Kapitel 3

Lineare Geometrie

1. Homogene und inhomogene lineare Gleichungssysteme

Täglich werden wir mit Gleichungssystemen konfrontiert. Manche scheinen sehr kompliziert zu sein und manchmal können sie nur numerisch gelöst werden. Dagegen sind lineare Gleichungssysteme überschaubar und ihre Lösungen leicht zu berechnen. Im Folgenden schreiben wir für „Lineares Gleichungssystem“ kurz **LGS**. Schauen wir uns zwei Beispiele an, um den Unterschied aufzuzeigen.

Beispiele:

a) Nichtlineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} x\sin(t) & + & y^2e^x & = & 5 \\ \sqrt{x}\cos(x) & - & t\ln(y) & = & 4 \end{array}, \text{ wobei } x, y \in \mathbf{R}^+ \text{ und } t \in \mathbf{R}.$$

b) Lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & \sqrt{2}y & + & \pi z & = & \sin\sqrt{5} \\ \ln(4)x & & & + & e^3z & = & 6{,}5 \end{array}, \text{ wobei } x, y, z \in \mathbf{R}.$$

Im ersten Beispiel sind die Variablen durch höhere Rechenoperationen und Funktionen verknüpft. Im zweiten Beispiel sind die Variablen getrennt und nur durch Addition und Subtraktion verknüpft.

Das erste Beispiel lässt sich nur durch höhere algebraische Methoden (Kommutative Algebra) bzw. höhere Analysis (Satz der impliziten Funktionen) oder mittels numerischer Methoden (Fixpunktsatz, Newtonsches Verfahren) lösen. Ein lineares Gleichungssystem besticht in seiner einfachen Form, nämlich, dass jeder Exponent der Unbekannten in der ersten Potenz erscheint.

Definition 1:
Ein Schema

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

mit a_{ij} , $b_k \in$ **K** heißt **inhomogenes lineares Gleichungssystem in *n* Unbestimmten** x_1, x_2, …, x_n über **K**. Gilt $b_k = 0$ für alle k $\in$ {1, …, m}, so heißt es **homogen**.

Hierbei steht **K** für **Z**, **Q**, **R** oder **C**.

Beispiele:

a) Gegeben ist folgendes LGS.

$$\begin{array}{rcrcl} 4x & + & 2y & = & 1 \\ 2x & + & y & = & 0 \end{array}$$

Es ist nicht lösbar, denn setzen wir $y = -2x$ in $4x + 2y = 1$ ein, so erhalten wir $1 = 4x + 2\cdot(-2x) = 0$, eine offenbar falsche Aussage.

b) Ändern wir das LGS wie folgt ab:

$$\begin{array}{rcrcl} 4x & + & 2y & = & 1 \\ 2x & - & y & = & 0 \end{array}$$

Jetzt ist das LGS mit genau einer Lösung lösbar, denn $y=2x$ in $4x+2y=1$ eingesetzt liefert $1=4x+2\cdot(2x)=8x$, also $x=\frac{1}{8}$ und damit $y=\frac{1}{4}$.

c) Als letztes betrachten wir folgendes LGS.

$$4x+2y=1$$

Dieses LGS besitzt unendlich viele Lösungen, denn wählen wir $y=t$ mit $t\in \mathbf{R}$, so erhalten wir für x die Lösung $x=\frac{1}{4}(1-2t)$ mit $t\in \mathbf{R}$.

Da es nur auf die Zahlen vor den Unbekannten ankommt, wollen wir eine neue Schreibweise einführen, die uns die Arbeit erleichtert, Lösungen zu finden.

1.1 Die Eliminationsmethode

Die Eliminationsmethode haben wir schon eben bei den Beispielen kennengelernt. Hier soll sie einem neuen Schema gegenübergestellt werden. Dazu schreiben wir das LGS in einer anderen Form.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad \text{oder in Kurzform} \qquad A\vec{x}=\vec{b}.$$

Das inhomogene LGS $\begin{array}{ccccccc} 3x & - & 4y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \end{array}$ schreibt sich als

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw. in Kurzform} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right),$$

da es auf die Unbekannten nicht ankommt. Gesucht sind nun alle Lösungen. Dazu multiplizieren wir die zweite Gleichung mit – 3 und addieren sie zur ersten Gleichung. Wir erhalten dann

$$\begin{array}{ccccccc} & & -7y & + & 4z & = & -1 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -7 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right),$$

Multiplizieren wir die zweite Gleichung mit –7 und addieren die erste Gleichung zur zweiten, so bekommen wir folgendes LGS:

$$\begin{array}{ccccccc} & & -7y & + & 4z & = & -1 \\ 7x & & & - & 3z & = & 6 \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -7 & 4 & -1 \\ 7 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right).$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit –1 und vertauschen dann die Gleichungen, so erhalten wir

$$\begin{array}{ccccccc} 7x & & & - & 3z & = & 6 \\ & & 7y & - & 4z & = & 1 \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 7 & -4 & 1 \end{array}\right).$$

Hier können wir nun alle Lösungen ablesen. Da z nicht mehr eliminiert werden kann, wählen wir $z=7t$. Damit erhalten wir $x=3t+\frac{6}{7}$ und $y=4t+\frac{1}{7}$, mit $t\in\mathbf{R}$.

Die Lösung kann jetzt zu einen sogenannten Vektor zusammengesetzt werden.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3t+\frac{6}{7} \\ 4t+\frac{1}{7} \\ 7t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3t \\ 4t \\ 7t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 0 \end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}+\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t\in\mathbf{R}.$$

Wenn man die Addition von Vektoren und die Multiplikation von Zahlen mit Vektoren so versteht, wie wir es hier einfach vorgenommen hat, kann die Lösung aus den letzten beiden Spalten einfach abgelesen werden. Halten wir die neuen Verknüpfungen noch fest.

Definition 2:

Es sei n die Anzahl der Unbekannten eines LGSs.

Zwei Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ werden wie folgt addiert: $\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.

Entsprechend werden mehrere Vektoren addiert.

Ein Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ wird mit einer Zahl $r \in \mathbf{R}$ wie folgt multipliziert: $r \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} r \cdot x_1 \\ r \cdot x_2 \\ \vdots \\ r \cdot x_n \end{pmatrix}$.

Kehren wir zum LGS zurück. Alle Lösungen bekommen wir jetzt, indem wir auf der unteren Diagonalen mit der negativen Zahl der oberen Diagonalen erweitern. Die neue Matrix sieht nun wie folgt aus:

$$\left(\begin{array}{cc:c|c} 7 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 7 & -4 & 1 \\ \hdashline & & -7 & 0 \end{array}\right).$$

Dabei ist $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$ ein Lösungsvektor des homogenen und $\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein spezieller oder partikulärer Vektor des inhomogenen LGSs.

Definition 3:

Ein Vektor $\vec{w}$ heißt homogene Lösung des LGSs $A\vec{x} = \vec{b}$, wenn $A\vec{w} = \vec{0}$ ist. Ein Vektor $\vec{v}$ heißt spezielle oder partikuläre Lösung des LGSs $A\vec{x} = \vec{b}$, wenn $A\vec{v} = \vec{b}$ ist.

Halten wir unsere Ergebnisse noch einmal gesondert fest.

Folgerung 4:

a) Die Differenz zweier spezieller Lösungen eines inhomogenen LGSs ist eine Lösung des homogenen LGSs.

b) Jede Lösung eines inhomogenen LGSs ist von der Form $\vec{w} + \vec{v}$, wobei $\vec{w}$ eine homogene und $\vec{v}$ eine spezielle Lösung ist.

2. Lineare Gleichungssysteme und affine Teilräume

In diesem Abschnitt soll der Zusammenhang zwischen affinen Teilräumen (Punkte, Geraden, Ebenen usw.) untersucht werden. Dazu setzen wir voraus, dass wir das homogene LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ bzw. inhomogene LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ mit dem erweiterten Gaußalgorithmus bearbeitet haben, so dass wir alle Lösungen ablesen können. Die Matrix A hat danach die Form $A \approx \left(\begin{array}{c:c} E_r & C \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right)$ bzw. $\left(\begin{array}{c:c|c} E_r & C & D \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ (Lösungsmatrix).

Erstes Beispiel:

Gegeben ist eine Gerade durch den Ursprung $(0|0)$ und den Punkt $(6|3)$. Um von den Punkt $(0|0)$ zum Punkt $(6|3)$ zu gelangen, ist eine Verschiebung notwendig. Diese bezeichnen wir mit $\nu_{\binom{6}{3}}$. Es gilt also $\nu_{\binom{6}{3}}(0|0) = (6|3)$. Der Ursprung wird folglich in Richtung $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ verschoben**.** Deshalb heißt dieser Verschiebungsvektor $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ auch ***Richtungsvektor***.

Gesucht wird ein LGS mit diesem Vektor als Lösung. Nun wissen wir aber auch, dass alle Verschiebungen $r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbf{R}$ die ganze Gerade darstellen. Unsere Lösungsmatrix lautet folglich $\left(\begin{array}{c:c} 3 & -6 \\ \hdashline & -3 \end{array}\right)$.

Das zugehörige homogene LGS lautet somit $3x - 6y = 0$. Folglich sind $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbf{R}$ und $3x - 6y = 0$ äquivalente Beschreibungen für ein und dasselbe geometrische Objekt, nämlich, in diesem Beispiel, eine Gerade (Bild 1).

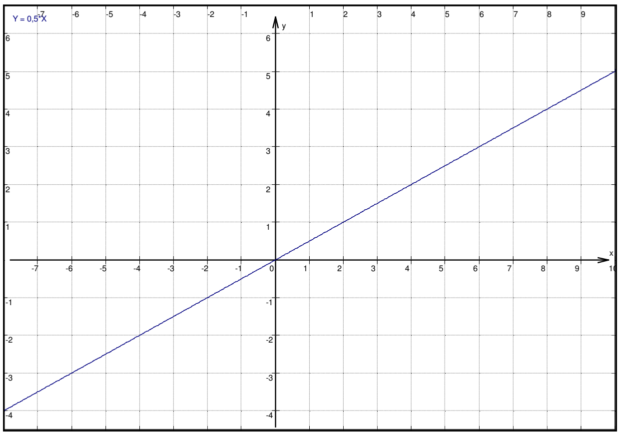


Bild 1

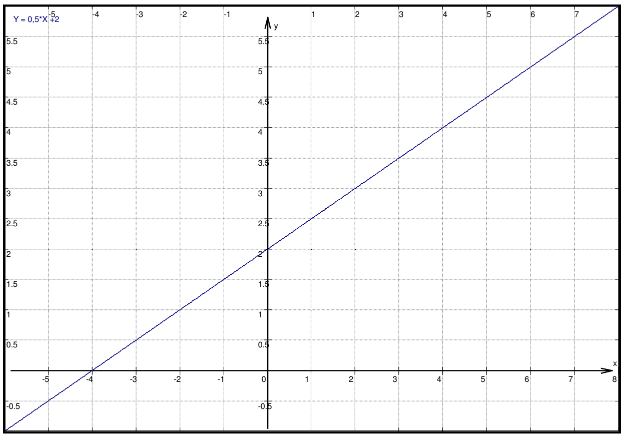


Bild 2

Verschieben wir jetzt die Gerade aus dem Ursprung (Bild 2). Wie lautet das zugehörige inhomogene LGS?

Eine spezielle Lösung lautet $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, denn der Ursprung (0|0) ist in den Punkt (0|2) verschoben worden.

Setzen wir diese in die linke Seite des LGS $3x - 6y$ ein, so erhalten wir $3 \cdot 0 - 6 \cdot 2 = -12$.

Das gesuchte inhomogene LGS lautet folglich $3x - 6y = -12$.

Unsere Lösungsmatrix erscheint jetzt in normierter Form: $\left(\begin{array}{c:c|c} 1 & -2 & -4 \\ \hdashline & -1 & 0 \end{array}\right)$.

Man erkennt, dass diese spezielle Lösung gerade die Verschiebung zum Durchstoßpunkt $(-4|0)$ auf der ersten Achse angibt. Der Verschiebungsvektor ist dann $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Merke:

Ein Vektor des homogenen LGSs gibt immer die Richtung an. Deshalb heißen solche Vektoren ***Richtungsvektoren*** des geometrischen Objekts (hier: die Gerade).

Der Vektor (spezielle Lösung) des inhomogenen LGSs gibt immer die Verschiebung zum Durchstoßpunkt (hier 1. Achse) an. Er heißt ***Stützvektor*** (mir würde ***Stoßvektor*** besser gefallen) des geometrischen Objekts (hier: die Gerade).

Aufgabe:

Im dreidimensionalen Raum $\mathbf{R}^3$ ist der Punkt $(3|2|4)$ gegeben. Die Gerade durch den Nullpunkt $(0|0|0)$ und den Punkte $(3|2|4)$ ist damit eindeutig bestimmt.

- **a)** Wie lautet das zugehörige homogene LGS?
- **b)** Wie lautet das zugehörige inhomogene LGS, wenn die Gerade aus dem Nullpunkt parallel in den Punkt $(-2|3|6)$ verschoben ist?
- **c)** Wie ist hier der Stoßvektor zu interpretieren?

Lösung:

a) Die Richtung wird vom homogenen Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ festgelegt. Folglich ist $\left(\begin{array}{cc:c} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \\ \hdashline & & -4 \end{array}\right)$ unsere Lösungsmatrix. Das homogene LGS lautet folglich $\begin{aligned} 4x \quad\; -3z &= 0 \\ 4y - 2z &= 0 \end{aligned}$.

b) Das zugehörige inhomogene LGS erhalten wir durch Einsetzen des speziellen Vektors $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Folglich lautet das inhomogene LGS

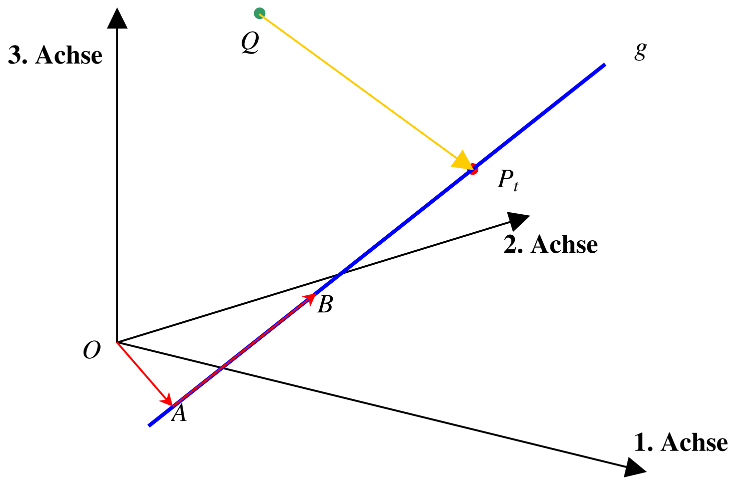
$$\begin{aligned} 4x \quad\; -3z &= 4\cdot(-2)-3\cdot 6 = -26 \\ 4y - 2z &= 4\cdot 3 - 2\cdot 6 = 0. \end{aligned}$$

c) Unsere Lösungsmatrix lautet $\left(\begin{array}{cc:c|c} 4 & 0 & -3 & -26 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ \hdashline & & -4 & 0 \end{array}\right)$. Damit ist der ***Stoßpunkt*** $(-26|0|0)$. Er liegt auf der ersten Koordinatenachse, da $y = 0$ und $z = 0$ sind.

An diesen Beispielen ist zu erkennen wie einfach es ist zwischen der Lösung in Vektorform (sogenannte Parameterdarstellung) und dem LGS (sogenannte Darstellung in Gleichungsform) hin und her zu wechseln. Dieses macht man sich zu nutze, wenn mehrere geometrische Objekte vorliegen und man wissen will, in welcher Lage sie zueinander stehen.

3. Lagebeziehungen

3.1 Der Abstand eines Punktes zu einer Geraden



Problemstellung

1. Gegeben ist ein Punkt Q und eine Gerade g: $g(t) := \overrightarrow{OP_t} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}, \quad t \in \mathbf{R}$ in Parameterdarstellung. [Speziell: $Q(6|-3|3)$ und g: $g(t) = \overrightarrow{OP_t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$] Gesucht ist der Abstand (Distanz) $d(Q,g) := \{\, d(Q,P) \mid P \in g \,\}$.

- **a)** Benutzen Sie dazu das Skalarprodukt und das Senkrechtstehen zweier Vektoren.
- **b)** Schreiben Sie den Abstand $d(Q,P_t)$ für $P_t \in g$ als Funktion $f_r(t)$ in Abhängigkeit von t und lösen Sie das Problem als Extremwertaufgabe.
- **c)** Leiten Sie eine Formel für den Abstand $d(Q,g)$ her, und berechnen Sie den Abstand für die konkrete Aufgabe.

Lösung:

Zuerst führen wir eine neue Abkürzung ein. $d(Q,P) =: \left\| \overrightarrow{QP} \right\| = \sqrt{\overrightarrow{QP} \bullet \overrightarrow{QP}}$ (Pythagoras in 3D)

a) Aus der Zeichnung entnehmen wir für den Abstand des Punktes Q zu einem beliebigen Punkt P_t den Vektor $\overrightarrow{QP}_t$. Diesen schreiben wir als $\overrightarrow{QP_t} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP_t}$. Da der Punkt P_t auf der Geraden g liegt, folgt $\overrightarrow{QP}_t = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP}_t = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{QA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$. Der kürzeste Abstand ergibt sich nach Pythagoras aus $\overrightarrow{QP}_t \perp \overrightarrow{AB}$ zu

$$0 = \left(\overrightarrow{QA} + t \cdot \overrightarrow{AB} \right) \bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{QA} \bullet \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB}.$$

Demzufolge ist $t = -\dfrac{\overrightarrow{QA} \bullet \overrightarrow{AB}}{\left\| \overrightarrow{AB} \right\|^2}$. Setzen wir das Ergebnis in die Parameterdarstellung für g ein, so erhalten wir den Punkt P_t mittels $\overrightarrow{OP_t} = \overrightarrow{OA} - \dfrac{\overrightarrow{QA} \bullet \overrightarrow{AB}}{\left\| \overrightarrow{AB} \right\|^2} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Hieraus berechnet sich der Abstand der Punkte Q und P_t durch die Länge des Vektors $\overrightarrow{QP_t}$ mittels Skalarprodukt $\left\| \overrightarrow{OP_t} \right\| = \sqrt{\overrightarrow{OP_t} \bullet \overrightarrow{OP_t}}$ zu

$$d(Q,g) =: \left\|\overrightarrow{QP_t}\right\| = \sqrt{\left\|\overrightarrow{QA}\right\|^2 - \frac{\left(\overrightarrow{QA}\bullet\overrightarrow{AB}\right)^2}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}} = \sqrt{\frac{\left\|\overrightarrow{QA}\right\|^2 \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left(\overrightarrow{QA}\bullet\overrightarrow{AB}\right)^2}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}} = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}\sqrt{\left\|\overrightarrow{QA}\right\|^2 \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left(\overrightarrow{QA}\bullet\overrightarrow{AB}\right)^2}\,.$$

b) Der Abstand ist jetzt durch $f(t) = \left(d(Q,P_t)\right)^2 = \left\|\overrightarrow{QP_t}\right\|^2$ gegeben. Mit $\overrightarrow{QP_t} = \overrightarrow{QA} + t\cdot\overrightarrow{AB}$ folgt $f(t) = \overrightarrow{QP_t}\bullet\overrightarrow{QP_t} = \left(\overrightarrow{QA} + t\cdot\overrightarrow{AB}\right)\bullet\left(\overrightarrow{QA} + t\cdot\overrightarrow{AB}\right) = \left\|\overrightarrow{QA}\right\|^2 + 2t\cdot\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{QA} + t^2\cdot\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$. Mit $f'(t) = 2\cdot\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{QA} + 2t\cdot\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$ erhalten wir $0 = f'(t) = 2\cdot\left(\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{QA} + t\cdot\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2\right) \Rightarrow t = -\frac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{QA}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}$

und damit $f\left(-\frac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{QA}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}\right) = \left\|\overrightarrow{QA}\right\|^2 - 2\frac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{QA}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}\cdot\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{QA} + \left(-\frac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{QA}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}\right)^2\cdot\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{QA}\right\|^2 - \frac{(\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{QA})^2}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}$.

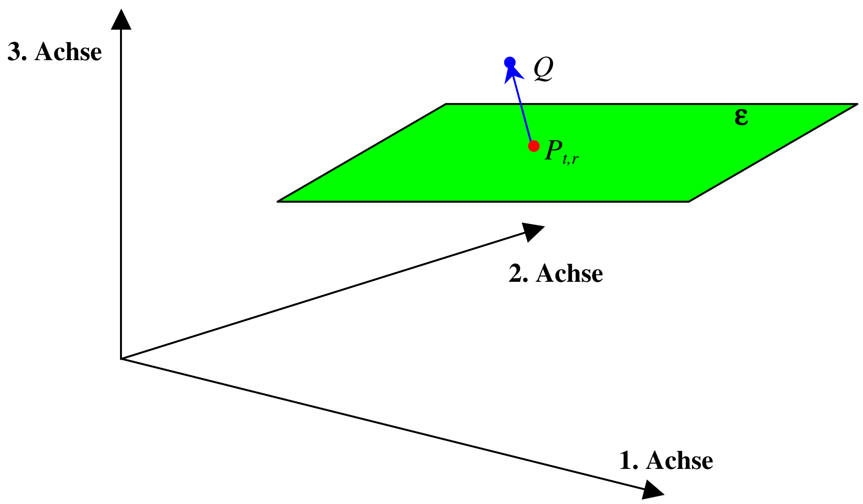
Dies ist äquivalent zu $\frac{1}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}\cdot\left(\left\|\overrightarrow{QA}\right\|^2\cdot\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - (\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{QA})^2\right)$. Ziehen wir die Wurzel, so haben wir den Abstand berechnet.

c) In beiden Fällen ergibt sich die Formel

$$d(Q,g) =: \left\|\overrightarrow{QP_t}\right\| = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}\cdot\sqrt{\left\|\overrightarrow{QA}\right\|^2\cdot\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - (\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{QA})^2}\,.$$

Speziell ergibt sich für das konkrete Problem $g(t) = \overrightarrow{OP_t} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\-5\\4\end{pmatrix}$, $t\in\mathbf{R}$ und $Q(6|-3|3)$ die Lösung: $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = 42$, $\left\|\overrightarrow{QA}\right\|^2 = 54$, $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{QA} = 14$, also $\sqrt{\frac{74}{63}} = \frac{1}{21}\sqrt{518}$.

3.2 Der Abstand eines Punktes zu einer Ebene



Problemstellung

Gegeben sind ein Punkt Q und eine Ebene ε. Die Ebene kann in Parameterdarstellung oder als eine Gleichung gegeben sein. In beiden Fällen ist der Normalenvektor $\overrightarrow{ON}$ zur Ebene ε sofort bekannt. Ist nun $P_{t,r}$ ein beliebiger Punkt der Ebene ε, so ist $P_{t,r}$ so zu bestimmen, dass $\overrightarrow{QP_{t,r}} = s\cdot\overrightarrow{ON}$, $s\in\mathbf{R}$.

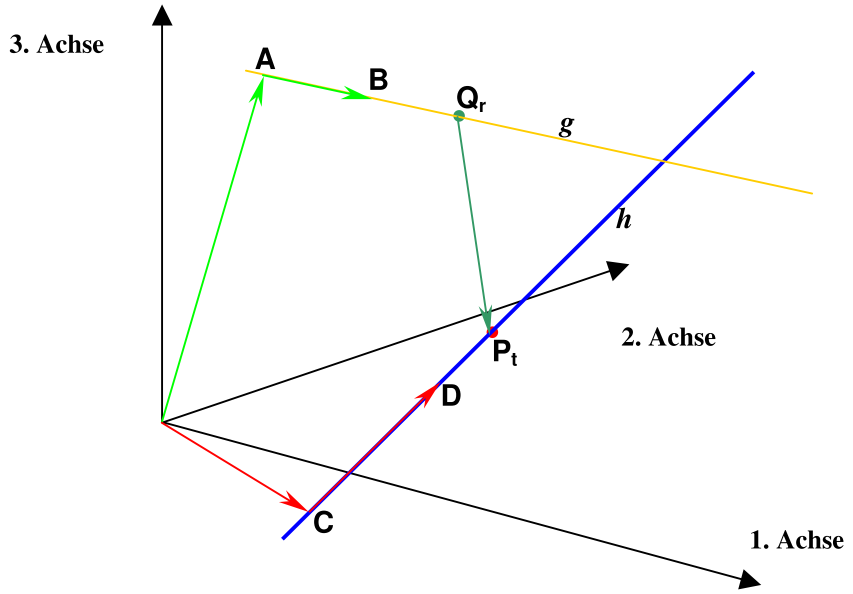
Die Zahl $|s|$ ist dann der Abstand. Erinnerung: $pr_{\vec{a}}(\vec{b}) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\vec{a} \bullet \vec{a}} \vec{a}$ ist die Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf $\vec{a}$. Ist P ein beliebiger Punkt der Ebene ε, so erhalten wir $pr_{\overrightarrow{ON}}(\overrightarrow{QP}) = \overrightarrow{ON} \bullet \overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{ON}$ und $s = \overrightarrow{ON} \bullet \overrightarrow{QP}$. Der lotrechte Punkt $P_{t,r}$ unter Q in der Ebene ε ist dann durch $\overrightarrow{OP_{t,r}} = \overrightarrow{OQ} + s \cdot \overrightarrow{ON}$ gegeben.

Parameterdarstellung: $\varepsilon(t,r) = \overrightarrow{OP_{t,r}} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} + r\overrightarrow{AC},\ t,r \in \mathbf{R}$. Mit $\overrightarrow{ON} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ folgt $\overrightarrow{QP_{t,r}} = \overrightarrow{QA} + t\overrightarrow{AB} + r\overrightarrow{AC}$, also $s = \overrightarrow{QP_{t,r}} \bullet \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{QA} \bullet \overrightarrow{ON}$, also $s = \overrightarrow{QA} \bullet \overrightarrow{ON}$.

Gleichung: $ax + by + cz = d$. Wir formen um zu $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OX} - d = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|}\left(\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OX} - d\right) = 0$. Mithin ist $\frac{1}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|}\left|\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OQ} - d\right|$ der Abstand des Punktes Q zur Ebene ε.

Bemerkung: Der Normalenvektor $\overrightarrow{ON}$ kann leicht mit dem äußeren Produkt $\vec{a} \wedge \vec{b}$ berechnet werden (Seite 9).

3.3 Der Abstand zweier Geraden



Problemstellung

1. Gegeben sind zwei Geraden

$$g\colon\ g(r) := \overrightarrow{OQ_r} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB},\ r \in \mathbf{R} \text{ und } h\colon\ h(t) := \overrightarrow{OP_t} = \overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{CD},\ t \in \mathbf{R}$$

als Parameterdarstellungen. Gesucht ist der Abstand $d(h,g) := \{d(Q,P) \mid Q \in h \wedge P \in g\}$.

[Speziell: $g(r) = \overrightarrow{OQ_r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix};\quad r \in \mathbf{R}$, und $h(t) = \overrightarrow{OP_t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix},\quad t \in \mathbf{R}$.]

a) Benutzen Sie dazu das Skalarprodukt und das Senkrechtstehen zweier Vektoren.

b) Schreiben Sie den Abstand $d(Q_r, P_t)$ für $Q_r \in h$ und $P_t \in g$ als Funktion $f(t,r)$. Lösen Sie das Problem als Extremwertaufgabe, indem Sie $f_r(t)$ in Abhängigkeit von t sowie $f_t(r)$ in Abhängigkeit von r betrachten (Funktionen mit Scharparametern).

c) Leiten Sie eine Formel für den Abstand $d(h,g)$ her und berechnen Sie den Abstand für die konkrete Aufgabe.

Lösung:

Wir betrachten das Quadrat des Verbindungsvektors $f(t,r) = \left(h(t) - g(r)\right)^2$ (Skalarprodukt mit sich selbst) und berechnen das Minimum dieser Funktion für *t* sowie *r*.

Dazu leiten wir $f_r(t)$ und $f_t(r)$ ab. Wir erhalten

$$\dot{f}_r(t) = 2 \cdot \left(h(t) - g(r)\right) \bullet \dot{h}(t)$$
$$f_t{}'(r) = -2 \cdot \left(h(t) - g(r)\right) \bullet g'(r).$$

Für ein Minimum müssen beide Ableitungen verschwinden. Folglich gilt mit $g'(r) = \overrightarrow{AB}$ und $\dot{h}(t) = \overrightarrow{CD}$

$$* \quad \begin{matrix} \left(h(t)-g(r)\right) \bullet \dot{h}(t) = 0 \\ \left(h(t)-g(r)\right) \bullet g'(r) = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \left(\overrightarrow{AC} + t\overrightarrow{CD} - r\overrightarrow{AB}\right) \bullet \overrightarrow{CD} = 0 \\ \left(\overrightarrow{AC} + t\overrightarrow{CD} - r\overrightarrow{AB}\right) \bullet \overrightarrow{AB} = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} t\left\|\overrightarrow{CD}\right\|^2 - r\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{CD} \\ t\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB} - r\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = -\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} \end{matrix}$$

Insbesondere erhalten wir mit $\ddot{h}(t) \underset{t\varepsilon\mathbf{R}}{\equiv} 0$ und $g''(r) \underset{r\varepsilon\mathbf{R}}{\equiv} 0$

$$\ddot{f}_r(t) = 2 \cdot \left(\dot{h}(t)\right)^2 + 2 \cdot \left(h(t) - g(r)\right) \cdot \ddot{h}(t) = 2 \cdot \left(\dot{h}(t)\right)^2 = 2 \cdot \left\|\overrightarrow{CD}\right\|^2 > 0$$
$$f_t{}''(r) = 2 \cdot \left(g'(r)\right)^2 - 2 \cdot \left(h(t) - g(r)\right) \cdot g''(r) = 2 \cdot \left(g'(r)\right)^2 = 2 \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 > 0.$$

Die Schüler lösen nun dieses LGS in *r* und *t*.

Da die kürzeste Verbindungsstrecke senkrecht auf $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ steht, ist folglich $h(t) - g(r)$ ein Vielfaches des Vektors $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}$.

Erinnerung: $*\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$. In der klassischen Mathematik wird dieser Vektor nach Physikern mit $\vec{a} \times \vec{b}$ bezeichnet. Der Normalenvektor ist damit $\dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|}$.

Zur einfachen Berechnung gehe wie folgt vor: Mit $\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}$ und $\vec{b} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + b_3\vec{e_3}$ folgt $\vec{a} \wedge \vec{b} = \left(a_1b_2 - a_2b_1\right)\vec{e_1} \wedge \vec{e_2} + \left(a_2b_3 - a_3b_2\right)\vec{e_2} \wedge \vec{e_3}\left(a_3b_1 - a_1b_3\right)\vec{e_3} \wedge \vec{e_1}$.

Da $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ senkrecht auf $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}$ stehen, erhalten wir die Minimalbedingung

$$\left(h(t) - g(r)\right) \bullet \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{AC} \bullet \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}\right).$$

Interpretation:

(1) Ist $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = \vec{0}$, so sind die Geraden parallel!

(2) Ist $\overrightarrow{AC} \bullet \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}\right) = 0 \wedge \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} \neq 0$, so schneiden sich die Geraden!

(3) Ist $\overrightarrow{AC} \bullet \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}\right) \neq 0$, so sind die Geraden windschief!

Bestimmen wir nun den Abstand. Dazu sei $\overrightarrow{ON} := \dfrac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}}{\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}\right\|}$ der Normalenvektor. Dann ist $h(t) - g(r) = s \cdot \overrightarrow{ON}$. Wir finden $s = \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{ON}$.

Folglich ist der Abstand $|s|$:

$$|s| = \left| \overrightarrow{AC} \bullet \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}}{\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} \right\|} \right| = \frac{\left| \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} \right|}{\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} \right\|}.$$

Es sind noch die „Punkte“ $\overrightarrow{OQ_r}$ und $\overrightarrow{OP_t}$ zu bestimmen. Die **Schüler** lösen das lineare Gleichungssystem $t \cdot \overrightarrow{CD} - r \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{AC}$.

Wir wollen *t* und *r* berechnen. Dazu dürfen wir annehmen, dass $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ die Länge eins haben. Dann ist $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}$. Wir finden dann das LGS (vgl. * Seite 9)

$$\begin{array}{r} \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{CD} - r \cdot \overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB} + t = 0 \\ -\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} - t \cdot \overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB} + r = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} t = r \cdot \overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{CD} \\ r = \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB}. \end{array}$$

Es folgt

$$\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{CD} - \left(\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB} \right) \overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB} + t = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB} + t \left(1 - \left(\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB} \right)^2 \right) = 0,$$

also

$$t = \frac{\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{CD}}{1 - \left(\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB} \right)^2}.$$

Aus $r \cdot \overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{CD} = t$ folgt $-\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} - \left(r \cdot \overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{CD} \right) \cdot \overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB} + r = 0$, also

$$r = \frac{\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB}}{1 - \left(\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB} \right)^2}.$$

Wir erhalten die gesuchten „Punkte“:

$$\overrightarrow{OQ_r} = \overrightarrow{OA} + \frac{\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB}}{1 - \left(\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB} \right)^2} \overrightarrow{AB} \text{ und } \overrightarrow{OP_t} = \overrightarrow{OC} + \frac{\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{CD}}{1 - \left(\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB} \right)^2} \overrightarrow{CD}.$$

Ersetzen wir noch $\overrightarrow{AB}$ bzw. $\overrightarrow{CD}$ durch $\frac{\overrightarrow{AB}}{\left\| \overrightarrow{AB} \right\|}$ bzw. $\frac{\overrightarrow{CD}}{\left\| \overrightarrow{CD} \right\|}$, so erhalten wir

$$\overrightarrow{OQ_r} = \overrightarrow{OA} + \frac{\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB}}{\left\| \overrightarrow{AB} \right\|^2 - \left(\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB} \right)^2} \overrightarrow{AB} \text{ und } \overrightarrow{OP_t} = \overrightarrow{OC} + \frac{\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{CD}}{\left\| \overrightarrow{CD} \right\|^2 - \left(\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB} \right)^2} \overrightarrow{CD}.$$

Der Minimalvektor $\overrightarrow{Q_r P_t}$ ist folglich

$$\overrightarrow{Q_r P_t} = \overrightarrow{AC} + \frac{\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{CD}}{\left\| \overrightarrow{CD} \right\|^2 - \left(\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB} \right)^2} \overrightarrow{CD} - \frac{\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB}}{\left\| \overrightarrow{AB} \right\|^2 - \left(\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{AB} \right)^2} \overrightarrow{AB}.$$

Lösen wir noch unser spezielles Problem.

$g(r) = \overrightarrow{OQ_r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $h(t) = \overrightarrow{OP_t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$, $r, t \in \mathbf{R}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$ sowie $\frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}}{\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} \right\|} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Mit der Formel $s = \overrightarrow{AC} \bullet \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}}{\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} \right\|} = \frac{\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}}{\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} \right\|}$ errechnet der Schüler $s = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 4{,}5 = 1{,}5\sqrt{3}$. Nun folgen aus $t \cdot \overrightarrow{CD} - r \cdot \overrightarrow{AB} = s \cdot \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{AC}$ die Parameter $t = \frac{2}{7}$, $r = \frac{1}{14}$.

Wir erhalten

$$\overrightarrow{OQ_r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 17 \\ -27 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{OP_t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{7} \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix},$$

also $Q_r = \left(\frac{17}{14}, -\frac{27}{14}, \frac{5}{14} \right)$ und $P_t = \left(-\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{8}{7} \right)$.