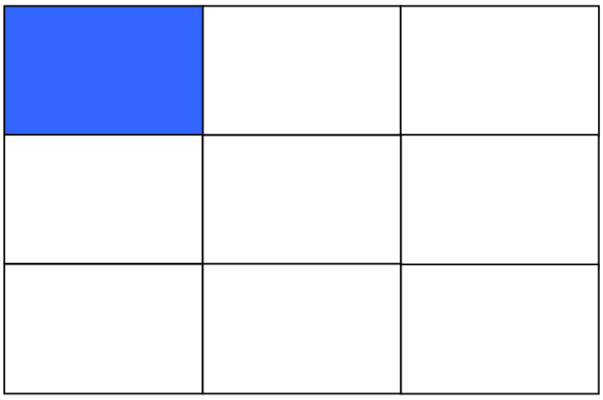
Absolute und Relative Anteile eines Ganzen

Wird ein **Ganzes** in **gleich große Stücke** zerlegt und von diesen gleich großen Stücken einige ausgewählt, so sprechen wir vom **absoluten Anteil des Ganzen**.

Stellen wir uns ein Blech mit Pizza vor. Wer keine Pizza mag, stelle sich ein Blech mit leckerem Kuchen vor. Für eine gerechte Teilung, wird es in gleich große Stücke zerschnitten. Insgesamt liegen 9 gleich große Stücke vor dir. Eines davon legst du auf deinen Teller. Du hast also **1 von 9** gewählt.

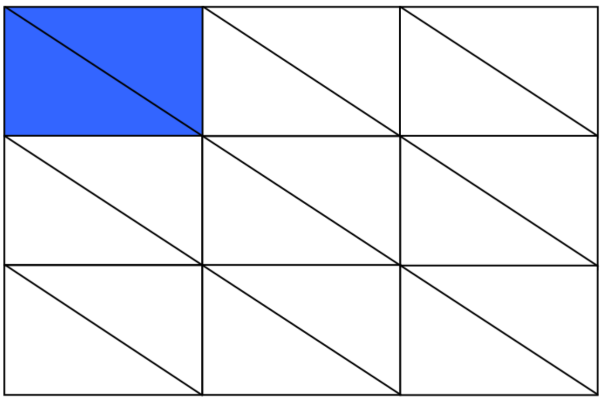


Dafür schreiben wir: **1 von 9** $=\frac{1}{9}$.

Dieses neue Symbol $\frac{1}{9}$ heißt **relativer Anteil**. Gesprochen: **ein Neuntel**.

Dein relativer Anteil beträgt nun $\frac{1}{9}$ der ganzen Pizza.

Die anderen Familienmitglieder wollen kleinere Stücke der Pizza essen. Sie unterteilen daher jedes der Pizzastücke weiter in je zwei neue gleich große Stücke. Teilst du dein Stück auch in zwei gleich große Stücke, so hast du immer noch gleich viel auf deinem Teller liegen. Das sind nun **2 von 18**.

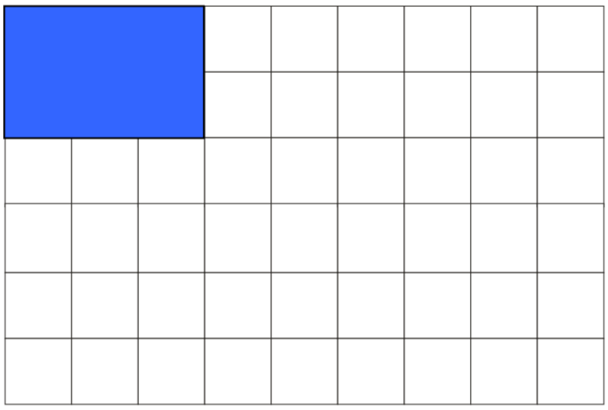


Dein relativer Anteil beträgt nun $\frac{2}{18}$ der ganzen Pizza.

Wäre jedes Pizzastück (auch deines) in drei gleich große Stücke geschnitten worden, so hättest du **3 von 27** auf deinem Teller.

Dein relativer Anteil betrüge nun $\frac{3}{27}$ der ganzen Pizza.

Zerschneiden wir die Pizza in 54 gleich große Stücke, so hast du 6 gleich große Stücke auf deinem Teller.



Dein relativer Anteil beträgt nun $\frac{6}{54}$ der ganzen Pizza, obwohl du immer noch gleich viel isst.

Fassen wir das bisher Gesagte zusammen.

Der ***relative Anteil*** ist festgelegt durch den ***absoluten Anteil bezogen auf das Ganze***, ist also die rationale Zahl $\frac{\textbf{absoluter Anteil}}{\textbf{Ganze}}$.

In unserem Fall ist es die rationale Zahl $\frac{6}{54}$ oder „gekürzt“ $\frac{6}{54} \underset{3}{=} \frac{2}{18} \underset{2}{=} \frac{1}{9}$.

Die Aussage: „Der relative Anteil beträgt $\frac{8}{15}$!“ ***ist folglich sinnlos,*** da der ***Bezug des Ganzen fehlt***.

Unser Beispiel ist sehr einsichtig, da du immer dieselbe Pizza betrachtest. Werden wir genauer!

Jetzt nehmen wir an, dass die gesamte Pizza $2700\,\mathrm{g}$ wiegt.

Da sich dein Anteil auf deinem Teller nicht ändert, egal in wie viel gleich große Stücke du die Pizza zerschneidest, hast du immer $300\,\mathrm{g}$ auf deinem Teller liegen. Dies kannst du leicht bestätigen, indem du das Gewicht eines jeden Stückes ausrechnest.

Im ersten Fall wiegt jedes Stück $2700\,\mathrm{g} : 9 = 300\,\mathrm{g}$, im zweiten $2700\,\mathrm{g} : 18 = 150\,\mathrm{g}$ und im dritten $2700\,\mathrm{g} : 54 = 50\,\mathrm{g}$.

Für den absoluten Anteil schreiben wir

$$\frac{1}{9} \textbf{ von } 2700\,\mathrm{g} = 300\,\mathrm{g}$$
$$\frac{1}{18} \textbf{ von } 2700\,\mathrm{g} = 150\,\mathrm{g}$$
$$\frac{1}{54} \textbf{ von } 2700\,\mathrm{g} = 50\,\mathrm{g}$$

Für deinen Pizza-Anteil legen wir fest: $\frac{6}{54} \textbf{ von } 2700\,\mathrm{g} = 2700\,\mathrm{g} \cdot \frac{6}{54}$. Rechnen kannst du nun:

$2700\,\mathrm{g}\cdot\frac{6}{54}=(2700\,\mathrm{g}:54)\cdot 6$ oder $2700\,\mathrm{g}\cdot\frac{6}{54}=(2700\,\mathrm{g}\cdot 6):54$, da $(2700\,\mathrm{g}:54)\cdot 6=(2700\,\mathrm{g}\cdot 6):54$.

Den relativen Anteil erhältst du nun auch über das Gewicht: $300\,\mathrm{g}$ von $2700\,\mathrm{g}=\frac{300\,\mathrm{g}}{2700\,\mathrm{g}}\underset{100\,\mathrm{g}}{=}\frac{3}{27}\underset{3}{=}\frac{1}{9}$.

Achte aber darauf, dass du die Einheiten mitschreibst und sie erst weglassen kannst, wenn sie übereinstimmen.

Wozu brauchen wir denn die relativen Anteile, wenn wir doch auch absolute Anteile vergleichen können?

Dazu gehen wir von einem anderen Beispiel aus.

Zwei Klassen eines Jahrgangs sollen verglichen werden. In der ersten Klasse sind insgesamt 28, in der zweiten insgesamt 30 Kinder.

12 Kinder von 28 Kinder *der ersten Klasse nehmen Obst mit in die Schule. In der zweiten Klasse sind es* 14 Kinder von 30 Kinder*.*
In welcher Klasse wird pro Kind mehr Obst gegessen?

Hier ***muss*** verglichen werden. *K* bezeichnet Kinder.

$12\text{ K von }28\text{ K}=\frac{12\text{K}}{28\text{K}}=\frac{12}{28}\underset{4}{=}\frac{3}{7}$ und $14\text{ K von }30\text{ K}=\frac{14}{30}\underset{2}{=}\frac{7}{15}$. Nun ist aber $\frac{3}{7}\overset{15}{=}\frac{45}{105}$ und $\frac{7}{15}\overset{7}{=}\frac{49}{105}$.

Da 45 von 105 kleiner als 47 von 105 ist und 12 von $28=45$ von 105 sowie 14 von $30=47$ von 105, kannst du jetzt vergleichen.

In der zweiten Klasse essen mehr Kinder Obst, denn $\frac{45}{105}=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}<\frac{14}{30}=\frac{7}{15}=\frac{47}{105}$.

Wenn du später einen Taschenrechner hast, kannst du schneller entscheiden: $12\cdot 30<14\cdot 28$. ***Gib eine Begründung hierfür an!***

Ich möchte dich noch auf eine weitere Besonderheit aufmerksam machen.

Was bedeutet die Angabe $\frac{3}{4}\ell$?

Das ℓ steht als Abkürzung für Liter. $\frac{3}{4}\ell$ bedeutet also nichts anderes als $\frac{3}{4}$ **von** 1ℓ!

Was ist eine rationale Transformation?

Unter einer rationalen Transformation verstehen wir die Berechnung des relativen Anteils aus dem Ganzen oder umgekehrt.

Aufgabe: Wie groß ist der absolute Anteil des Flächeninhaltes von $54\,\mathrm{cm}^2$, wenn der relative Anteil $\frac{7}{9}$ gegeben ist?

In dem von uns betrachteten Fall ist $\frac{7}{9}$ **von** $54\,\mathrm{cm}^2$ zu berechnen. Der absolute Anteil wird durch die rationale Transformation ausgerechnet. Er ist folglich $54\,\mathrm{cm}^2\cdot\frac{7}{9}=42\,\mathrm{cm}^2$.

Aufgabe: Wie groß ist das Ganze (der gesamte Flächeninhalt), wenn die rationale Zahl des Ganzen $\frac{7}{9}$ und der absolute Anteil $42\,\mathrm{cm}^2$ beträgt?

Die ***inverse rationale Transformation*** löst dieses Problem.

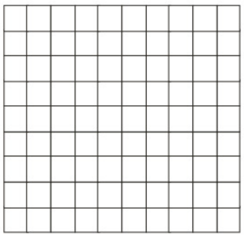
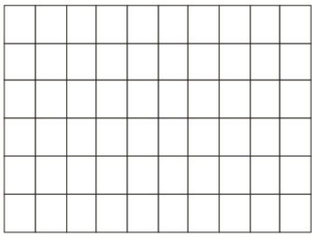
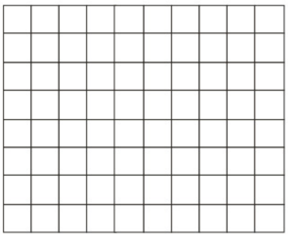
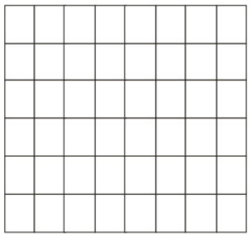
$$42\,\mathrm{cm}^2 \cdot \frac{9}{7} = 54\,\mathrm{cm}^2$$

Der gesamte Flächeninhalt (das Ganze) beträgt $54\,\mathrm{cm}^2$.

Merke: Ist der ***Zähler größer als der Nenner***, so wird ***aus relativen Anteilen*** stets ***das Ganze*** berechnet.

Löse noch folgende Aufgaben!

$\frac{13}{15}$ von ____ = _____ $\frac{11}{15}$ von ____ = _____ $\frac{18}{20}$ von ____ = _____ $\frac{10}{12}$ von ____ = _____

Eine letzte Besonderheit.

Was bedeutet $\frac{5}{8}\,\mathrm{g}$ **von** $100\,\mathrm{g}$?

Die Antwort ist recht einfach. Schau!

$$\begin{aligned}\frac{5}{8}\,\mathrm{g}\ \textbf{von}\ 100\,\mathrm{g} &= \left(\frac{5}{8}\ \textbf{von}\ 1\,\mathrm{g}\right)\ \textbf{von}\ 100\,\mathrm{g}\\ &= \frac{5}{8}\ \textbf{von}\ \left(1\,\mathrm{g}\ \textbf{von}\ 100\,\mathrm{g}\right)\\ &= \frac{5}{8}\ \textbf{von}\ \frac{1\mathrm{g}}{100\mathrm{g}}\\ &= \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{100}\\ &= \frac{5}{800}\end{aligned}$$

Du erhältst dieses Ergebnis auch durch folgende Rechnung. ***Beachte:*** $\frac{5}{8}\,\mathrm{g}$ ***ist ein absoluter Anteil!***

$$\begin{aligned}\frac{5}{8}\,\mathrm{g}\ \textbf{von}\ 100\,\mathrm{g} &= \frac{\frac{5}{8}\,\mathrm{g}}{100\,\mathrm{g}}\\ &= \frac{5}{8}:100\\ &= \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{100}\\ &= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{20}\\ &= \frac{1}{160}\end{aligned}$$

Kommen wir zurück zur Pizza.

Auf deinem Teller liegt noch $\frac{1}{9}$ der ganzen Pizza. Da kommt dein kleiner Bruder (Schwester, Vater oder Mutter), teilt dein Stück in 4 gleich große Teile und sagt: ,,Lass mal probieren!“ und nimmt sich 3 der Stücke auf einen anderen Teller. Er (Sie) hat dir also $\frac{3}{4}$ deines Stückes genommen.

Welchen absoluten Anteil hat er (sie) jedoch an der ganzen Pizza genommen?

Teilen wir daher alle gleich großen Stücke der Pizza in 4 weitere gleich große Stücke. Auf dem Blech sind dann noch $8 \cdot 4 = 32$ Stücke. Ingesamt sind es folglich $32 + 4 = 36$ Stücke. Demzufolge hat er (sie) $3 \textbf{ von } 36 = \frac{3}{36}$ Stücke **von** der ganzen Pizza von deinem Teller genommen.

Es muss daher einen Zusammenhang zwischen $\frac{3}{4} \textbf{ von } \frac{1}{9} \textbf{ von}$ der ganzen Pizza und $\frac{3}{36}$ **von** der ganzen Pizza geben. „Klar!“ sagst du: $\frac{3}{4} \textbf{ von } \frac{1}{9} = \frac{3}{36}$.

Es muss also gelten:

$$\frac{3}{4} \textbf{ von } \frac{1}{9} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 9} = \frac{3}{36}$$

Damit hast du noch einmal das Produkt (die Multiplikation) von rationalen Zahlen bestätigt.

Merke: In einer ***„Von Aufgabe“*** wird ein ***relativer Anteil immer*** als ***Faktor*** betrachtet.

Halten wir zum Schluss noch einmal den Zusammenhang zwischen dem Ganzen, dem absoluten und dem relativen Anteil fest. Dies können wir in Formeln festhalten.

Dazu bezeichnen wir mit $\frac{p}{q}$ den relativen Anteil, mit G das Ganze und mit A den absoluten Anteil, also $\frac{p}{q} \textbf{ von } G = A$, so gilt

$$\frac{p}{q} = \frac{A}{G} \qquad \text{und} \qquad \frac{p}{q} \cdot G = A \qquad \text{sowie} \qquad \frac{q}{p} \cdot A = G .$$

Achtung! $\frac{3}{36}\mathrm{m}$ ist ein ***absoluter Anteil!*** Dies teilt dir die ***Einheit*** mit, $\frac{3}{36}\mathrm{m} = \frac{3}{36} \textbf{ von } 1\mathrm{m}$.