Potenzen

Kurze Erinnerung

Unsere tägliche Mathematik beruht auf einem ***Additionssystem***. Diesem System liegt die ***Basis*** $\mathbf{10}$ zugrunde (***Dezimalsystem***). Natürlich ist jedes Additionssystem einer anderen ***Basis*** $\boldsymbol{g}$ zu unserem äquivalent. Z.B. das ***Binär-*** oder ***Dualsystem*** $\boldsymbol{g = 2}$ und das ***Hexagesimalsystem*** $\boldsymbol{g = 16}$.

Dadurch sind wir gezwungen

$$\textbf{\textit{die Addition gleicher Summanden}}\ nx := n \cdot x := \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n-\text{mal}}$$

auswendig zu lernen.

Wir sprechen von der ***Multiplikation*** (Vielfache gleicher Summanden). $n \cdot x$ heißt das ***Produkt*** der ***Faktoren*** n und x. Hierbei sind x eine reelle und n eine natürliche Zahl.

Der nächste Schritt ist durch

$$\textbf{\textit{die Multiplikation gleicher Faktoren}}\ a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot\ \cdots\ \cdot a}_{n-\text{mal}}$$

gegeben. Auch hier sind a eine reelle und n eine natürliche Zahl.

Wir sprechen von der ***Potenzierung***. a^n heißt die ***Potenz*** des Faktors a. Wir sagen: a ***hoch*** n. Für $n = 2$ bzw. $n = 3$ auch a (zum) Quadrat bzw. a (zum) Kubik. In Analogie zu 10^n heißt a auch ***Basis*** und n der ***Exponent*** der Potenz a^n.

Für Potenzen gelten einige einfache Gesetze. Es seien $a \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{N}$.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \textbf{(N1)}$$

Beweis: $a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{mal}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m-\text{mal}} = \underbrace{a \cdot a \cdots a \cdot a \cdot a \cdots a}_{(n+m)-mal} = a^{n+m}$.

Insbesondere ist für $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ und $m \in \mathbb{N}$ die Gleichheit

$$\frac{1}{a^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m \qquad \textbf{(N2)}$$

erfüllt, da $\dfrac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m-\text{mal}}} = \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdots \frac{1}{a}}_{m-\text{mal}}$.

Potenzen können potenziert werden. Für $a \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}. \qquad \textbf{(N3)}$$

Auf der linken Seite kommt die Potenz a^n im Produkt m-mal vor. Das ergibt $(n \cdot m)$-mal den Faktor a. Dies ist aber die rechte Seite.

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m \qquad \textbf{(N4)}$$

Die Behauptung folgt aus dem Kommutativgesetz, wenn beachtet wird, dass zu jedem a genau ein b existiert.

Zum Schluss zeigen wir noch, dass für $a,b \in \mathbb{R},\ a>0,\ b>0$ und $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$

$$a^n = b^n \Leftrightarrow a = b \,. \qquad \textbf{(PB)}$$

Zunächst ist die Aussage für $n=1$ richtig. Sei also $n=2$. Dann ist

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-b)\Bigg(\underbrace{a+b}_{>0}\Bigg) = 0\text{, also } a=b\,.$$

Genau so verfahren wir jetzt mit $a^n = b^n$.

$$a^n = b^n \Leftrightarrow a^n - b^n = 0 \Leftrightarrow (a-b)\Bigg(\underbrace{a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}}_{>0}\Bigg) = 0\,,$$

also $a=b$. Damit ist die Behauptung erbracht.

Zwei wichtige Eigenschaften halten wir gesondert fest. Für $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ ist

$$a^0 = 1\,, \qquad \textbf{(P0)}$$

denn $a^0 \cdot a = a^0 \cdot a^1 = a^{0+1} = a^1 = a \,|\cdot \frac{1}{a} \Rightarrow a^0 = 1\,.$

Nach **(N1)**, **(P0)** kann nun für $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$

$$a^{-1} := \frac{1}{a} \qquad \textbf{(P1)}$$

definiert werden, da $1 = a^0 = a^{-1+1} = a^{-1}a \,|\cdot \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} = a^{-1}$.

Allgemein gilt somit

$$a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m,\ m \in \mathbb{N}\,. \qquad \textbf{(P1*)}$$

Die Exponenten können nun auf ganze Zahlen ausgedehnt werden.

Es seien $a,b \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ b \neq 0$. Dann gelten die Gesetze **(N1)** bis **(N6)** für alle $n,m \in \mathbb{Z}$, denn mit **(N2)** und **(N3)** ist $\left(a^p\right)^{-1} = a^{p\cdot(-1)} = a^{-p}$ für $p \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad \textbf{(N1*)}$$

jetzt als Spezialfall in **(N1)** enthalten, denn $\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot \frac{1}{a^m} = a^n \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^m = a^n \cdot a^{-m} = a^{n-m}$.

Erweitern wir die Potenzgesetze auf rationale Zahlen $\mathbb{Q}$.

Dazu erweitern wir zunächst das Gesetz $\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m},\ n,m \in \mathbb{N}$.

Die Umkehrung des Potenzierens ist das Wurzelziehen.

Dazu setzen wir $a \in \mathbb{R},\ a > 0$ voraus.

Dann sind $\left(\sqrt[2]{a}\right)^2 = \sqrt[2]{a^2} = a$, $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$, ..., $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$ für $n \in \mathbb{N}$. Aber auch $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a^{\frac{n}{n}} = a,\ n \in \mathbb{N}$ und $\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}} = a^{n\cdot\frac{1}{n}} = a^{\frac{n}{n}} = a,\ n \in \mathbb{N}$, so dass wir $a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$ identifizieren können. Für $a \in \mathbb{R},\ a > 0$ und $q \in \mathbb{N},\ q \neq 0,\ p \in \mathbb{Z}$ definieren wir daher

$$a^{\frac{p}{q}} := \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p. \qquad \textbf{(D)}$$

Natürlich ist

$$\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(a^p\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad \textbf{(P0)}$$

Dies folgt mit **(N3)** und **(D)** sowie **(PB)** aus

$$\left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p\right)^q \underset{\textbf{(N3)}}{=} \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{pq} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{qp} \underset{\textbf{(N3)}}{=} \left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q\right)^p \underset{\textbf{(D)}}{=} a^p \underset{\textbf{(D)}}{=} \left(\left(a^p\right)^{\frac{1}{q}}\right)^q \underset{\textbf{(PB)}}{\Rightarrow} \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(a^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Wir zeigen nun

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \textbf{(P2)}$$

für $a \in \mathbb{R}_+,\ x, y \in \mathbb{Q}$.

Dazu setzen wir $x = \frac{p}{q}, y = \frac{r}{s}$. Wegen $\left(a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}}\right) = \left(a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{qs}{qs}} = \left(\left(a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}}\right)^{qs}\right)^{\frac{1}{qs}}$ und **(PB)** genügt es, die folgende Gleichheit zu zeigen.

$$\left(a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}}\right)^{qs} = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{qs} \cdot \left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{qs} = \left(a^{ps}\right)\cdot\left(a^{rq}\right) = a^{ps+rq} = \left(a^{\frac{(ps+rq)}{qs}}\right)^{qs} = \left(a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}\right)^{qs}$$

Für $a \in \mathbb{R}_+,\ x, y \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\left(a^x\right)^y = a^{x\cdot y}. \qquad \textbf{(P3)}$$

Wir setzen wieder $x = \frac{p}{q}, y = \frac{r}{s}$. Mit **(D)** und **(P0)** folgt

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \left(\left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p\right)^r\right)^{\frac{1}{s}} = \left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{pr}\right)^{\frac{1}{s}} = \left(\left(a^{pr}\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{s}} = \left(a^{pr}\right)^{\frac{1}{qs}} = a^{\frac{pr}{qs}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}.$$

Für $a, b \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{Q}$ gilt

$$a^x \cdot b^x = \left(a \cdot b\right)^x. \qquad \textbf{(P4)}$$

Mit $x=\frac{p}{q}$ lautet **(P4)** $a^{\frac{p}{q}}\cdot b^{\frac{p}{q}}=(a\cdot b)^{\frac{p}{q}}$. Es folgt

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\cdot b^{\frac{p}{q}}\right)^q=\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q\cdot\left(b^{\frac{p}{q}}\right)^q=a^p\cdot b^p=(a\cdot b)^p=(a\cdot b)^{\frac{pq}{q}}=\left((a\cdot b)^{\frac{p}{q}}\right)^q.$$

Mit **(PB)** folgt die Behauptung.

Zusammenfassung

Es sei $a\in\mathbb{R},\ a\neq 0$ dann ist

$$a^0=1. \qquad \textbf{(P0)}$$

Es sei $a\in\mathbb{R},\ a\neq 0$ dann ist definiert:

$$a^{-1}:=\frac{1}{a}. \qquad \textbf{(D1)}$$

Für $a\in\mathbb{R},\ a>0$ und $q\in\mathbb{N},\ q\neq 0,\ p\in\mathbb{Z}$ ist definiert:

$$a^{\frac{p}{q}}:=\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p. \qquad \textbf{(D2)}$$

Insbesondere ist

$$\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p=\left(a^p\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad \textbf{(P1)}$$

Für $a,b\in\mathbb{R}_+,\ x,y\in\mathbb{Q}$

$$a^x\cdot a^y=a^{x+y} \qquad \textbf{(P2)}$$

$$\left(a^x\right)^y=a^{x\cdot y}. \qquad \textbf{(P3)}$$

$$a^x\cdot b^x=(a\cdot b)^x. \qquad \textbf{(P4)}$$

$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y} \qquad \textbf{(P2*)}$$

Sind $x,y\in\mathbb{N}$, dann dürfen $a,b\in\mathbb{R}$ für **(P2)** bis **(P4)** gewählt werden.

Sind $x,y\in\mathbb{Z}$, dann dürfen $a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0,\ b\neq 0$ für **(P2)** bis **(P4)** und **(P2*)** gewählt werden.