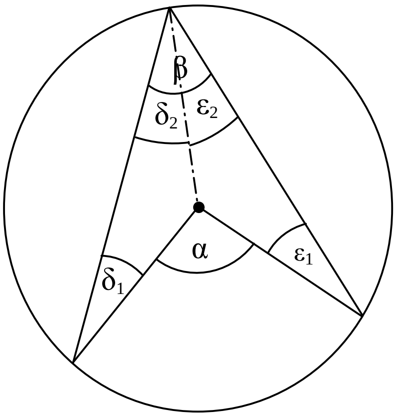
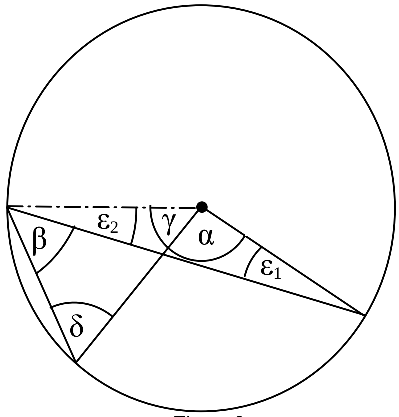
Mittelpunkt- und Peripheriewinkel (Der Satz von Thales)

Gegeben ist ein Kreis mit Mittelpunkt M. Ferner sind drei Punkte auf dem Kreis. Die drei Punkte bilden mit dem Mittelpunkt ein Viereck.



Figur 1



Figur 2

> Es gilt die Behauptung $\alpha = 2 \cdot \beta$.
>
> Der Mittelpunktwinkel ist doppelt so groß wie der Peripheriewinkel.

Wir beweisen die Aussage für die Figur 1.

Dazu entnehmen wir der Figur folgende Aussagen:

I. $\delta_2 + \varepsilon_2 = \beta$

II. $\delta_1 = \delta_2 \quad \wedge \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (Die beiden Dreiecke sind gleichschenklig.)

III. $\delta_1 + (360^\circ - \alpha) + \varepsilon_1 + \beta = 360^\circ$ (Die Innenwinkelsumme im Viereck beträgt 360°.)

IV. $\delta_2 + 360^\circ - \alpha + \varepsilon_2 + \beta = 360^\circ$ (II. in III. eingesetzt)

V. $360^\circ - \alpha + \beta + \beta = 360^\circ \;\Big|\; -360^\circ$ (I. in IV. eingesetzt)

$$-\alpha + 2 \cdot \beta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 2 \cdot \beta$$

Wir beweisen die Aussage für die Figur 2.

Dazu entnehmen wir der Figur folgende Aussagen:

I. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad \wedge \quad \delta = \varepsilon_2 + \beta$ (Die Dreiecke sind gleichschenklig.)

II. $\delta + \beta + \varepsilon_2 + \gamma = 180^\circ \wedge \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \gamma + \alpha = 180^\circ$ (Innenwinkelsumme im Dreieck)

III. $\varepsilon_2 + \beta + \beta + \varepsilon_2 + \gamma = 180^\circ \wedge \varepsilon_2 + \varepsilon_2 + \gamma + \alpha = 180^\circ$ (I. in II. eingesetzt.)

$\alpha - 2 \cdot \beta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 2 \cdot \beta$ (2. Gleichung in III. minus 1. Gleichung in III.)

Damit sind beide Fälle bewiesen.

Ein Spezialfall ist $\alpha = 180^\circ$ (gestreckter Winkel). In diesem Fall ist $\beta = 90^\circ$.

Satz von Thales: Jeder Peripheriewinkel über dem Halbkreis beträgt 90°.

Bemerkung: Ein Mittelpunktwinkel heißt auch Zentriwinkel.

Dr. rer. nat. habil. Gert Hillebrandt