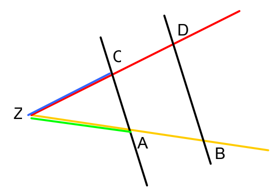
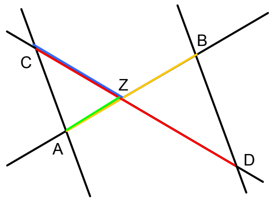
Strahlensätze

Erster Strahlensatz

Werden zwei Strahlen mit gemeinsamen Anfangspunkt von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf dem einen Strahl zueinander wie die gleich liegenden Abschnitte auf dem Anderen.

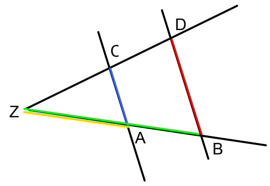


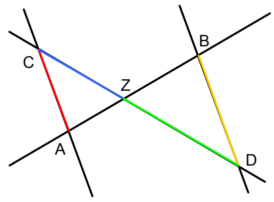


$$\frac{\overline{ZB}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZD}}{\overline{ZC}} \quad \text{oder} \quad \frac{\overline{ZA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ZC}}{\overline{CD}}$$

Zweiter Strahlensatz

Werden zwei Strahlen mit gemeinsamen Anfangspunkt von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Parallelenabschnitte zueinander wie die zugehörigen Abschnitte ein und desselben Strahls.

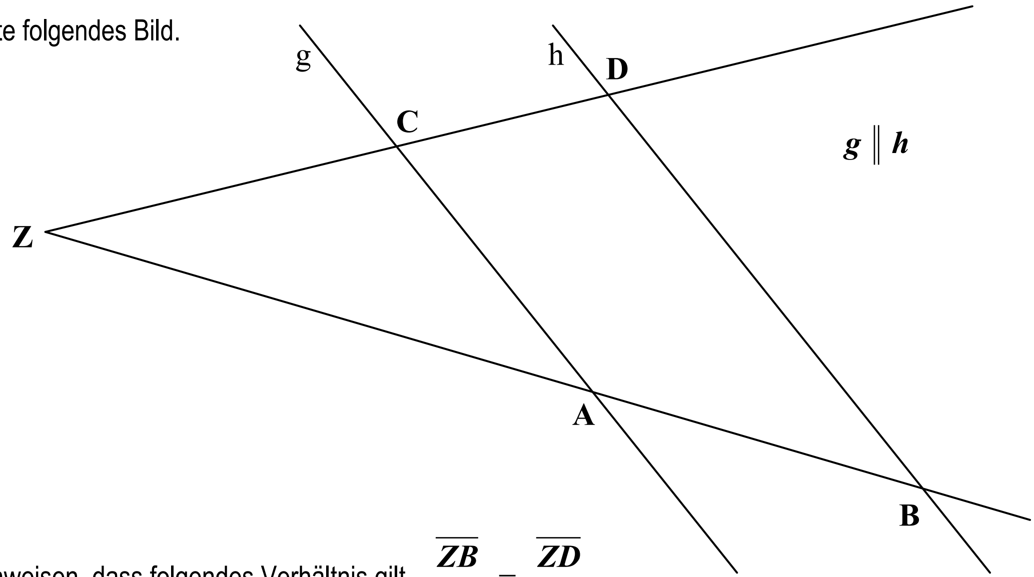




$$\frac{\overline{ZB}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} \quad \text{oder} \quad \frac{\overline{ZD}}{\overline{ZC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}}$$

In diesem ersten Teil soll die Richtigkeit des ersten Strahlensatzes nachgewiesen werden.

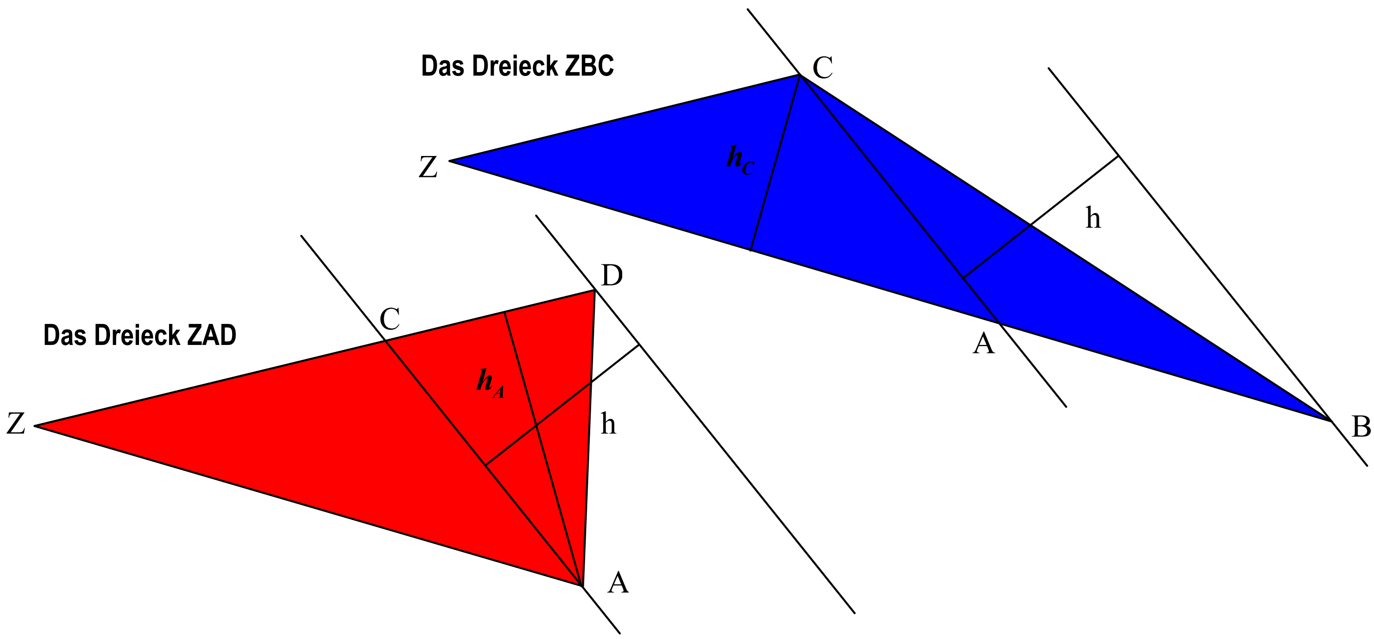
Dazu betrachte folgendes Bild.



Du sollst nachweisen, dass folgendes Verhältnis gilt. $\frac{\overline{ZB}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZD}}{\overline{ZC}}$

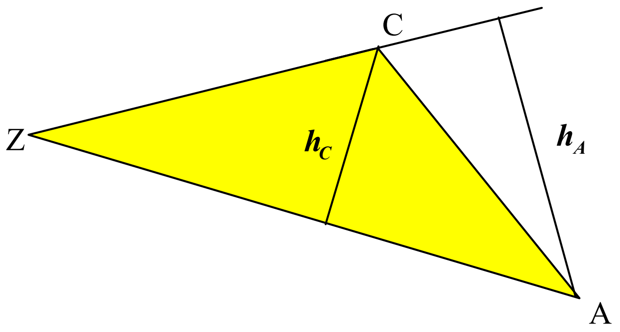
Der Nachweis beruht auf Flächengleichheit von Dreiecken.

Betrachte dazu die folgenden Dreiecke und weise nach, dass sie flächengleich sind.

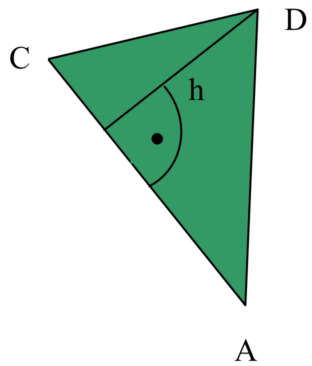


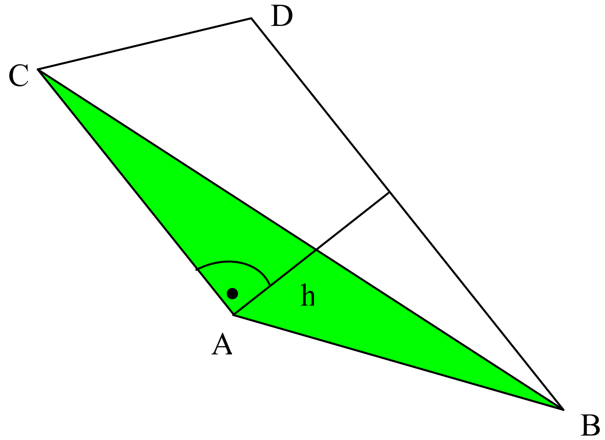
Beide Dreiecke haben das Dreieck ZAC gemeinsam.

Strahlensätze



Du musst also nur noch nachweisen, dass die Flächeninhalte der Dreiecke ABC und ADC gleich groß sind.





Es gilt für beide Dreieck:

Der Flächeninhalt ist $\frac{\overline{AC} \cdot h}{2}$**, da die Geraden g und h parallel sind.**

Da beide Dreiecke das Dreieck ZAC gemeinsam haben, sind die Flächeninhalte der Dreiecke ZBC und ZAD gleich.

Berechne nun die Flächeninhalte der Dreiecke ZBC und ZAD mit den Grundseiten $\overline{ZB}$ und $\overline{ZD}$ sowie des Dreiecks ZAC mit den Grundseiten $\overline{ZA}$ und $\overline{ZC}$. Führe dazu Höhen ein und zeichne sie in die Dreiecke ZBC, ZAD sowie ZAC ein. ZBC und ZAC sowie ZAD und ZAC besitzen jeweils gleiche Höhen.

Flächeninhalt Δ ZBC ist gleich Flächeninhalt Δ ZAD: $\frac{\overline{ZB} \cdot h_C}{2} = \frac{\overline{ZD} \cdot h_A}{2}$

Flächeninhalt des Dreiecks ZAC: $\frac{\overline{ZA} \cdot h_C}{2} = \frac{\overline{ZC} \cdot h_A}{2}$

Division beider Gleichungen liefert: $\frac{\overline{ZB}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZD}}{\overline{ZC}}$

Damit ist die erste Gleichung des ersten Strahlensatzes bewiesen.

Löst du diese Gleichung nach $\overline{ZB}$ auf, so ist $\overline{ZB} = \frac{\overline{ZD}}{\overline{ZC}} \cdot \overline{ZA}$.

Die Zahl $k = \frac{\overline{ZD}}{\overline{ZC}}$ heißt **Streckungsfaktor**.

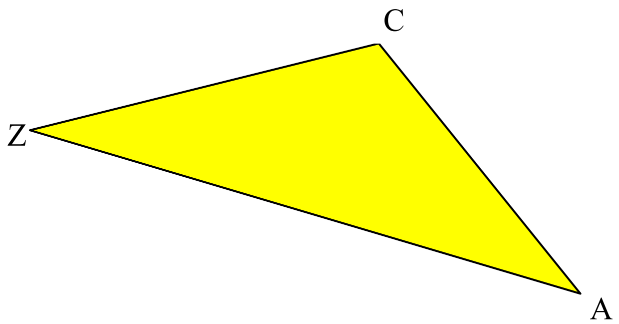
Wenn es dir Spaß gemacht hat, überlege dir, wie die andere Gleichung jetzt folgt.

Strahlensätze

Die 2. Gleichung des ersten Strahlensatzes

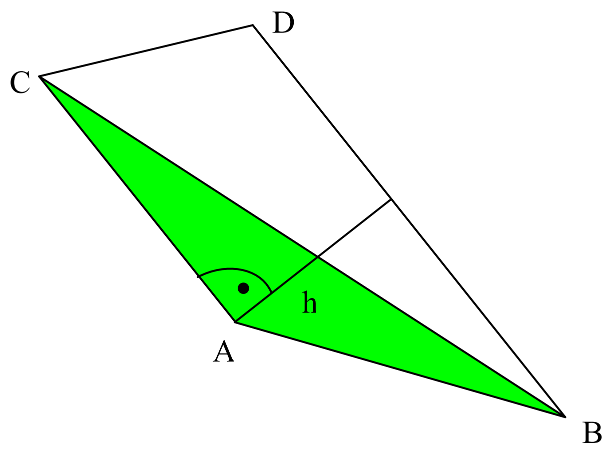
Du willst die zweite Gleichung $\frac{\overline{ZA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ZC}}{\overline{CD}}$ nachweisen.

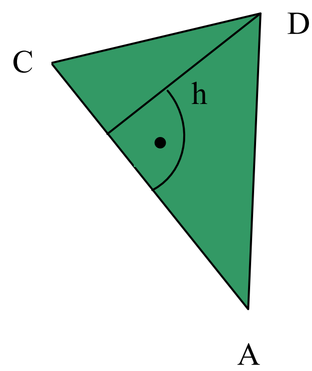
Die Gleichung für das gemeinsame Dreieck ist dir schon bekannt.



Flächeninhalt des Dreiecks ZAC: $\frac{\overline{ZA} \cdot h_C}{2} = \frac{\overline{ZC} \cdot h_A}{2}$

Für die zweite Gleichung benötigen wir die flächengleichen Dreiecke:





Flächeninhalt Δ ABC ist gleich Flächeninhalt Δ ADC: $\frac{\overline{AB} \cdot h_C}{2} = \frac{\overline{CD} \cdot h_A}{2}$

Flächeninhalt des Dreiecks ZAC: $\frac{\overline{ZA} \cdot h_C}{2} = \frac{\overline{ZC} \cdot h_A}{2}$

Dividieren wir die 2. Gleichung durch die 1.,

so dass sich die zugehörigen Höhen kürzen,

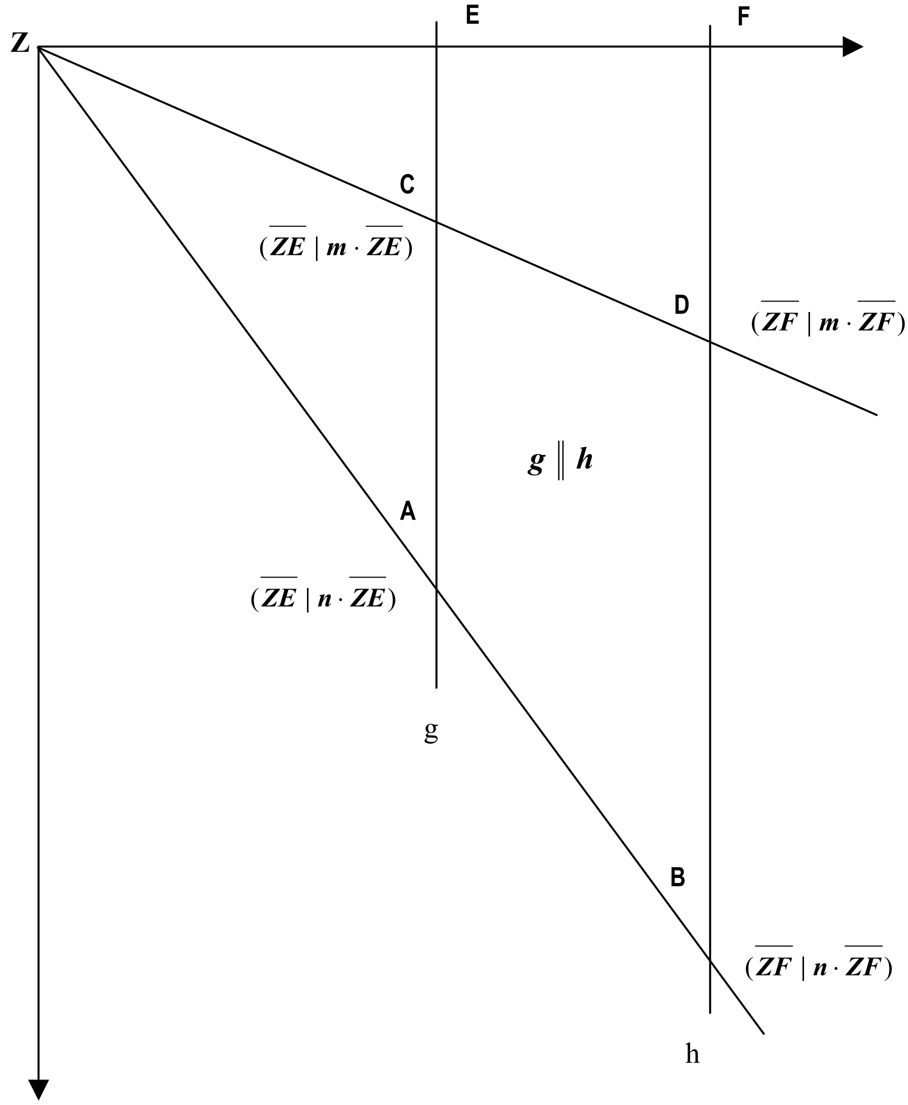
so erhalten wir die 2. Gleichung.

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ZC}}{\overline{CD}}$$

Der zweite Strahlensatz lässt sich mittels Koordinatengeometrie beweisen.

Strahlensätze

Mit diesem Aufgabenblatt sollst du den 2. Strahlensatz beweisen.
Dazu drehen wir die Figur so in ein Koordinatensystem, dass die Parallelen senkrecht zur 1. Achse sind und das Zentrum Z in Koordinatenursprung liegt. Alsdann können wir die Strahlen als lineare Funktionsgraphen deuten. Die Funktionsgleichung heißt dann $f(x) = a \cdot x$, wobei x den Abstand zum Ursprung auf der ersten Achse angibt. Die Zahl a ist die Steigung des Graphen. In unserem Beispiel nennen wir die Steigungen m und n. Wir erhalten folgendes Bild.



Wir lesen ab:

$$\overline{BD} = m \cdot \overline{ZF} - n \cdot \overline{ZF} = (m-n) \cdot \overline{ZF}$$
$$\overline{AC} = m \cdot \overline{ZE} - n \cdot \overline{ZE} = (m-n) \cdot \overline{ZE}$$

Dividieren wir, so folgt

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{(m-n) \cdot \overline{ZF}}{(m-n) \cdot \overline{ZE}} = \frac{\overline{ZF}}{\overline{ZE}}$$

Mit dem 1. Strahlensatz erhalten wir $\frac{\overline{ZF}}{\overline{ZE}} = \frac{\overline{ZD}}{\overline{ZC}}$, so dass wir aus den letzten beiden Gleichungen die 1. Gleichung des 2. Strahlensatzes $\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{ZD}}{\overline{ZC}}$ erhalten.

Genau so gilt nach dem 1. Strahlensatz $\frac{\overline{ZF}}{\overline{ZE}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZA}}$ und es folgt die 2. Gleichung $\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZA}}$ des 2. Strahlensatzes.