wirklichkeit $\mathbf{90}-\mathbf{30}$ gerechnet! Deshalb:

Beim Subtrahieren musst du genau aufpassen, sonst verrechnest du dich.

Die Zahlen in der Rechnung bekommen noch einen Namen.

$$\overbrace{\underbrace{\mathbf{101}}_{\textbf{Minuend}}\ \underbrace{-}_{\textbf{Minus}}\ \underbrace{\mathbf{37}}_{\textbf{Subtrahend}}}^{\textbf{Differenz}} = \overbrace{\mathbf{64}}^{\textbf{Differenz}}$$

Minuend (*lateinisch:* ***die zu vermindernde Zahl***)
Subtrahend (*lateinisch:* ***die abzuziehende Zahl***)
Differenz (*lateinisch:* ***der Unterschied***)
Minus (*lateinisch:* ***weniger***) für das Zeichen $-$

Eigentlich addierst du lieber, denn das ist einfacher. Kein Problem!

Schau dir dazu noch einmal das Ergebnis in deinen Kisten an. Im linken Kasten liegen jetzt 64 Steine, im rechten 37. Die Anzahl aller Steine ist gleich geblieben. Eigentlich hast du doch die Aufgabe

$$\mathbf{101} = x + \mathbf{37}$$

gelöst, wobei das x für die Anzahl der gesuchten Legosteine steht. Hieran erkennst du, dass es gar keine Subtraktion gibt, sondern dass die Subtraktion nur die Frage nach einem der Summanden ist.

Du überlegst. Wenn ich die Differenz kennte, muss ich doch nur **37** addieren und erhielte **101** als Summe. „Das stimmt!", sage ich dir. Denn

$$(\mathbf{101} - \mathbf{37}) + \mathbf{37} = \mathbf{101}.$$

Für die Differenz setzt du nun einfach x. Dann ist die Summe $\mathbf{101} = x + \mathbf{37}$ zu lösen. Schriftlich addieren kannst du sehr gut. Deine Rechnung sieht jetzt so aus (i).

$$\text{(i)}\quad \begin{array}{r} x \\ +\ \mathbf{37} \\ \hline \mathbf{101} \end{array} \qquad\qquad \text{(ii)}\quad \begin{array}{r} \mathbf{4} \\ +\ \mathbf{3\,7} \\ {\scriptstyle +1\ } \\ \hline \mathbf{101} \end{array}$$

In der schriftlichen Rechnung lässt du x einfach weg, behältst dir aber den Platz für die zu berechnende Zahl vor (ii). Nun rechnest du $\mathbf{7} + \mathbf{4} = \mathbf{11}$ und trägst die **7** an die Einer-Position ein und den Zehner als $+\mathbf{1}$ unter die **3**, den Übertrag ein.

Du rechnest weiter $\mathbf{3} + \mathbf{1} = \mathbf{4}$ und $\mathbf{4} + \mathbf{6} = \mathbf{10}$. Die **6** trägst du an der Zehner-Position ein und die **1** unter die Hunderter-Position in den Übertrag.

$$\begin{array}{r} \mathbf{6\,4} \\ +\ \mathbf{0\,3\,7} \\ {\scriptstyle +1+1\ } \\ \hline \mathbf{1\,0\,1} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \mathbf{1\,0\,1} \\ -\ \mathbf{0\,3\,7} \\ {\scriptstyle +1+1\ } \\ \hline \mathbf{6\,4} \end{array}$$

Die Gesuchte natürliche Zahl x ist **64**. Nun vertauschen wir noch die Zahlen, denn eigentlich wolltest du doch die Differenz $\mathbf{101} - \mathbf{37}$ berechnen.

Na, das war doch einfacher! Oder?

Schauen wir uns eine Aufgabe mit mehreren Subtrahenden an.

Berechne $\mathbf{1563} - \mathbf{319} - \mathbf{587}$ schriftlich!

Du überlegst mit dem zu berechnenden Ergebnis und setzt es x. Deine Aufgabe lautet dann

$$\mathbf{1563} - \mathbf{319} - \mathbf{587} = x \ \text{ bzw. } \ \mathbf{1563} = x + \mathbf{319} + \mathbf{587}$$

Weiter überlegst du, $\mathbf{1563} = x + \mathbf{906}$ und damit $\mathbf{1563} - \mathbf{906} = x$. Folglich erhältst du

$$\mathbf{1563} - (\mathbf{319} + \mathbf{587}) = x\,.$$

Merke: Beim schriftlichen Subtrahieren mehrerer Subtrahenden werden die Subtrahenden zuerst addiert und dann die Summe der Subtrahenden subtrahiert.

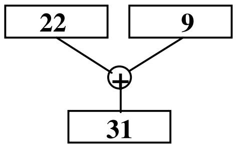
Bleiben wir bei unserer Aufgabe. Du rechnest $\mathbf{9} + \mathbf{7} = \mathbf{16}$ und $\mathbf{16} + \mathbf{7} = \mathbf{23}$. Die **7** schreibst du ins Ergebnis an die Einerstelle, die **2** in den Übertrag der Zehnerstelle. Weiter addierst du $\mathbf{2} + \mathbf{8} + \mathbf{1} = \mathbf{11}$ und $\mathbf{11} + \mathbf{5} = \mathbf{16}$. Die **5** schreibst du ins Ergebnis an die Zehnerstelle, die **1** in den Übertrag der Hunderterstelle. Jetzt addierst du $\mathbf{1} + \mathbf{5} + \mathbf{3} = \mathbf{9}$ und $\mathbf{9} + \mathbf{6} = \mathbf{15}$. Wieder schreibst du die **6** ins Ergebnis an die Hunderterstelle, die **1** in den Übertrag der Tausenderstelle. Wegen $\mathbf{1} + \mathbf{0} = \mathbf{1}$ bist du nun fertig. Deine schriftliche Rechnung sieht nun so aus:

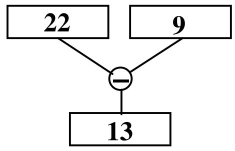
$$\begin{array}{r} \mathbf{1\,563} \\ -\ \mathbf{319} \\ -\ \mathbf{587} \\ {\scriptstyle 1\ 1\ 2\ } \\ \hline \mathbf{657} \end{array}$$

1.6 Rechenbäume

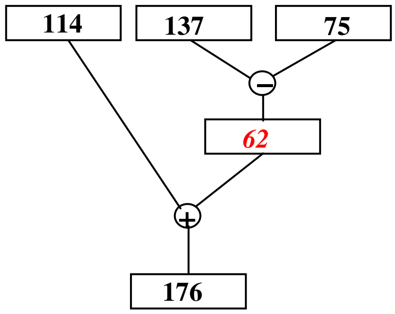
Ein Rechenbaum ist eine Anweisung an die Schülerin bzw. den Schüler in welcher Reihenfolge eine Aufgabe zu bearbeiten ist. Natürlich liest du auch hier von links nach rechts.

Beispiele





In diesen beiden Rechenbäumen sind die Aufgaben **22** + **9** = **31** und **22** – **9** = **13** dargestellt.
Erweitern wir die Bäume.

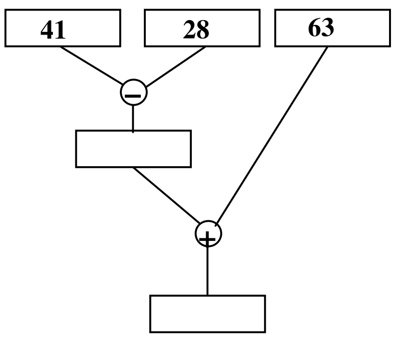


Die zu diesem Baum gehörige Aufgabe lautet **114** + (**137** – **75**) = **176**. Die schräg geschriebene Zahl ***62*** ist ein Zwischenergebnis und kann in der Aufgabe nicht vorkommen. Um die natürliche Zahl ***62*** auszurechnen, musst du erst die Differenz **137** – **75** finden. Daher steht **137** – **75** in Klammern.

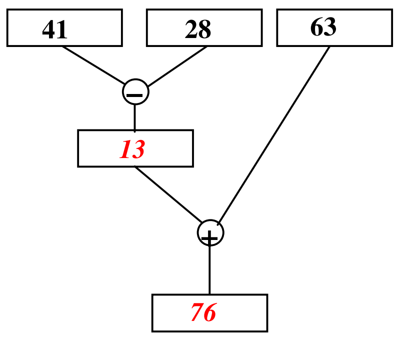
Merke: **Alle Zahlen in der obersten Baumkrone stehen auf der linken Seite des Gleichheitszeichens und sind mit + oder – verknüpft. Die Summen bzw. Differenzen, die zuerst berechnet werden, stehen in Klammern. Das Ergebnis steht unten an der Wurzel des Baumes.**

Kann ich auch zu einer Aufgabe einen Rechenbaum zeichnen, fragst du jetzt sicher. Natürlich antworte ich dir.

Zeichne zur Aufgabe (**41** – **28**) + **63** = x einen Rechenbaum.
Auf der linken Seite stehen drei Zahlen. Du benötigst daher drei Kästen. Zuerst muss die Differenz $41-28$ berechnet werden. Danach addierst du 63 zur Differenz. Du erhältst folgenden Baum.



Oder mit Lösungen



Spannend wird es, wenn du im Baum Lücken lässt.

Lassen sich die fehlenden natürlichen Zahlen und Rechenzeichen eindeutig bestimmen?

Gibt es zu jeden Baum eine Lösung?

Kann jede Aufgabe mit Klammern als Baum dargestellt werden?

Bevor du dich in Partner- und Gruppenarbeit damit beschäftigst, solltest du erst ein wenig üben.

2. Ganze Zahlen

Der Kontostand meines Giro-Kontos oder die Schulden bei meinen Eltern

Der Kontostand beträgt heute **54€.** Du holst nacheinander folgende Geldbeträge ab.

13 €, 6 €, 11 €, 8 €, 16 €, 20 €.

Welchen Kontostand teilt dir deine Bank oder Eltern mit?

Du rechnest.

$$\begin{aligned}(((((54-13)-6)-11)-8)-16)-20 &= ((((41-6)-11)-8)-16)-20\\ &= (((35-11)-8)-16)-20\\ &= ((24-8)-16)-20\\ &= (16-16)-20\\ &= 0-20\end{aligned}$$

Aber was ist $0-20$? Damit du **20€** erhältst, machst du bei der Bank Schulden. Auf deinem Konto sind jetzt **– 20€**. Damit dein Konto **0€** aufweist, musst du **20€** einzahlen.

Wir legen nun für alle Zeiten fest: $-20 := 0-20$,

oder **für jede natürliche Zahl** a **:** $-a := 0-a$.

Eine solche Zahl ist nicht natürlich, also ***keine*** natürliche Zahl. Das Minuszeichen auf der linken Seite der Gleichung ist nun kein Rechenzeichen mehr. Der Mathematiker sagt dazu ***Vorzeichen*** der Zahl.

Du sagst:

15 ist ***positiv***, denn **ich habe eine natürliche Zahl**.
– 13 ist ***negativ***, denn **ich habe keine natürliche Zahl**.

Mathematisch sagst du:

15 ist ***positiv***, denn $0<15$.

– 13 ist ***negativ***, denn $-13<0$.

Geben wir diesen neuen negativen Zahlen zusammen mit den natürlichen Zahlen einen neuen Namen.

Die „neuen" Zahlen heißen „Ganze Zahlen". Natürlich bekommen sie ein eigenes Symbol $\mathbb{Z}$.

Zählen wir sie auf.

$$\mathbb{Z} := \{0; 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4; 5; -5; 6; -6; \ldots\}$$

Du wirst nun sicher fragen, wie du mit diesen neuen Zahlen rechnen kannst?

An deinem Kontostand überlegst du

$$\begin{aligned}(-1)+1&=0\\ (-2)+2&=0\\ (-3)+3&=0\\ (-4)+4&=0\\ &\vdots\end{aligned}$$

Die Klammern darfst du auch weglassen!

Wenn ich **18 €** Schulden habe, muss ich **18 €** einzahlen, damit mein Konto **0 €** ausweist.
Als Summe geschrieben: $-18€+18€=0€$. Hieraus schließt du richtig:

$$\begin{aligned}-7€+18€ &= -7€+(7€+11€)\\ &= (-7€+7€)+11€\\ &= 11€.\end{aligned}$$

Gilt die Überlegung auch für $18€+(-7€)$?

Du besitzt jetzt zwei Konten. Auf dem ersten Konto hast du **18 €** Guthaben, auf dem zweiten Konto **7 €** Schulden. Zusammen hast du folglich $18€+(-7€)=11€$ Guthaben.

Das **Kommutativgesetz** bleibt erhalten.

$$-7+18=18+(-7)$$

Halten wir für das Rechnen noch fest: **Für $18+(-7)$ rechnest du wie gewohnt $18-7$.**

Wenn du **7 €** Schulden hast und machst weitere **11 €** Schulden, dann hast du zusammen **18 €** Schulden. Ich **addiere** also meine Schulden! In Zeichen: $\mathbf{-7+(-11)=-18}$.

Das Assoziativgesetz gilt auch. $\mathbf{-6+(3+(-4))=(-6+3)+(-4)}$. Rechne nach! Ergebnis $\mathbf{-7}$.

Merke: **Vertauscht du etwas in deiner Rechnung, so nimmst du das Minuszeichen immer mit.**

$\mathbf{28-34=-34+28}$, $\mathbf{-54+48-63+101=101+48-54-63}$

Bisher haben wir immer eine Klammer um eine negative Zahl geschrieben, wenn zwei Zeichen + oder – aufeinander trafen.

Vereinbarung:

Eine Klammer schreiben wir immer dann, wenn zwei Zeichen aufeinandertreffen, ein Rechen- und ein Vorzeichen (positiv oder negativ). Wir schreiben $+4$, wenn wir die 4 als positive Zahl hervorheben.

Beispiele: $\mathbf{-13+7=-6}$, $\mathbf{+26+(-46-28)}$, $\mathbf{-19-(-14+25)}$

2.1 Welchen Vorteil hat das Rechnen mit Ganzen Zahlen?

Natürlich gilt das Kommutativ- und das Assoziativgesetz. Können aber Klammern willkürlich gesetzt werden?

Betrachte nun die drei folgenden Aufgaben.

1. $\mathbf{57+(28-15)}$: Du wendest das Assoziativgesetz an.

$$\begin{aligned}\mathbf{57+(28-15)} &= \mathbf{57+(28+(-15))}\\ &= \mathbf{(57+28)+(-15)}\\ &= \mathbf{(57+28)-15}\end{aligned}$$

Hier darfst du also die Klammern weglassen und rechnest wie du möchtest.

2. $\mathbf{36+(-12-9)}$: Wieder wendest du das Assoziativgesetz an.

$$\begin{aligned}\mathbf{36+(-12-9)} &= \mathbf{36+((-12)+(-9))}\\ &= \mathbf{(36+(-12))+(-9)}\\ &= \mathbf{(36-12)-9}\end{aligned}$$

Hier musst du schon aufpassen.

3. $\mathbf{(36-12)-9}$: Du erkennst hier sofort das Ergebnis von **2.** wieder. Jedoch möchtest du lieber addieren als Subtrahieren. Um diese Aufgabe zu vereinfachen, rechnest du sie aus.

$$\begin{aligned}\mathbf{(36-12)-9} &= \mathbf{24-9}\\ &= \mathbf{15}\end{aligned}$$

Nun rechnest du hintereinander die Umkehraufgabe. Dabei darfst du bei der Addition die Klammern weglassen.

$$\begin{aligned}\mathbf{(36-12)-9} &= \mathbf{15}\\ \mathbf{36-12} &= \mathbf{15+9}\\ \mathbf{36} &= \mathbf{15+9+12}\\ \mathbf{36} &= \mathbf{15+12+9}\\ \mathbf{36} &= \mathbf{15+(12+9)}\\ \mathbf{36-(12+9)} &= \mathbf{15}\end{aligned}$$

Als Ergebnis erhältst du

$$\mathbf{(36-12)-9=36-(12+9)}\ .$$

Du darfst nun erst die Summe von **12** und **9** bilden und diese Summe von **36** subtrahieren. In der Grundschule hast du natürlich schon so gerechnet. Jetzt weißt du, warum dies richtig ist. (Vgl. S. 8)

Schreibe nun die Ergebnisse von **2.** und **3.** neben einander.

$$\mathbf{36+(-12-9)=(36-12)-9} \text{ und } \mathbf{(36-12)-9=36-(12+9)}\ .$$

Da die **Gleichheit transitiv** ist, erhältst du

$$\mathbf{36+(-12-9)=36-(12+9)}\,.$$

Dieses Ergebnis bekommst du auch durch folgende Überlegung:

$$\begin{aligned}\mathbf{(78-25)-18} &= \mathbf{(78+(-25))+(-18)} && \textbf{als Addition schreiben}\\ &= \mathbf{78+((-25)+(-18))} && \textbf{Anwenden des Assoziativgesetzes}\end{aligned}$$

und überlegst weiter, dass

$$\mathbf{(-25)+(-18)=-(25+18)}$$

ergeben, denn insgesamt hast du $\mathbf{25+18}$ Schulden gemacht! Du rechnest nun weiter

$$\begin{aligned}\mathbf{(78-25)-18} &= \mathbf{(78+(-25))+(-18)} && \textbf{als Addition schreiben}\\ &= \mathbf{78+((-25)+(-18))} && \textbf{Anwenden des Assoziativgesetzes}\\ &= \mathbf{78+(-(25+18))} && \textbf{Verwendung des Zwischenergebnisses}\\ &= \mathbf{78-(25+18)} && \textbf{als Differenz schreiben}\end{aligned}$$

Damit schließt sich vorläufig der Abschnitt über Addition und Subtraktion natürlicher und ganzer Zahlen. Wir öffnen ihn wieder, wenn wir über Gleichungen mit Variablen sprechen. Wie du bereits weißt, schreiben wir dafür kleine Buchstaben, zum Beispiel x.

Fassen wir noch einmal die Gesetze der Ganzen Zahlen $\mathbf{Z}$ bezüglich der Addition zusammen.

1. Jede ganze Zahl $x \in \mathbf{Z}$ hat einen **Nachfolger**, nämlich $x+1$.

2. Für je zwei ganze Zahlen $x, y \in \mathbf{Z}$ gilt das **Kommutativgesetz** $x+y=y+x$.

3. Für je drei ganze Zahlen $x, y, z \in \mathbf{Z}$ gilt das **Assoziativgesetz** $(x+y)+z=x+(y+z)$.

Der Mathematiker sagt genauer: **Für alle ganze Zahlen gelten diese Gesetze.**

Eine letzte Bemerkung:

Ersetzen in der Mathematik heißt immer erst eine Klammer setzen!
Schaue dann, ob du die Klammer nach Regeln weglassen darfst!
Wenn du also -5 einsetzen willst, musst du (-5) einsetzen.

Eine schwierige Aufgabe!

Du möchtest wissen welche Zahl sich hinter $\mathbf{-(-4)}$ verbirgt.

Dazu bekommst du eine **Anleitung**.

Setze $\mathbf{0-(-4)}=x$, folgere $\mathbf{0}=x+\mathbf{(-4)}$, schreibe dies ohne Klammer und schließe dann auf die Zahl x.

Lösung: $\mathbf{-(-4)=4}$

3. Multiplikation natürlicher Zahlen

Werden gleiche Zahlen summiert, zum Beispiel $\mathbf{4+4+4+4+4+4}$, so ist es lästig, die Summe immer wieder zu berechnen. Der Mathematiker schreibt dafür $\mathbf{6 \cdot 4}$, das ist kürzer. Du darfst also $\mathbf{6 \cdot 4 := 4+4+4+4+4+4}$ schreiben.

Die neue Rechenoperation nennt der Mathematiker ***Multiplikation***. Die Vorsilbe ***Multi*** ist lateinisch und heißt **viel** oder **mehrfach**. Die Zahl **6** gibt an, wie oft die **4** addiert werden soll. Deshalb heißt eine solche Zahl ***Multiplikator***. Die andere Zahl, die als wiederholender Summand vorkommt, heißt ***Multiplikand***. In unseren Beispiel ist **6** der Multiplikator und **4** der Multiplikand.

Listest du alle Multiplikanden von **1** bis **10** mit dem Multiplikator von **1** bis **10** in einer Tabelle auf, so erhältst du das kleine $\mathbf{1 \times 1}$. Diese Tabellen musst du auswendig lernen, damit du nicht immer wieder summieren musst. **Das ist der einzige Grund es zu tun! Also tue es!**

Das Ergebnis einer Multiplikation bekommt auch einen Namen. Es heißt ***Produkt***. Da eine Gleichheit der linken und rechten Seite des Gleichheitszeichens vorliegt, heißt auch die Multiplikation selbst ***Produkt***. Für die Zahlen in der Aufgabe (Multiplikator und Multiplikand) gibt es noch eine weitere Bezeichnung. Sie heißen ***Faktoren***.

$$\overbrace{\underbrace{\mathbf{6}}_{\text{1. Faktor}} \cdot \underbrace{\mathbf{4}}_{\text{2. Faktor}}}^{\text{Produkt}} = \overbrace{\mathbf{24}}^{\text{Produkt}}$$

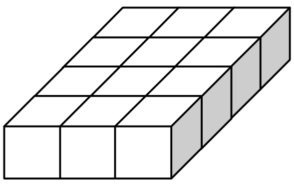
Beachte folgenden Unterschied.

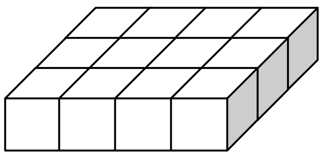
1. Der Multiplikand ist **8** und der Multiplikator **7**. Hier geht es um die Aufgabe $\mathbf{7 \cdot 8}$.

2. Im Produkt sind der 1. Faktor **5** und der 2. Faktor **9**. Hier geht es nicht um die Aufgabe, denn die ist bereits gegeben, sondern um eine mögliche Zerlegung mit dem Ergebnis **45**. Natürlich gilt auch $\mathbf{15 \cdot 3 = 5 \cdot 9}$.

Das Kommutativgesetz der Multiplikation

Betrachte folgende Bilder.





Für das linke Bild berechnest du $\mathbf{3 \cdot 4}$ Pakete, für das rechte $\mathbf{4 \cdot 3}$ Pakete. Das rechte Bild ist das linke Bild von rechts aus betrachtet. Die Anzahl der Pakete hat sich damit nicht verändert.
Du schließt nun richtig $\mathbf{3 \cdot 4 = 4 \cdot 3}$. Du kannst nun alle Zahlenkombinationen von solchen Anordnungen überprüfen und erhältst immer die Gleichheit, denn die Anzahl der Pakete ändert sich nicht. Du schaust ja nur von einer anderen Seite auf die Anordnung.

Du sagst nun richtig: „Das ist ein Gesetz.“ Ich sage dir: „Richtig erkannt!“ Diese Gleichheit heißt ***Kommutativgesetz*** der Multiplikation natürlicher Zahlen. Das ist lateinisch und heißt einfach **Vertauschungsgesetz**.

Da es für alle natürlichen Zahlen richtig ist, schreibt der Mathematiker dafür

$$a \cdot b = b \cdot a \text{ für alle } a, b \in \mathbf{N}.$$

Wählst du für $a = \mathbf{147}$, so musst du auf beiden Seiten a durch **147** ersetzen. Wählst du noch für $b = \mathbf{879}$, so ist wieder auf beiden Seiten der Gleichung b durch **879** zu ersetzen. Du schreibst folglich

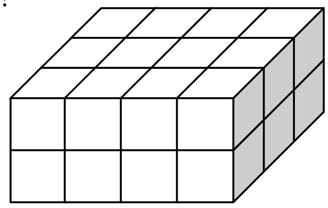
$$\mathbf{147 \cdot 879 = 879 \cdot 147}.$$

Sicher fragst du nach dem Wert des Produktes (Ergebnis). Da kann ich dir nur antworten: „Wenn du beide Seiten ausrechnest, so ist es gleich. Wie es aber lautet, interessiert hier nicht.“

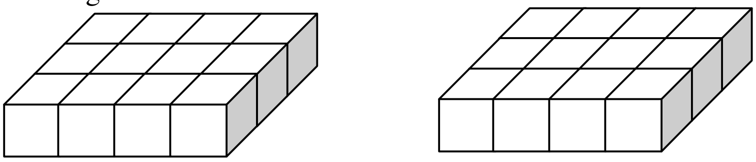
Anwendung: Statt $\mathbf{35 \cdot 3786}$ rechnest du $\mathbf{3786 \cdot 35}$, dann hast du weniger Schreibarbeit.

Das Assoziativgesetz der Multiplikation

Wie viele Pakete sind hier abgebildet?

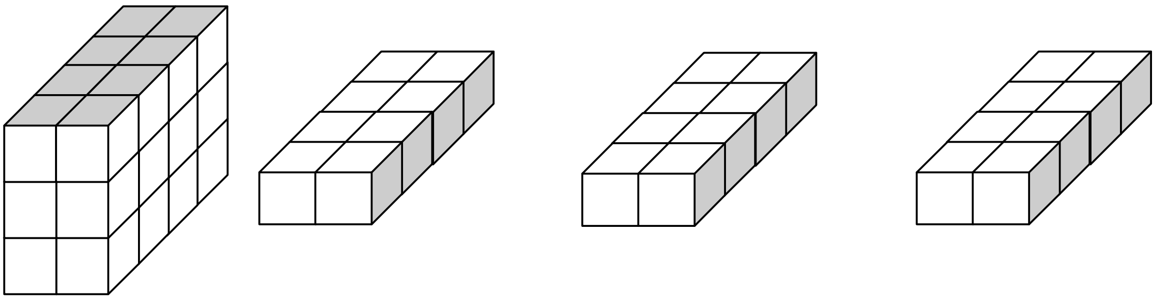


Dazu nimmst du die Lagen auseinander



und erkennst sofort in jeder Lage $\mathbf{4 \cdot 3}$ Pakete. Sie treten **2** mal auf. Insgesamt also $\mathbf{2 \cdot (4 \cdot 3)}$ Pakete.

Natürlich erkennst du, dass dieses Ergebnis von der Art und Weise der Zählung abhängt. Klar, sage ich! Stelle den Stapel auf die 8 Flächen wie du es hier siehst.



Es sind nun 3 Lagen mit $\mathbf{2 \cdot 4}$ Paketen. Diese kannst du auf 3 Plätze verteilen. Insgesamt also $\mathbf{(2 \cdot 4) \cdot 3}$ Pakete. Da sich die Gesamtzahl der Pakete nicht verändert hat, erhältst du mit dem ersten Bild die Gleichheit $\mathbf{(2 \cdot 4) \cdot 3 = 2 \cdot (4 \cdot 3)}$.
Beachte hierbei, dass sich die Reihenfolge der Zahlen **2, 4, 3** nicht verändert hat, nur die Klammer wird verschoben.

Dieses ist unser gesuchtes Gesetz. Es heißt ***Assoziativgesetz*** der Multiplikation natürlicher Zahlen. Das ist wieder lateinisch und heißt **Verbindungsgesetz**.

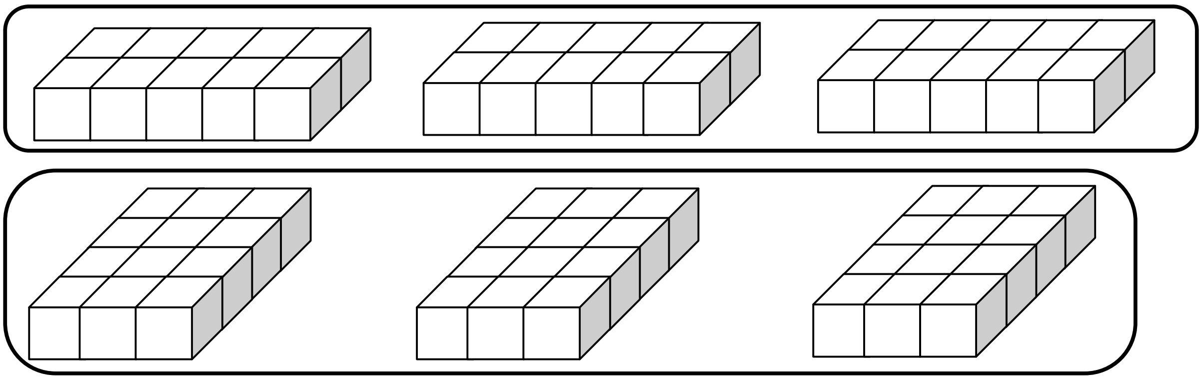
Da es für alle natürlichen Zahlen richtig ist, schreibt der Mathematiker dafür

$$\boldsymbol{a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c} \textbf{ für alle } \boldsymbol{a, b, c \in \mathbf{N}}.$$

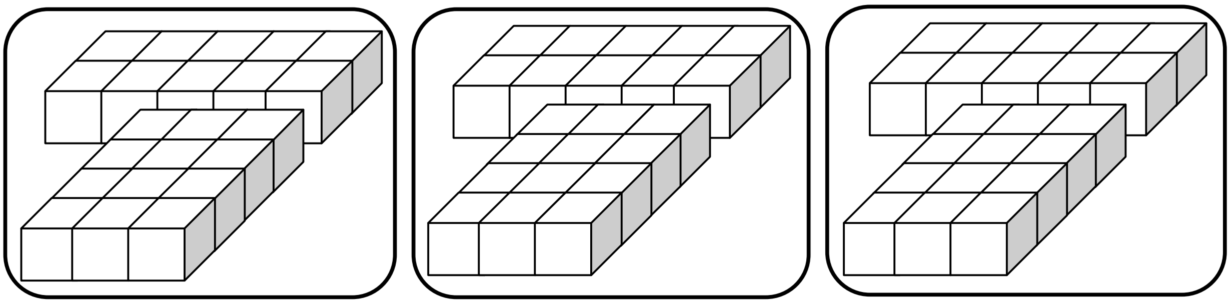
Es ist folglich egal, welche natürlichen Zahlen für ***a***, ***b*** oder ***c*** eingesetzt werden; das Ergebnis bleibt gleich!

Das Distributivgesetz natürlicher Zahlen

Folgendes Problem liegt vor dir. Wie viele Pakete sind es insgesamt?



Natürlich erkennst du sofort, dass es jeweils 3 gleiche Anordnungen sind und berechnest $\mathbf{3 \cdot 10 + 3 \cdot 12 = 66}$ Pakete. Geht es einfacher? Du denkst nach und schiebst die Pakete anders zusammen.



„Das ist ja wirklich viel einfacher!“ sagst du und rechnest $\mathbf{3 \cdot (10 + 12) = 66}$. Da sich die Anzahl der Pakete nicht verändert hat, stimmen beide Ergebnisse überein. Es gilt folglich $\mathbf{3 \cdot (10 + 12) = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 12}$.

Herzlichen Glückwunsch! Du bist auf ein mathematisches Gesetz gestoßen, das dir immer wieder begegnen wird. Es heißt ***Distributivgesetz*** (lateinisch) oder Verteilungsgesetz.

Der Mathematiker schreibt wieder allgemeiner

$$\boldsymbol{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c} \ \textbf{für alle } \boldsymbol{a, b, c \in \mathbf{N}}.$$

Dieses Gesetz verwendest du ständig, wenn größere Zahlen im „Kopf“ multipliziert werden.

Dazu ein **Beispiel**.

Multipliziere 8 mit 32! Du rechnest im Kopf:

$$\begin{aligned}\mathbf{8 \cdot 32} &= \mathbf{8 \cdot (30 + 2)} \\ &= \mathbf{8 \cdot 30 + 8 \cdot 2} \\ &= \mathbf{240 + 16} \\ &= \mathbf{256}\end{aligned}$$

Hierbei hast du natürlich $32 = 30 + 2$ summandisiert.

3.1 Schriftliche Multiplikation natürlicher Zahlen (Anwendung des Distributivgesetzes)

Bisher hast du die Aufgabe $\mathbf{243 \cdot 8}$ mit Hilfe des Distributivgesetzes wie folgt gelöst.

$$\begin{aligned}\mathbf{243 \cdot 8} &= \mathbf{(200 + 40 + 3) \cdot 8} \\ &= \mathbf{200 \cdot 8 + 40 \cdot 8 + 3 \cdot 8} \\ &= \mathbf{1600 + 320 + 24} \\ &= \mathbf{1944}\end{aligned}$$

Schreibst du die Ergebnisse **1600**, **320** und **24** untereinander, so ist dies die erste Stufe der schriftlichen Multiplikation.

$$\begin{array}{r} \underline{243 \cdot 8} \\ 24 \\ 320 \\ \underline{1600} \\ 1944 \end{array}$$

Hierbei ist es egal, ob du von vorne oder von hinten beginnst, denn es gilt das Kommutativgesetz.

Beginne aber jetzt von hinten, damit du Schreibarbeit sparst.
Wir gehen zur zweiten Stufe über und notieren die Überträge in einer eigenen Zeile.

$$\begin{array}{rl} \underline{243 \cdot 8} & \\ 1624 & \\ + \quad 32 & \longleftarrow \textbf{Überträge} \\ \hline 1944 & \end{array}$$

Du rechnest wie folgt $8 \cdot 3 = 24$. Die **4** schreibst du hin, die **2** in den Übertrag der Zehnerposition. Nun rechnest du $8 \cdot 4 = 32$, wobei die **4** eine Zehnerposition ist. Folglich schreibst du die **2** an die Zehnerposition und die **3** an die Hunderterposition des Übertrages. Zuletzt rechnest du $\mathbf{8 \cdot 2 = 16}$ und beachtest die Hunderterposition der **2**. Hier kannst du das Ergebnis **16** sofort eintragen, die **6** steht also an der Hunderterposition und die **1** an der Tausenderposition. Die Multiplikation ist damit beendet. Nun addierst du die untereinander stehenden Zahlen und erhältst das Produkt **1944** deiner Rechnung.

Im letzten Schritt behalten wir die Überträge im Kopf und addieren sie sofort.

$$\begin{array}{r} \underline{243 \cdot 8} \\ 1944 \end{array}$$

Du möchtest aber auch mehrstellige Zahlen multiplizieren. Zum Beispiel $\mathbf{683 \cdot 76}$. Dazu überlegst du wieder mit Hilfe des Distributivgesetzes die Zerlegung.

$$\begin{aligned} \mathbf{683 \cdot 76} &= \mathbf{683 \cdot (70 + 6)} \\ &= \mathbf{683 \cdot 70 + 683 \cdot 6} \end{aligned}$$

Natürlich beachtest du die Zerlegung $\mathbf{683 \cdot 70 = 683 \cdot (7 \cdot 10)}$. Die nimmst du ja auch im Kopf vor. Die Anwendung des Assoziativgesetzes liefert

$$\mathbf{683 \cdot (7 \cdot 10) = (683 \cdot 7) \cdot 10}$$

Damit hast du die Rechnung auf den dir bekannten Fall zurückgeführt, wenn du in der Rechnung an der Zehnerposition beginnst.

Führen wir diese Überlegungen zusammen.

$$\begin{array}{rl} \underline{683 \cdot 76} & \\ 4098 & \longleftarrow \mathbf{683 \cdot 6} \\ 4781 & \longleftarrow \mathbf{683 \cdot 7} \\ 1\ 1 & \longleftarrow \text{Überträge der Addition} \\ \hline 51908 & \end{array}$$

Nun bist du in der Lage beliebige natürliche Zahlen schriftlich zu multiplizieren, wenn du die Positionen beachtest.

3.2 Die Division natürlicher Zahlen

Folgende Aufgabe wird dir vorgelegt. Mit welcher Zahl muss **8** multipliziert werden, um **56** zu erhalten?

Das ist doch klar, natürlich mit **7**!

Was aber ist, wenn die Aufgabe folgendermaßen abgeändert wird? Mit welcher Zahl muss **79** multipliziert werden, um **474** zu erhalten?

„Die Aufgabe kann ich aufschreiben. Sie lautet $\mathbf{474 = 79} \cdot x$!“

Nun überlegst du, welche Zahl in Frage kommt. Dazu nimmst du statt **79** die Zahl **80** und erhältst $\mathbf{6 \cdot 80 = 480}$. Wegen

$$\begin{aligned} 6\cdot 79 &= 6\cdot(80-1)\\ &= 6\cdot 80-6\cdot 1\\ &= 480-6\\ &= 474 \end{aligned}$$

hast du dieses Problem gelöst. Die gesuchte Zahl lautet **6**. Diesen Lösungsansatz kennst du vom geschickten Multiplizieren.

Versuchen wir es mit einer größeren Zahl. Die Aufgabe lautet:

$$\mathbf{768 = 16}\cdot x\,.$$

Zerlegen wir die Zahl **768** so geschickt in Summanden, dass die **16** als Vielfache in jeden Summand vorkommt.

$$\begin{aligned} \mathbf{768} &= \mathbf{640+128}\\ &= \mathbf{16\cdot 40+16\cdot 8} \quad \textbf{Distributivgesetz}\\ &= \mathbf{16\cdot(40+8)}\\ &= \mathbf{16\cdot 48} \end{aligned}$$

Damit hast du auch diese Aufgabe geschickt gelöst. Die gesuchte Zahl lautet **48**.

Diese Überlegungen kannst du auch in einem Schema zusammenfassen.

$$\begin{array}{l} \mathbf{768 = 16\cdot 48}\\ \underline{\mathbf{64}}\\ \mathbf{128}\\ \underline{\mathbf{128}}\\ \quad\mathbf{0} \end{array}$$

Der Vorteil dieser Schreibweise ist offensichtlich. Du hast nämlich folgende Aufgabe gelöst:

Faktorisiere die Zahl 768, wobei ein Faktor 16 ist!

Leider hat sich diese Schreibweise nicht durchgesetzt. Üblicher ist die folgende Schreibweise.

$$\begin{array}{l} \mathbf{768 : 16 = 48}\\ \underline{\mathbf{64}}\\ \mathbf{128}\\ \underline{\mathbf{128}}\\ \quad\mathbf{0} \end{array}$$

Diese ist dir aus der Grundschule bekannt! Welches Schema du verwendest ist egal, nur richtig muss es sein. Du erkennst aber, dass es eigentlich keine Division gibt.

Dividieren ist immer die Frage nach einem Faktor!

Das Ergebnis einer Division bekommt auch einen Namen. Es heißt ***Quotient***. Da eine Gleichheit der linken und rechten Seite des Gleichheitszeichens vorliegt, heißt auch die Division selbst ***Quotient***. Die Zahlen in der Aufgabe gibt es auch eine Bezeichnung. Sie heißen ***Dividend*** und ***Divisor***.

$$\overbrace{\underbrace{55}_{\textbf{Dividend}} : \underbrace{11}_{\textbf{Divisor}}}^{\textbf{Quotient}} = \overbrace{5}^{\textbf{Quotient}}$$

3.3 Die Division natürlicher Zahlen, die nicht faktorisierbar sind

Änderst du die Zahlen ein wenig ab, zum Beispiel $\mathbf{768 = 17}\cdot x$, so kannst du nicht erwarten, das x eine natürliche Zahl ist. Versuchen wir es mit unserem Schema der Faktorisierung!

$$\begin{array}{l} \mathbf{768 = 17\cdot 45}\\ \underline{\mathbf{68}}\\ \;\;\mathbf{88}\\ \;\;\underline{\mathbf{85}}\\ \quad\;\mathbf{3} \end{array}$$

Die Faktorisierung klappt nicht, denn auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens steht Verschiedenes.

Korrigieren wir!

$$\begin{array}{l} \mathbf{768 = 17 \cdot 45 + 3} \\ \underline{\mathbf{68}} \\ \ \mathbf{88} \\ \ \underline{\mathbf{85}} \\ \ \ \mathbf{3} \end{array}$$

Jetzt stimmt die Gleichung!

Merke: **Faktorisiere so lange, bis der Rest der natürlichen Zahl nicht mehr teilbar ist. Addiere diesen Rest zum bisherigen Ergebnis!**

In der üblichen, aber schlechteren Schreibweise lautet das Ergebnis so:

$$\begin{array}{l} \mathbf{768 : 17 = 45 + 3 : 17} \\ \underline{\mathbf{68}} \\ \ \mathbf{88} \\ \ \underline{\mathbf{85}} \\ \ \ \mathbf{3} \end{array}$$

Damit schließen wir vorerst die Multiplikation und Division natürlicher Zahlen.

Fassen wir noch einmal alle Gesetze der natürlichen Zahlen zusammen.

1. Es gibt eine Zahl $\mathbf{0} \in \mathbf{N}$ mit $\mathbf{0} + x = x$ für jede natürliche Zahl x.

2. Jede natürliche Zahl $x \in \mathbf{N}$ hat einen **additiven Nachfolger**, nämlich $x+1$.

3. Für je zwei natürliche Zahlen $x, y \in \mathbf{N}$ ist $x + y$ eine natürliche Zahl.

4. Für je zwei natürliche Zahlen $x, y \in \mathbf{N}$ gilt das **Kommutativgesetz der Addition** $x + y = y + x$.

5. Für je drei natürliche Zahlen $x, y, z \in \mathbf{N}$ gilt das **Assoziativgesetz der Addition** $(x + y) + z = x + (y + z)$.

6. Für je zwei natürliche Zahlen $x, y \in \mathbf{N}$ ist $x \cdot y$ eine natürliche Zahl.

7. Es gibt eine Zahl $\mathbf{1} \in \mathbf{N}$ mit $\mathbf{1} \cdot x = x$ für jede natürliche Zahl x.

8. Für jede natürliche Zahl $x \in \mathbf{N}$ gilt: $0 \cdot x = 0$.

9. Für je zwei natürliche Zahlen $x, y \in \mathbf{N}$ gilt das **Kommutativgesetz der Multiplikation** $x \cdot y = y \cdot x$.

10. Für je drei natürliche Zahlen $x, y, z \in \mathbf{N}$ gilt das **Assoziativgesetz der Multiplikation** $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

Die Verbindung zwischen Addition und Multiplikation liefert:

11. Für je drei natürliche Zahlen $x, y, z \in \mathbf{N}$ gilt das **Distributivgesetz der Multiplikation** $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Sicher wunderst du dich, warum hier keine Gesetze über Subtraktion und Division auftauchen. Betrachtest du noch einmal die Seiten 6 und 15, so erkennst du, dass es weder eine Subtraktion noch eine Division gibt.

Subtrahieren ist folglich die Frage nach einem zu bestimmenden Summanden, wenn die Summe und ein Summand gegeben ist!

Division ist folglich die Frage nach einem zu bestimmenden Faktor, wenn das Produkt und ein Faktor gegeben sind!

Diese Regeln gelten auch für Ganze Zahlen.

$3 \cdot (-4) = (-4) + (-4) + (-4) = -12$ ist offensichtlich. Setzen wir nun noch voraus, dass das Distributivgesetz bestehen soll, so erhalten wir aus $x \cdot (+4) = -12$ und $(+3) \cdot (+4) = 12$ die Gleichung $x \cdot (+4) + (+3) \cdot (+4) = 0$. Daraus folgt $(x + (+3)) \cdot (+4) = 0$, also $x = -3$ nach **8**. Folglich gilt auch $(-3) \cdot (+4) = -12$. Genau so folgt aus $(-3) \cdot x = 12$ die Gleichung $(-3) \cdot x + (-3) \cdot (+4) = 0$ auch $(-3) \cdot (x + (+4)) = 0$, also $x = -4$. Damit ist alles gezeigt.