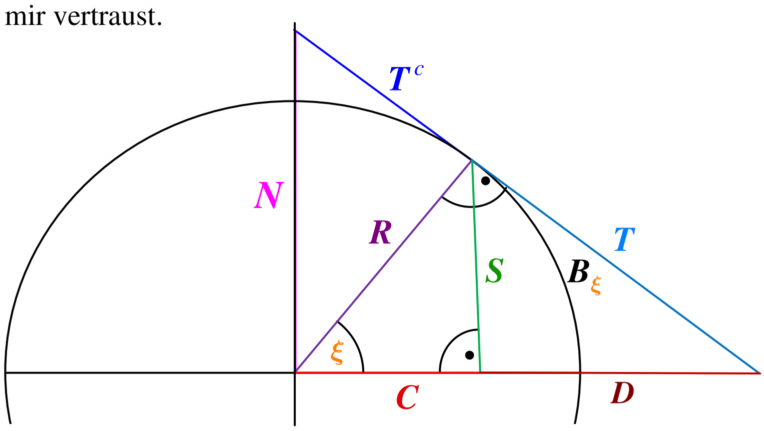
TRIGONOMETRISCHE[1] FUNKTIONEN

Bisher haben wir uns in einem Dreick mit den Seiten, den Höhen, den Sätzen des Euklid und Pythagoras, dem Bogenmaß über einer Dreieckseite, und das nur auf Spezialfälle beschränkt, auseinandersetzen müssen. Dabei sind jedoch direkte Zusammenhänge zwischen den Seiten und den Winkeln in einem Dreieck im Verborgenen geblieben. In einzelnen Fällen haben wir uns schon gewünscht, einfachere Möglichkeiten haben zu können, um schnell zu einem Ergebnis zu kommen. Diese Lücke schließen wir nun, indem wir uns zunächst auf rechtwinklige Dreiecke beschränken. Natürlich gehen wir den Weg, der uns einen größtmöglichen Überbick auf des Wesentliche erlaubt.

Betrachten wir einen Kreis. Du wirst gleich erkennen, warum dieses wichtig ist, wenn du noch ein wenig wartest und mir vertraust.



Du erkennst in diesem Kreis fünf rechtwinklige Dreiecke. Die Namen der Seiten sind mit großen Buchstaben benannt. Die Längen dieser Seiten bezeichnen wir mit kleinen Buchstaben. Insbesondere bezeichnet $\boldsymbol{B}(\xi)$ den Bogen über den Winkel $\xi = \frac{b(\xi)}{r}$ (*Xi*) im Bogenmaß. Damit ein rechtwinkliges Dreieck $\boldsymbol{RCS}$ vorliegt, sei zunächst $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$. Wir definieren: Das Verhältnis der Länge $\boldsymbol{s}$ der dem Winkel ξ gegenüberliegenden Kathete $\boldsymbol{S}$ zu der Länge $\boldsymbol{r}$ der Hypotenuse $\boldsymbol{R}$ heißt ***Sinus*** des Winkels ξ, in Zeichen

$$\sin(\xi) := \frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{r}}.$$

Entsprechend heißt das Verhältnis der Längen der Ankathete $\boldsymbol{C}$ zur Hypotenuse $\boldsymbol{R}$ der ***Cosinus*** des Winkels ξ, in Zeichen

$$\cos(\xi) := \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{r}}.$$

Wir halten fest: $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{r}\sin(\xi)$ und $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{r}\cos(\xi)$. In diesem rechtwinkligen Dreieck wenden wir den Satz des Pythagoras an und erhalten

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s}^2 + \boldsymbol{c}^2 = \boldsymbol{r}^2 &\Leftrightarrow (\boldsymbol{r}\sin(\xi))^2 + (\boldsymbol{r}\cos(\xi))^2 = \boldsymbol{r}^2 \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{r}^2\sin^2(\xi) + \boldsymbol{r}^2\cos^2(\xi) = \boldsymbol{r}^2 \\ &\Leftrightarrow \sin^2(\xi) + \cos^2(\xi) = 1. \end{aligned}$$

Wir werden bald sehen, dass diese Beziehung für alle Winkel $0 \le \xi \le 2\pi$ gilt.

Nun ist jedes rechtwinklige Dreieck ähnlich zum Dreieck $\boldsymbol{RCS}$ und du kannst die Hypotenuse immer als Radius eines Kreises ansehen.

[1] *Aus griech.*: **tri** ‚drei', **gonia** ‚Ecke' bzw. ‚Winkel' und **mètrein** ‚messen' ***oder*** **trigono** ‚Dreieck' und **mètron** ‚Maß'

Im obigen Bild können weitere Längenverhältnisse eines rechtwinkligen Dreiecks angeben. Das Längenverhältnis $\frac{t}{r}$ der Länge t der Gegenkathete T zur Länge r der Ankathete R heißt ***Tangens*** des Winkels ξ, in Zeichen

$$\tan(\xi) := \frac{t}{r}.$$

Mit anderen Worten: Die Länge des Tangentenabschnittes berechnet sich durch $t = r\tan(\xi)$.

Wie stehen nun die Längen t und t^c der Abschnitte T und T^c in Beziehung?

Dafür betrachten wir die Ähnlichkeit der Dreiecke $RT^cN \simeq TRCD$. Wir finden

$$\frac{r}{t} = \frac{t^c}{r}.$$

Das reziproke Längenverhältnis zu ***Tangens*** heißt ***Cotangens*** des Winkels ξ, in Zeichen

$$\cot(\xi) := \frac{t^c}{r}.$$

Insbesondere gilt

$$\cot(\xi) = \frac{1}{\tan(\xi)}.$$

Wir bestätigen für die Längen noch einmal die Äquivalenz zu dem Höhensatz des Euklid

$$r^2 = t \cdot t^c.$$

Aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke $RCS \simeq TRCD$ kann das Längenverhältnis Tangens durch Sinus und Cosinus ausgedrückt werden. Es gilt

$$\tan(\xi) = \frac{t}{r} = \frac{s}{c} = \frac{r\sin(\xi)}{r\cos(\xi)} = \frac{\sin(\xi)}{\cos(\xi)}.$$

Entsprechend ist

$$\cot(\xi) = \frac{\cos(\xi)}{\sin(\xi)}.$$

Der Vollständigkeit halber führen wir noch zwei Längenverhältnisse an.

Der Kehrwert des Cosinus heißt Sekans

$$\sec(\xi) := \frac{r}{c}$$

und der Kehrwert des Sinus heißt Cosekans

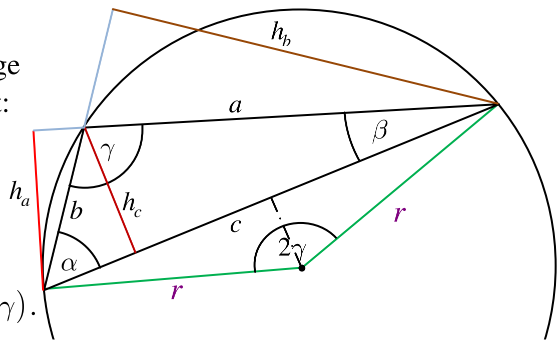
$$\csc(\xi) := \frac{r}{s}.$$

Kleine Übung

Zeige die Zusammenhänge $\sin^2(\xi) = \frac{1}{1+\cot^2(\xi)} = \frac{\tan^2(\xi)}{1+\tan^2(\xi)}$ und $\cos^2(\xi) = \frac{1}{1+\tan^2(\xi)} = \frac{\cot^2(\xi)}{1+\cot^2(\xi)}$.

Wir werden später diese Längenverhältnisse zu Funktionen erweitern, indem wir den Radius im Kreis vor- und zurückrotieren lassen.

Der Sinussatz für beliebige Dreiecke



Wir führen die Berechnung beliebiger Dreiecke auf rechtwinklige Dreiecke über ihre Höhen, in Rot und Braun gehalten, zurück. Es gilt:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\sin(\alpha)} = \frac{\boldsymbol{b}}{\sin(\beta)} = \frac{\boldsymbol{c}}{\sin(\gamma)} = 2r\,.$$

Beweisen Sie diese Aussage!

Hinweis: $\boldsymbol{b}\sin(\alpha) = \boldsymbol{a}\sin(\beta)$, $\sin(\gamma) = \sin(\pi-\gamma)$, $\boldsymbol{c}\sin(\alpha) = \boldsymbol{a}\sin(\gamma)$.

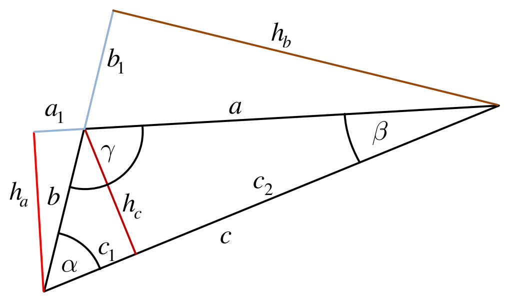
Beachte auch den Zentriwinkel.

Kleine Übung

Der Flächeninhalt eines Dreiecks mit Umkreisradius r_U, den Seitenlängen a, b und c ist $A = \frac{abc}{4r_U}$.

Dieser Satz liefert insbesondere den Umkreisradius bei gegebenen Flächeninhalt und Seitenlängen.

Der Kosinussatz



Der Kosinussatz erweitert den Satz des Pythagoras auf beliebige Dreiecke. Dazu werden die entsprechenden Höhen eingetragen, so dass rechtwinklige Dreiecke entstehen, aus denen die Höhen wieder eleminiert werden.

In diesem Dreieck mit den Seiten a, b, c unterteilen wir c in $c = c_1 + c_2$ und verlängern die Seiten a um a_1 sowie b um b_1.

Nach Pythagoras gilt:

$$b^2 = c_1^2 + h_c^2$$
$$a^2 = c_2^2 + h_c^2.$$

Durch Elemination von h_c^2 erhalten wir

$$a^2 - b^2 = c_2^2 - c_1^2 = (c_2 + c_1)(c_2 - c_1) = c(c_2 - c_1).$$

Mit

$$c_2 - c_1 = c - 2c_1 = 2c_2 - c$$

folgt

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cc_1$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2cc_2.$$

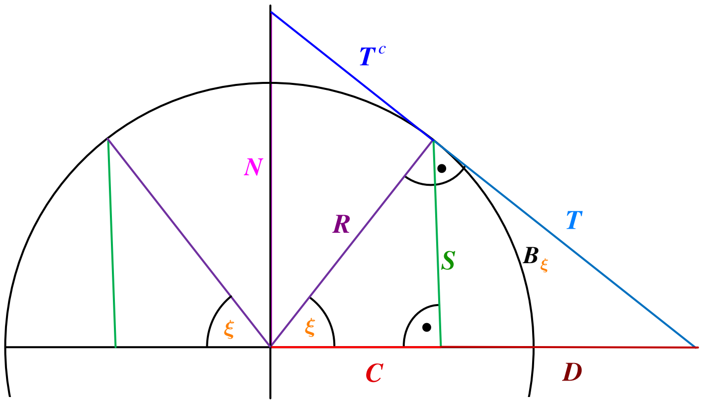
Da $c_1 = b\cos(\alpha)$ und $c_2 = a\cos(\beta)$, erhalten wir schließlich

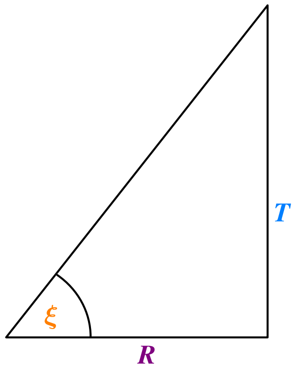
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos(\beta).$$

Für den letzten Winkel γ betrachten wir $b^2 = a_1^2 + h_a^2$ und $(a + a_1)^2 + h_a^2 = c^2$ und eleminieren wieder h_a^2. Dies liefert $a^2 + 2aa_1 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 + 2aa_1$ und mit $a_1 = b\cos(\pi - \gamma) = -b\cos(\gamma)$ schließlich die dritte Formel

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma).$$

Zusammenfassung





Tangentendreieck gedreht und gespiegelt

In einem rechtwinkligen Dreieck gelten folgende Zusammenhänge.

Höhensätze: $s^2 = cd$ und $r^2 = t \cdot t^c$

Kathetensätze: $r^2 = c(c+d)$ und $t^2 = d(c+d)$ sowie $(c+d)^2 = t(t+t^c)$ und $n^2 = t^c(t+t^c)$

Pythagoras: Ergeben sich aus den Höhen- und Kathetensätzen

Definition der sechs Winkelfunktionen für $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$, ξ im Bogenmaß

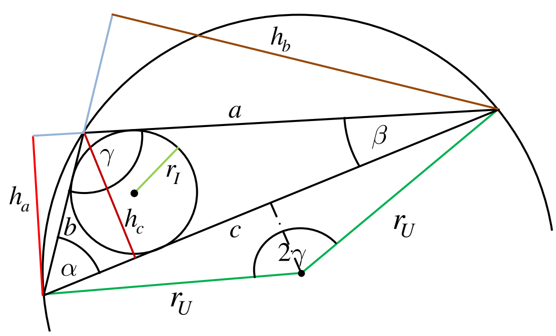
$$\sin(\xi) := \frac{s}{r}, \qquad \cos(\xi) := \frac{c}{r}, \qquad \tan(\xi) := \frac{t}{r}, \qquad \cot(\xi) := \frac{t^c}{r}, \qquad \sec(\xi) := \frac{r}{c}, \qquad \csc(\xi) := \frac{r}{s}$$

Ausdrücken der Winkelfunktionen durch andere

$$\sin^2(\xi) + \cos^2(\xi) = 1, \qquad \cot(\xi)\tan(\xi) = 1, \qquad \tan(\xi) = \frac{\sin(\xi)}{\cos(\xi)}, \qquad \cot(\xi) = \frac{\cos(\xi)}{\sin(\xi)}$$

$$\sin^2(\xi) = \frac{1}{1+\cot^2(\xi)} = \frac{\tan^2(\xi)}{1+\tan^2(\xi)} \qquad \textit{und} \qquad \cos^2(\xi) = \frac{1}{1+\tan^2(\xi)} = \frac{\cot^2(\xi)}{1+\cot^2(\xi)}$$

In einem beliebigen Dreieck gilt



der Sinussatz

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r_U$$

und der Kosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma).$$

sowie die Flächeninhalte des Dreiecks

$$A = \frac{abc}{4r_U} = r_I s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 2r_U^2 \sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma) = r_I r_U \left(\sin(\alpha)+\sin(\beta)+\sin(\gamma)\right),$$

wobei $2s = a+b+c$[2].

[2] http://www.dr-gert-hillebrandt.de/pdf/schule/Mathematik%20Schule/SEK1/berechnungen_im_dreieck_mit_hilfe_der_seitenlaengen.pdf

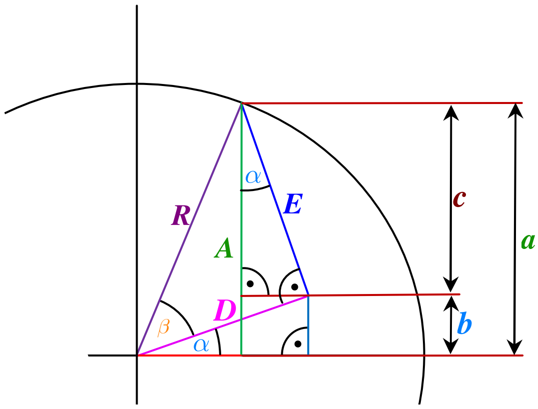
Die Additionstheoreme

Für eine sehr schöne mathematische Herleitung verweise ich auf den Artikel Komplexe Zahlen.

Hier wollen wir uns wieder geometrisch leiten lassen. Dazu führen wir die Aussage des 1. Additionstheorem auf ähnliche Dreiecke zurück. Bewiesen soll das folgende Theorem des Sinus.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \tag{1}$$

Schauen wir uns den Sachverhalt in einer Graphik an.



Folgende Beziehungen sind im Bild enthalten.

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}\sin(\alpha+\beta),\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}\sin\alpha,\ \boldsymbol{c}=\boldsymbol{e}\cos\alpha,\ \boldsymbol{e}=\boldsymbol{r}\sin\beta,\ \boldsymbol{d}=\boldsymbol{r}\cos\beta$$

Daraus erhalten wir

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{r}}=\frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{r}}=\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{r}}+\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{r}}=\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{d}}\cdot\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{r}}+\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{e}}\cdot\frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{r}}=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\,.$$

Dieses Theorem gilt auch für größere Winkel $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$. Er kann jedoch ohne weiteres geführt werden, indem die Periodizität der Winkelfunktionen ausgenutzt wird. Z. B. $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$, $\sin(\pi+\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, $\cos(\pi+\alpha)=\cos(\pi-\alpha)=-\cos(-\alpha)=-\cos\alpha$.

Hieraus folgt auch sofort

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \tag{2}$$

Benutzen wir nun noch den Zusammenhang $\cos\gamma=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)$, so finden wir

$$\cos(\alpha+\beta)=\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\sin\left(\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta-\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=$$

$$\cos\alpha\cos\beta-\sin(\pi-\alpha)\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Das dritte Additionstheorem ist nun gefunden und lautet

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,. \tag{3}$$

Entsprechend bekommen wir

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\,. \tag{4}$$

Damit sind die Additionstheoreme geometrisch bewiesen.