Die Normalparabel und ihre Verschiebungen

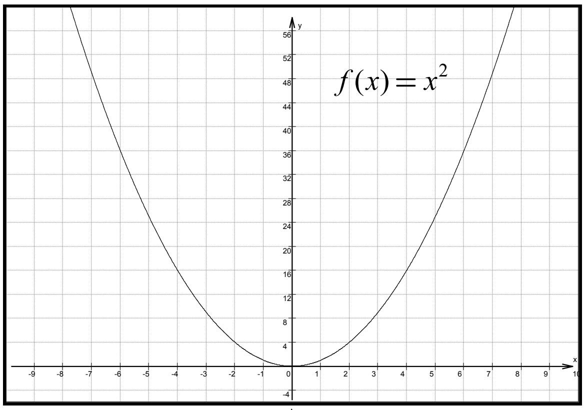

Bild 1

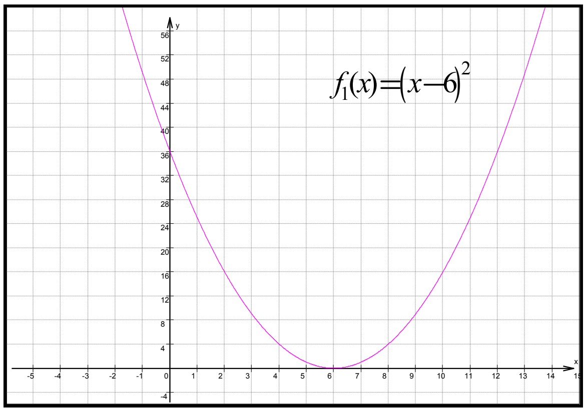

Bild 2

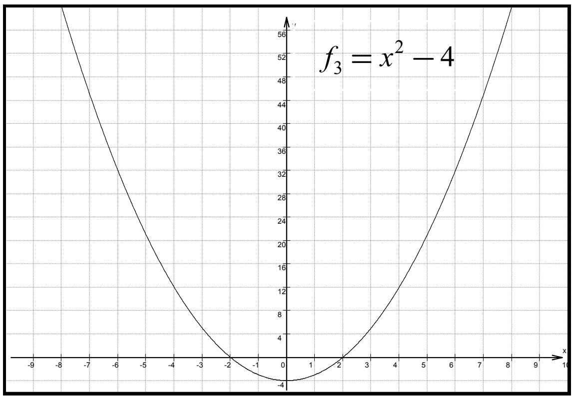

Bild 4

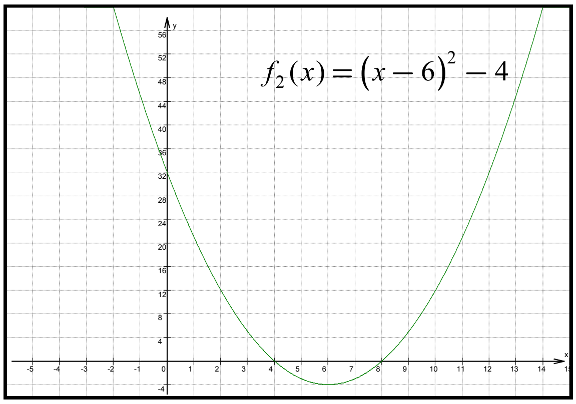

Bild 3

Erinnerung: Der Graph einer Funktion f ist wie folgt definiert: $G(f) = \{(x \mid f(x)) \mid x \in D(f)\}$

Bild 1

Der Graph (die Normalparabel) der Funktion $f(x) = x^2$ ist in Bild 1 abgebildet.

Er ist symmetrisch zur 2. Achse und besitzt eine doppelte Nullstelle für $x = 0$.

Dies kannst du wie folgt feststellen: x^2 ist für jede Zahl positiv und $x^2 = x \cdot x$. Nun ist aber ein Produkt null, wenn einer der (oder beide) Faktoren null ist (sind).

Bild 2

Verschieben wir diese Parabel um 6 Einheiten nach rechts, so ist jetzt diese verschobene Parabel symmetrisch zur Stelle $x = 6$. Damit befindet sich eine doppelte Nullstelle an der Stelle $x = 6$. Die Gleichung für die Nullstelle lautet $x - 6 = 0$. Die Funktionsgleichung folglich $f_1(x) = (x-6)^2$. Der Zusammenhang zur Funktion f ist somit $f_1(x) = f(x-6)$.

Bild 3

Eine weitere Verschiebung der Parabel um 4 Einheiten nach unten verändert die Symmetrieachse nicht. Sie befindet sich immer noch an der Stelle $x = 6$. Der Funktionswert an der Stelle $x = 6$ beträgt nun -4. Jetzt kann die Funktionsgleichung aufgestellt werden. Sie lautet: $f_2(x) = (x-6)^2 - 4$.

Bild 4

Die Parabel wird nun an die Stelle $x = 0$ zurückgeschoben. Symmetrieachse ist folglich wieder die 2. Achse. Der Funktionswert hat sich nicht verändert. Die Funktionsgleichung lautet: $f_3(x) = x^2 - 4$.

In allen 4 Bildern wir der tiefste Punkt der Parabel beschrieben. Daher bekommt dieser Punkt einen besonderen Namen. Er heißt **Scheitelpunkt** und setzt sich aus der **Scheitelstelle** und dem **Scheitelwert** zusammen.

	Scheitelpunkt	Scheitelstelle	Scheitelwert
Bild 1	$(0\|0)$	0	**0**
Bild 2	$(6\|0)$	6	**0**
Bild 3	$(6\|-4)$	**6**	-4
Bild 4	$(0\|-4)$	**0**	-4

Der Scheitelpunktterm lautet allgemein: $(x-d)^2+e$. Hierbei sind d die Scheitelstelle und e der Scheitelwert.
Die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform lautet damit allgemein: $f(x)=(x-d)^2+e$. Wegen $f(d)=e$ schreiben wir einfach $f(x)=(x-d)^2+f(d)$.

Bild 3 und 4 geben zu einer weiteren Frage Anlass.

Wie lauten die Schnittstellen mit der 1. Achse (Nullstellen)? Beachte, der Funktionswert ist an dieser Stelle null!

Starten wir mit Bild 4.
Der Funktionsterm $x^2-4=x^2-2^2$ kann mit der 3. binomischen Formel faktorisiert werden. Wir erhalten $x^2-2^2=(x-2)(x+2)$. Wir erinnern uns: Ein Produkt ist dann null, wenn einer der Faktoren null ist. Die Nullstellen lauten folglich $x=2$ und $x=-2$. Sie liegen wie erwartet symmetrisch zur 2. Achse.

Wie wir sehen, spielen diese Nullstellen eine weitere wichtige Rolle. Der Term erhält daher auch einen eigenen Namen. Er heißt **Nullstellenterm** der Funktion. Die allgemeine Form ist $(x-r)(x-s)$, wenn r und s die Nullstellen sind.

Wie aber lautet der Nullstellenterm der Funktion aus Bild 3?

Auch diese Frage ist leicht zu beantworten. Starten wir mit dem Funktionsterm $(x-6)^2-4$. Setzen wir für einen Augenblick $t=x-6$. Dann wissen wir schon nach der 3. binomischen Formel $t^2-2^2=(t-2)(t+2)$. Nun war aber $t=x-6$. Folglich erhalten wir

$$\begin{aligned}(x-6)^2-2^2&=((x-6)-2)((x-6)+2)\\&=(x-8)(x-4)\end{aligned}$$

Dies muss auch so sein, denn die Nullstellen liegen symmetrisch zur Stelle $x=6$.

Aus dem Scheitelpunktterm erhalten wir leicht den Nullstellenterm

$$\begin{aligned}(x-d)^2+f(d)&=(x-d)^2-(-f(d))\\&=(x-d)-(\sqrt{-f(d)})^2\\&=(x-d-\sqrt{-f(d)})(x-d+\sqrt{-f(d)})\end{aligned}$$

Insbesondere muss $f(d)\leq 0$ sein.

Der Nullstellenterm existiert also nicht immer!

	Scheitelpunkt	Scheitelstelle	Scheitelwert	1. Nullstelle	2. Nullstelle
Bild 1	$(0\|0)$	0	0	0	0
Bild 2	$(6\|0)$	6	0	6	6
Bild 3	$(6\|-4)$	6	-4	4	8
Bild 4	$(0\|-4)$	0	-4	-2	2

Als letztes multiplizieren wir den Nullstellenterm zu Bild 3 aus. Wir erhalten

$$\begin{aligned}(x-8)(x-4) &= x^2 - 8x - 4x + 32 \\ &= x^2 - 12x + 32.\end{aligned}$$

Dieser Term heißt normierter Normalterm. Kann aus dem Normalterm der Scheitelpunkt- und Nullstellenterm gewonnen werden?

Beginnen wir mit dem Scheitelpunktterm $(x-d)^2 + f(d)$.

Wir multiplizieren aus und erhalten $(x-d)^2 + f(d) = x^2 - 2dx + d^2 + f(d)$. Wir setzen die Terme gleich.

$$x^2 - 12x + 32 = x^2 - 2dx + d^2 + f(d)$$

Der Vergleich beider Seiten liefert $2d = 12 \Leftrightarrow d = 6$ und $d^2 + f(d) = 32$, also $36 + f(6) = 32 \Leftrightarrow f(6) = -4$.

Ergebnis: $d = 6$ und $f(6) = 4$.

Dieses Ergebnis erhalten wir sofort mit der 2. binomischen Formel, denn

$$\begin{aligned}x^2 - 12x + 32 &= (x^2 - 2 \cdot 6x + 36) - 36 + 32 \\ &= (x-6)^2 - 4.\end{aligned}$$

Diese Vorgehensweise heißt in der Literatur **quadratische Ergänzung**.

Aufgabe:

Bestimme zum normierten Normalformenterm $x^2 - 10x + 9$ den Scheitelpunktterm und den Nullstellenterm.

Lösung:

Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung finden wir

$$\begin{aligned}x^2 - 10x + 9 &= (x^2 - 10x + 25) - 25 + 9 \\ &= (x-5)^2 - 16\end{aligned}$$

Der Scheitelpunktterm lautet $(x-5)^2 - 16$, der Scheitelpunkt $S(5\,|-16)$.

Hieraus erhalten wir mit der dritten binomischen Formel den Nullstellenterm $(x-5)^2 - 4^2 = (x-5+4)(x-5-4)$, also $(x-1)(x-9)$.

Die Nullstellen (Schnitt der Parabel mit der ersten Achse) lauteten folglich $x_1 = 1$ und $x_2 = 9$.