Schriftliches Wurzelziehen

Die Umkehrung des Quadrierens $9^2 = 81$ ist das Wurzelziehen oder Radizieren[1] $r(81) = 9$. Statt $r(81)$ schreiben wir stilisiert $\sqrt{81}$. Die Zahl 81 heißt der Radikand[2]

In der Darstellung im Dezimalsystem kann eine Wurzel meistens nur näherungsweise bestimmt werden. Das einfachste Beispiel ist $\sqrt{2}$, da es sich um eine irrationale Zahl handelt. Die Wurzel wird daher durch Iteration[3] langsam angenähert.

Hierzu gibt es verschiedene Möglichkeiten.

Wir wollen hier ***zwei*** dieser Möglichkeiten vorstellen und genauer beleuchten.

1. Das Heron[4]-Verfahren (später von Newton[5] auf beliebige Funktionen verallgemeinert)
2. Das Schriftliche Wurzelziehen

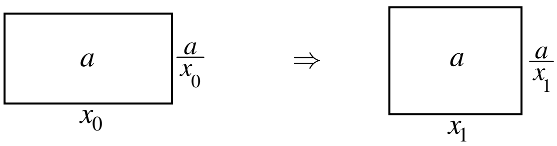
Beide Methoden sind iterative Näherungen zur Dezimalschreibweise.

1. Das Heron-Verfahren

Das von Heron erdachte geniale Verfahren bezieht die Geometrie mit ein. Gesucht ist folglich die ***Maßzahl (Wurzel) der Länge der Seite*** der ***Maßzahl (Quadrat) des Flächeninhaltes eines Qudrates***, wobei die Maßzahl des Quadrates bekannt ist.

Wollten wir dass Quadrat zeichnen, so würde uns das nur schlecht gelingen, denn es wäre wohl eher ein Rechteck.

Es sei a der Maßzahl des Flächeninhaltes des Quadrates. Wählen wir die Maßzahl $x_0 \neq 0$ der Seitenlänge eines Rechtecks, so ist die Maßzahl der anderen Seitenlänge des Rechtecks $\frac{a}{x_0}$.



Bilden wir jetzt den Mittelwert der beiden Maßzahlen der Seitenlängen, also $x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right)$, so liegt diese Zahl zwischen x_0 und $\frac{a}{x_0}$. Beginnen wir nun den Vorgang von Vorne, so haben wir ein Rechteck bei dem die Differenz der Maßzahlen der Seitenlängen näher an null liegen als vorher.

Beispiel

Es sei $a = 9$ und $x_0 = 2$, dann ist $\frac{a}{x_0} = 4{,}5$. Hieraus berechnen wir $x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right) = 3{,}25$.

Wiederholen liefert $x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) = \frac{313}{104}$, $x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{a}{x_2}\right) = \frac{391877}{130625} \approx 3{,}00001531$, $x_4 = 3$.

---

[1] von lat. radix: Wurzel

[2] von lat. radicare: Wurzel schlagen

[3] von lat. iterare: wiederholen

[4] vgl. Heron von Alexandria: https://de.wikipedia.org/wiki/Heron_von_Alexandria

[5] Vgl. Sir Isaak Newton: https://de.wikipedia.org/wiki/Newton-Verfahren

Natürlich habe ich dieses Beispiel extra gewählt, damit die Schnelligkeit dieses Verfahrens erkannt wird. Hier wurde ein einfacher Taschenrechner verwendet.

Das Heron-Verfahren ist iterativ mit der Formel: $x_{i+1}=\frac{1}{2}\left(x_i+\frac{a}{x_i}\right),\ i=0,1,2,\dots$

Berechnen wir noch $\sqrt{3}$ mit $x_0=2$. Wir erhalten $x_1=\frac{1}{2}\left(2+\frac{3}{2}\right)=1{,}75$, $x_2=\frac{97}{56}\approx 1{,}732143$, $x_3\approx 1{,}73205081$, $x_4\approx 1{,}732050808$, $x_5=x_4$.

2. Das Schriftliche Wurzelziehen

Das schriftliche Wurzelziehen $\sqrt{a}=x+\varepsilon$ beruht auf der Zerlegung des Radikanden in der Binomischen Formel $a=(x+\varepsilon)^2=x^2+2x\varepsilon+\varepsilon^2$. Dabei ist x der Hauptteil und ε eine erste Näherung zur tatsächlichen Zahl. Hier wird die Dezimalschreibweise konsequent benützt.

Beispiel

Zu berechnen ist $\sqrt{4\,568}$. Nun ist $4\,568=4\cdot 10^3+5\cdot 10^2+6\cdot 10+8$, aber 10^3 ist keine Quadratzahl. Wurzeln können nur aus Quadratzahlen gezogen werden, also $1,\ 10^2,\ 10^4,\ \dots,\ 10^{2n}$. Folglich schreiben wir unsere Zahl anders, nämlich $4\,568=45\cdot 10^2+68$. Als erste Näherung erhalten wir folglich $\sqrt{4\,568}=6\cdot 10+\varepsilon_0$, als Quadrat $4\,568=36\cdot 10^2+12\cdot 10\varepsilon_0+\varepsilon_0^2$. Es verbleiben somit $4\,568-3\,600=968=(120+\varepsilon_0)\varepsilon_0$. Für die nächste Näherung erhalten wir jetzt $\varepsilon_0=7$, also $127\cdot 7=889$, so dass $968-889=79$ als Differenz bleibt. Wir haben damit $(67+\varepsilon_1)^2=4489+134\varepsilon_1+\varepsilon_1^2$. Berechnen wir die nächste Näherung aus $79=(134+\varepsilon_1)\varepsilon_1$, also $\varepsilon_1=0{,}5$. Wir erhalten $\sqrt{4\,568}=67{,}5+\varepsilon_2$ oder $4\,568=4\,556{,}25+(135+\varepsilon_2)\varepsilon_2 \Leftrightarrow 11{,}75=(135+\varepsilon_2)\varepsilon_2$. Die Berechnung liefert $\varepsilon_2=0{,}08$, also $\sqrt{4\,568}=67{,}58+\varepsilon_3$ oder $4\,568=4\,567{,}0564+(135{,}16+\varepsilon_3)\varepsilon_3 \Leftrightarrow 0{,}9436=(135{,}16+\varepsilon_3)\varepsilon_3$. Die bisherigen Erkenntnisse sollen nun in einen Algorithmus umgesetzt werden.

Beispiele

1.
$$\begin{array}{l}
\sqrt{12|39|04}=352\\
\underline{9}=3\cdot 3\\
3|39\\
\underline{3|25}=65\cdot 5\\
\quad 14|04\\
\quad \underline{14|04}=702\cdot 2\\
\qquad 0
\end{array}$$

2.
$$\begin{array}{l}
\sqrt{45|68}=67{,}5869\\
\underline{36}=6\cdot 6\\
9|68\\
\underline{8|89}=127\cdot 7\\
\quad 79|00\\
\quad \underline{67|25}=1345\cdot 5\\
\quad 11|75|00\\
\quad \underline{10|80|64}=13508\cdot 8\\
\qquad 94|36|00\\
\qquad \underline{81|09|96}=135166\cdot 6\\
\qquad 13|26|04|00
\end{array}$$

3.
$$\begin{array}{l}
\sqrt{2}=1{,}41421\\
\underline{1{,}96}=1{,}4\cdot 1{,}4\\
4|00\\
\underline{2|81}=281\cdot 1\\
1|19|00\\
\underline{1|12|96}=2824\cdot 4\\
\quad 6|04|00\\
\quad \underline{5|69|64}=28482\cdot 2\\
\quad 34|36|00
\end{array}$$

Eine Zerlegung in ein Produkt, wobei aus dem 1. Faktor die Wurzel direkt gezogen werden kann, bietet überhaupt keinen Vorteil, wie sich jeder an einem einfachen Beispiel selbst überzeugen kann.

Der bisher entwickelte Algorithmus soll nun so rationalisiert werden, so dass er etwa der schriftlichen Division gleichkommt.

Die orangenen Ziffern geben die jeweilige Korrektur der nächsten Ziffer an. Die nächste Ziffer wird durch den „Rest plus nächste Ziffer“ dividiert durch das Doppelte der letzten Ziffer ermittelt. In Beispiel 1. also $33:6=5{,}5$ oder in 3. $1190:282=4\frac{31}{141}$.

1. $\sqrt{12|39|04}=352 \qquad =3\mathbf{52} \quad \cdot 352$

$$\begin{array}{l}
9 \\
3|39|04 \\
\mathbf{1|75} \\
1|5 \\
14|04 \\
\mathbf{7|0} \\
7|04 \\
0
\end{array}$$

2. $\sqrt{4\,5|68}=67{,}58690 \qquad =6|\mathbf{75|86|90} \quad \cdot 6|75|86|90$

$$\begin{array}{l}
3\,6|00 \\
9|68 \\
\mathbf{4|2} \\
4|69 \\
79|00 \\
\mathbf{33|5} \\
33|75 \\
11|75|00 \\
\mathbf{5|40|0} \\
5|40|64 \\
94|36|00 \\
\mathbf{40|54|8} \\
40|55|16 \\
13|26|04|00 \\
\mathbf{6|08|27|4} \\
6|08|28|21 \\
1|09|48|39|00
\end{array}$$

3. $\sqrt{2}=1{,}4142 \qquad =1|41\mathbf{1|42|1} \quad \cdot 1|41|42|1$

$$\begin{array}{l}
1|96 \\
\mathbf{1|4} \\
1|41 \\
1|19|00 \\
\mathbf{56|4} \\
56|56 \\
6|04|00 \\
\mathbf{2|82|8} \\
2|82|84 \\
38|36|00
\end{array}$$

Es ist jedoch sehr mühsam schriftlich eine Wurzel zu ziehen. Daher sind wir dankbar, wenn ein Taschenrechner zur Verfügung steht.