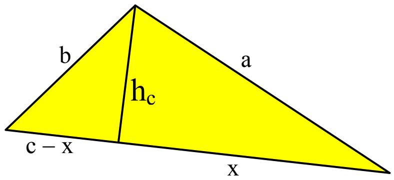
Berechnungen im Dreieck mit Hilfe der Seitenlängen

1. Der Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks

Wir wollen folgende Formel beweisen: $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, wobei s der halbe Umfang des Dreiecks ist.



Die Höhe h_c steht senkrecht auf der Strecke c. Folglich kann Pythagoras angewendet werden. Folglich haben wir:

I. $h_c^2+x^2=a^2$ und

II. $h_c^2+(c-x)^2=b^2 \Leftrightarrow h_c^2+c^2-2cx+x^2=b^2$.

Hieraus gewinnen wir mit I. – II. die Gleichung

$-c^2+2cx=a^2-b^2 \Leftrightarrow 2cx=a^2-b^2+c^2$.

Der Flächeninhalt des Dreiecks ist bekanntlich $A=\frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c$. In dieser Formel ist jetzt h_c durch die Gleichung I. zu ersetzen. Damit wir nicht mit Wurzeln rechnen müssen quadrieren wir die Gleichung für den Flächeninhalt und erhalten

$$A^2=\frac{1}{4}\cdot c^2\cdot h_c^2.$$

Mit Gleichung I. ersetzen wir h_c^2.

$$\begin{aligned}A^2&=\frac{1}{4}\cdot c^2\cdot(a^2-x^2)\\&=\frac{1}{4}(c^2a^2-c^2x^2)\\&=\frac{1}{4}[(ca)^2-(cx)^2]\ \text{Binomische Formel}\\&=\frac{1}{4}(ca-cx)(ca+cx)\end{aligned}$$

cx ist aber bekannt. Dies liefert:

$$\begin{aligned}A^2&=\frac{1}{4}(ca-\frac{a^2-b^2+c^2}{2})(ca+\frac{a^2-b^2+c^2}{2})\\&=\frac{1}{4}\cdot\frac{2ca-a^2+b^2-c^2}{2}\cdot\frac{2ca+a^2-b^2+c^2}{2}\\&=\frac{1}{16}[b^2-(a^2-2ac+c^2)][(a^2+2ac+c^2)-b^2]\ \text{Binomische Formel}\\&=\frac{1}{16}[b^2-(a-c)^2][(a+c)^2-b^2]\,(\therefore)\ \text{Binomische Formel}\\&=\frac{1}{16}[(b-(a-c))(b+(a-c)][((a+c)-b)((a+c)+b)]\ \text{Überflüssige Kammern beseitigen}\\&=\frac{1}{16}(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+c+b)\ \text{Reihenfolge}\\&=\frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)\ \text{Wurzel ziehen}\end{aligned}$$

Diese Formel zur Flächenberechnung ist schon interessant.

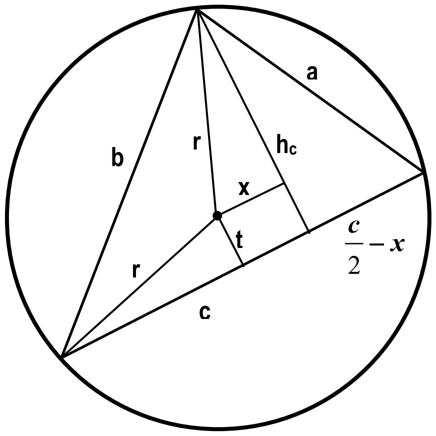
$$\boxed{A=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}$$

Setzt man noch $2s=a+b+c$, so erhalten wir schließlich $A=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2s(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a)}$. Klammern wir die 2en aus den Klammern aus und fassen sie zusammen zu 16, so haben wir endlich die gesuchte Formel

$$\boxed{A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

2. Der Radius des Umkreises

Wir beweisen die Formel $r = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}$.



Nach Pythagoras erhalten wir vier Gleichungen

I: $h_c^2 + (\frac{c}{2} + x)^2 = b^2 \;\Leftrightarrow\; h_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + cx + x^2 = b^2$

II: $h_c^2 + (\frac{c}{2} - x)^2 = a^2 \;\Leftrightarrow\; h_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - cx + x^2 = a^2$

III: $(h_c - t)^2 + x^2 = r^2 \;\Leftrightarrow\; h_c^2 - 2 \cdot h_c \cdot t + t^2 + x^2 = r^2$

IV: $t^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = r^2$

Nun folgt:

I₁ – II₂: $\boxed{2 \cdot c \cdot x = b^2 - a^2}$.

Hieraus erhalten wir x.

Genauso ist: III. – I.: $-2 \cdot h_c \cdot t + t^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 - cx = r^2 - b^2$. Ersetzen wir t^2 mit IV., so bekommen wir

$$-2 \cdot h_c \cdot t + r^2 - 2 \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 - cx = r^2 - b^2 \Leftrightarrow -2 \cdot h_c \cdot t - 2 \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 - cx = -b^2 .$$

Multiplizieren wir die Gleichung mit 2 und ersetzen $2 \cdot c \cdot x$, so erreichen wir $-4 \cdot h_c \cdot t - c^2 - b^2 + a^2 = -2 \cdot b^2$ bzw.

$\boxed{-4 \cdot h_c \cdot t = c^2 - b^2 - a^2}$. Jetzt folgt: $\boxed{t = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4h_c} = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{8A}}$, wobei $A = \frac{1}{2} c h_c$ ist.

Das so gefundene t setzen wir in IV. ein.

$$[\frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{8A}]^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = r^2 \;|\text{ausquadrieren}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2(a^2 + b^2 - c^2)^2}{64A^2} + \frac{c^2}{4} = r^2 \;\left|\frac{c^2}{4}\right.\text{ausklammern}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{4}[\frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{16A^2} + 1] = r^2 \;|\text{Hauptnenner}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{4}\frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2 + 16A^2}{16A^2} = r^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{64A^2}[(a^2 + b^2 - c^2)^2 + 16A^2] = r^2$$

Damit haben wir ein erstes Ergebnis, wenn wir A aus 1. verwenden.

$$r = \frac{c}{8A}\sqrt{[(a^2 + b^2 - c^2)^2 + 16A^2]}$$

Aus 1. entnehmen wir die Gleichung ($\therefore$)

$$16A^2 = [b^2 - (a-c)^2][(a+c)^2 - b^2] = -[(a-c)^2 - b^2][(a+c)^2 - b^2] .$$

Dann folgt: $r = \frac{c}{8A}\sqrt{\{(a^2 + b^2 - c^2)^2 - [(a-c)^2 - b^2][(a+c)^2 - b^2]\}}$, so dass nur noch der Radikand zu berechnen ist.

Wir erhalten

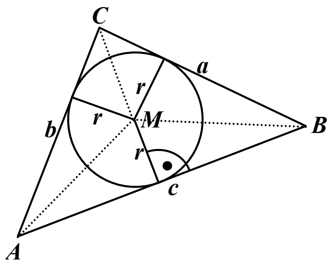
$$
\begin{aligned}
&(a^2+b^2-c^2)^2-[(a-c)^2-b^2][(a+c)^2-b^2] \\
&= a^4+2a^2b^2-2a^2c^2+b^4-2b^2c^2+c^4-(a-c)^2(a+c)^2+(a-c)^2b^2+(a+c)^2b^2-b^4 \\
&= a^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2+c^4-(a^2-c^2)^2+[(a-c)^2+(a+c)^2]b^2 \\
&= a^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2+c^4-a^4+2a^2c^2-c^4+2[a^2+c^2]b^2 \\
&= 2a^2b^2-2b^2c^2+2[a^2+c^2]b^2 \\
&= 4a^2b^2
\end{aligned}
$$

Jetzt haben wir die gesuchte Formel gefunden: $r=\frac{abc}{4A}$. Folglich ist

$$r=\frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}$$

3. Der Radius des Inkreises

Wir beweisen die Formel: $r=\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{2(a+b+c)}$



Die Seiten des Dreiecks tangieren den Inkreis. Folglich stehen die Radien in den Tangentenpunkten senkrecht auf den Seiten, sind also Höhen in den Dreiecken $\Delta(ABM), \Delta(BCM)$ und $\Delta(CAM)$.

Die Flächeninhalte berechnen sich wie folgt:

$$A_1=\frac{1}{2}rc,\ A_2=\frac{1}{2}rb \text{ und } A_3=\frac{1}{2}ra .$$

Andererseits ist der gesamte Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta(ABC)$ durch $A=A_1+A_2+A_3$ gegeben. Daraus folgt mit $A=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$:

$$\frac{1}{4}\cdot\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}=\frac{1}{2}r(a+b+c) .$$

Nach r aufgelöst $r=\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{2(a+b+c)}$. **Das war zu zeigen.**