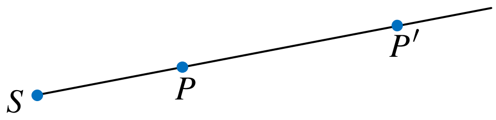
Zentrische Streckung

Eine zentrische Streckung mit Streckungsfaktor $k > 0$ und Streckungszentrum S ist eine Abbildung, die jeden Punkt P auf einen Punkt P' wie folgt abbildet:

1. $S = S'$, S ist Fixpunkt

2. P' liegt auf dem Strahl $\overset{\mapsto}{SP}$

3. $\left|\overline{SP'}\right| = k \cdot \left|\overline{SP}\right|$



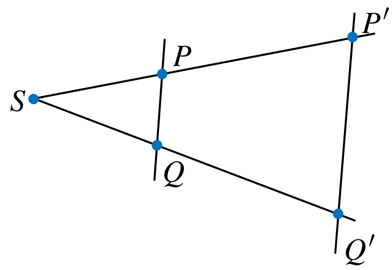
Die Abbildung ist durch eine der Angaben eindeutig bestimmt.

a) S, $P \neq S$ und k, b) S, $P' \neq S$ und k c) P, $P' \neq P$ und k, d) $S \neq P \neq P' \neq S$

Aufgabe

1. Begründe: Sind $P \neq P'$ und $Q \neq Q'$ Bildpunkte einer zentrischen Streckung auf verschiedenen Strahlen, so gilt $PQ \| P'Q'$.

2. Ist $\overline{P'Q'}$ das Bild der Strecke $\overline{PQ}$ unter einer zentrischen Streckung mit Streckungsfaktor k, so gilt $\left|\overline{P'Q'}\right| = k \cdot \left|\overline{PQ}\right|$.



Bemerkung

Bei einer zentrischen Streckung mit Streckungsfaktor $k = 1$ ist jeder Punkt ein Fixpunkt.

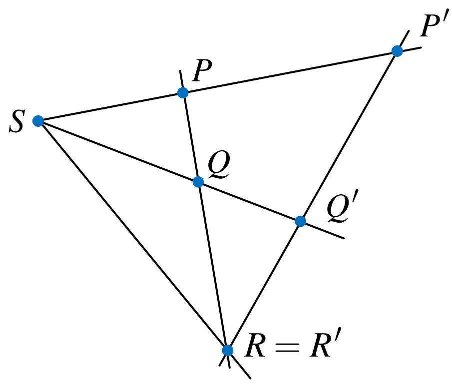
Wir beweisen einen einfacheren Satz.

Satz 1

Ist das Bild der Geraden PQ unter einer zentrischen Streckung mit Streckungsfaktor $k \neq 1$ eine Gerade $P'Q'$, so gilt

a) $PQ \| P'Q'$,

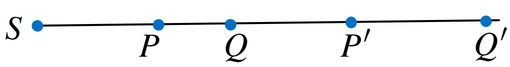
b) $\left|\overline{P'Q'}\right| = k \cdot \left|\overline{PQ}\right|$.



Beweis

Ad a) Angenommen, die Geraden PQ und $P'Q'$ sind nicht parallel. Dann haben sie einen Schnittpunkt R. Da dieser auf beiden Geraden liegt, ist er auch gleichzeitig Bildpunkt R'. Folglich ist $R = R'$ ein Fixpunkt, also $k = 1$. Widerspruch!

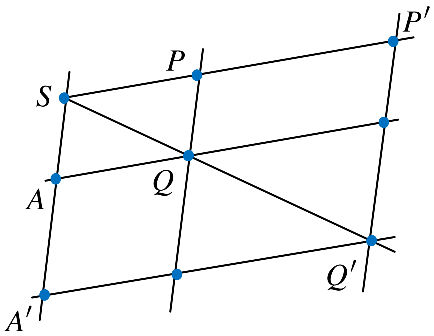
Ad b) ***1. Fall:*** P und Q liegen auf einem Strahl von S.



Aus $\left|\overline{PQ}\right| = \left|\overline{SQ}\right| - \left|\overline{SP}\right|$ und $\left|\overline{P'Q'}\right| = \left|\overline{SQ'}\right| - \left|\overline{SP'}\right|$ sowie $\left|\overline{SP'}\right| = k \cdot \left|\overline{SP}\right|$ und $\left|\overline{SQ'}\right| = k \cdot \left|\overline{SQ}\right|$

folgt $\left|\overline{P'Q'}\right| = \left|\overline{SQ'}\right| - \left|\overline{SP'}\right| = k \cdot \left|\overline{SQ}\right| - k \cdot \left|\overline{SP}\right| = k \cdot \left(\left|\overline{SQ}\right| - \left|\overline{SP}\right|\right) = k \cdot \left|\overline{PQ}\right|$.

2. Fall: Die Gerade PQ verläuft nicht durch S.



Wir zeichnen die Parallelen $SA \| PQ \| P'Q'$ und $SP \| AQ \| A'Q'$.

Da $AQ \| A'Q'$ folgt mit a) auch $\left|\overline{SA'}\right| = k \cdot \left|\overline{SA}\right|$. Aufgrund $\left|\overline{SA}\right| = \left|\overline{PQ}\right|$ und $\left|\overline{SA'}\right| = \left|\overline{P'Q'}\right|$ erhalten wir die Behauptung $\left|\overline{P'Q'}\right| = \left|\overline{SA'}\right| = k \cdot \left|\overline{SA}\right| = k \cdot \left|\overline{PQ}\right|$.

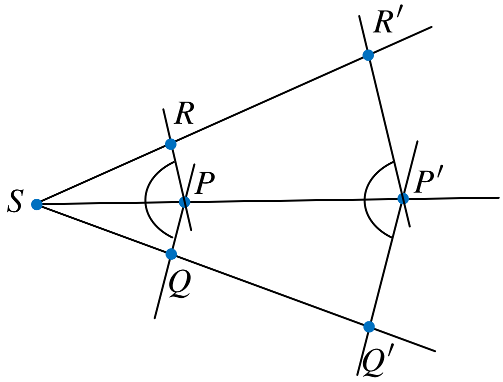
Satz 2

Unter einer zentrischen Streckung bleiben

a) Streckenverhältnisse (k) und

b) Winkelgrößen

erhalten.



Folgerung 3

Es sei S das Zentrum einer zentrischen Streckung mit Streckungsfaktor $k > 0$. Es sei $A'B'C'$ das Bilddreieck des Dreiecks ABC unter der zentrischen Streckung.

Dann sind die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ ähnlich.

Satz 4

Unter einer zentrischen Streckung mit Streckungsfaktor k ist der Flächeninhalt einer geometrischen Figur k^2-mal so groß wie der Flächeninhalt der Ausgangsfigur.

Satz 5

Unter einer zentrischen Streckung mit Streckungsfaktor k ist das Volumen einer geometrischen Figur k^3-mal so groß wie das Volumen der Ausgangsfigur.

Nachtrag

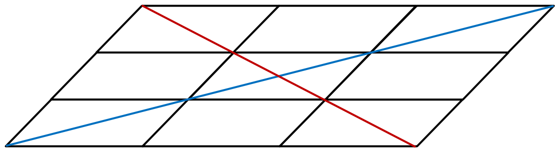
Werden in einem Dreieck zwei Seiten auf das k-fache Verlängert bzw. verkürzt, so auch die dritte Seite.

Dieser Nachtrag erscheint einem erst einmal sonderbar. Er ist aber absolut nicht trivial, da mit diesem Satz nun bewiesen werden kann, dass das Bild einer Geraden unter einer zentrischen Streckung wieder eine Gerade ist.

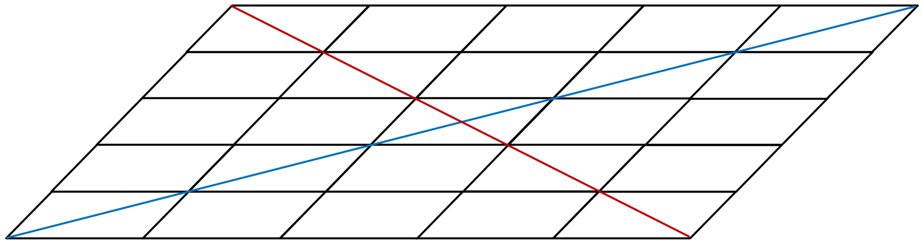
Da jedes Dreieck so zu drei Parallelogrammen vervollständigt werden kann, dass je eine Seite Diagonale des Parallelogramms ist, genügt es die Aussage für ein Parallelogramm und eine Diagonale zu beweisen. Für die zweite Diagonale gilt die Aussage entsprechend.

Dazu setzen wir k^2 Parallelogramm, $k \in \mathbb{N}$ neu zusammen.

Feststellung: Werden die Seitenlängen eines Parallelogramms auf das *k*-fache verlängert, so verlängert sich auch die Diagonale auf das *k*-fache. Hier $k = 3$.



Im nächsten Schritt unterteilen wir jede Seite eines Parallelogramms in gleich lange Längen. Hier 5. Jedes einzelne Parallelogramm hat nun $k = \frac{1}{5}$ der Seitenlänge des am Anfang gegebenen Parallelogramms. Insbesondere hat dies auch jede Diagonale.



Für jeden rationalen Streckfaktor, also $k \in \mathbb{Q}$, haben wir nun den Nachtrag bewiesen. Ein $k \in \mathbb{R}$ muss jetzt noch durch eine Folge $(k_1)_n, (k_2)_n \in \mathbb{Q}$ so eingeschachtelt werden, dass $(k_1)_n < k < (k_2)_n$ und $(k_2)_n - (k_1)_n$ gegen null geht, wenn *n* immer größer wird. Damit ist der Nachtrag endgültig bewiesen.

Haben wir den Satz des Pythagoras über die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks zur Verfügung, so kann der Nachtrag direkt bewiesen werden. Da der Satz des Pythagoras auch aus der zentrischen Streckung folgt, wäre ein anderer Beweis zu wählen. Z.B. die Zerlegung eines Quadrates. Dann kann mit der zentrischen Streckung der Höhen- und Kathetensatz bewiesen werden.

Theorem

Sind $P \neq P'$ und $Q \neq Q'$ Bildpunkte einer zentrischen Streckung auf verschiedenen Strahlen, so gilt $PQ \| P'Q'$.

Beweis

Zunächst ist zu zeigen, dass das Bild einer Geraden wieder eine Gerade ist. Dazu sei R der Punkt der Geraden PQ mit $SR \perp PQ$. Betrachten wir die rechtwinkligen Dreiecke SRP und SRQ. Unter dem Streckungsfaktor k werden die Dreiecke auf $SR'P'$ und $SR'Q'$ abgebildet (Pythagoras). Insbesondere liegt der Punkt R' auf der Geraden $P'Q' \| PQ$.