Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Vor den eigentlichen Konstruktionen möchte ich einige Bemerkungen zu Faltungen machen, da sie leider in der Schule ein Stiefkind darstellen. Mit anderen Worten, sie werden nicht behandelt, obwohl sie die Vorstufe der Spiegelungen an einer Geraden, die sogenannte Faltachse, sind. Mit Papier, Nadel und Zirkel können hier wertvolle Erkenntnisse gewonnen sowie erworben werden. Senkrechte und parallele Geraden, Figuren und deren Eigenschaften können untersucht werden.

Beispiele:

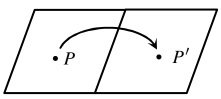
A) Falte ein Blatt Papier scharfkantig. Stich mit einer Nadel vorsichtig durch beide Blätter. Entfalte das Blatt, nenne die Faltachse g und die beiden Punkte P und P'.

Welche Eigenschaften haben diese beiden Punkte?

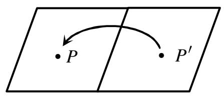
B) Falte erneut mit PP' als Faltachse. Falte noch einmal an g.

Welche besondere Eigenschaft haben die vier entstandenen Bereiche? Wie stehen die Faltachsen zueinander?

Definition: P' heißt ***Faltungspunkt*** von P, wenn P über P' liegt. Falten wir umgekehrt, so dass P' über P liegt, so heißt P der ***Faltungspunkt*** von P'.



Faltung

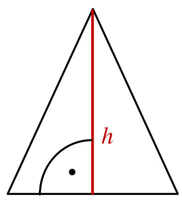


umgekehrte oder inverse Faltung

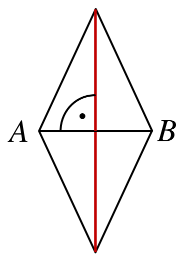
Erinnern wir noch einfache Eigenschaften von Dreiecken und Rauten.

Hier genügt es gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke zu besprechen. Daraus ergeben sich einige Aussagen für Rauten, die dir sicher bekannt sind.

Zwei gleich lange Seiten eines Dreiecks heißen Schenkel und die dritte Seite Basis, auch Grundseite genannt. Sie kann beliebig lang sein. Die Höhe der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks steht immer senkrecht auf dieser Basis. Folglich teilt die Höhe ein gleichschenkliges Dreieck in zwei kongruente (deckungsgleiche) Dreiecke. Dies kannst du durch Faltung an der Höhe leicht überprüfen. Die anderen Höhen benötigen wir hier nicht. Insbesondere wird der der Basis gegenüberliegende Winkel halbiert.



Die Höhe ist leicht zu konstruieren, wenn zwei gleichschenklige Dreiecke mit ihren gleichlangen Basen $\overline{AB}$ aneinander gelegt werden. Hierbei dürfen beide Dreiecke sogar kongruent sein. Wir erhalten dann eine Raute, also ein ebenes Viereck, bei der alle Seiten (Schenkel) gleich lang sind.

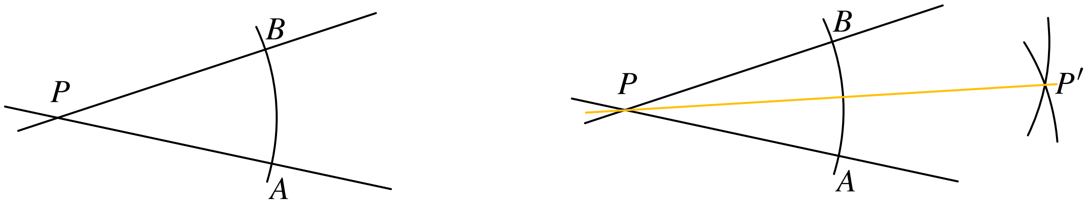


Kommen wir nun zu den Konstruktionen. Wir werden versuchen, das Lineal so wenig wie möglich einzusetzen. Du solltest Punkte selbstständig benennen, damit dir die Konstruktionsbeschreibung einfacher gelingt. Beginnen wir mit dem eben gesagten.

1. Konstruktion einer Winkelhalbierenden

Gegeben ist ein beliebiger Winkel, der halbiert werden soll. Ich beschränke mich auf sich schneidende Geraden.

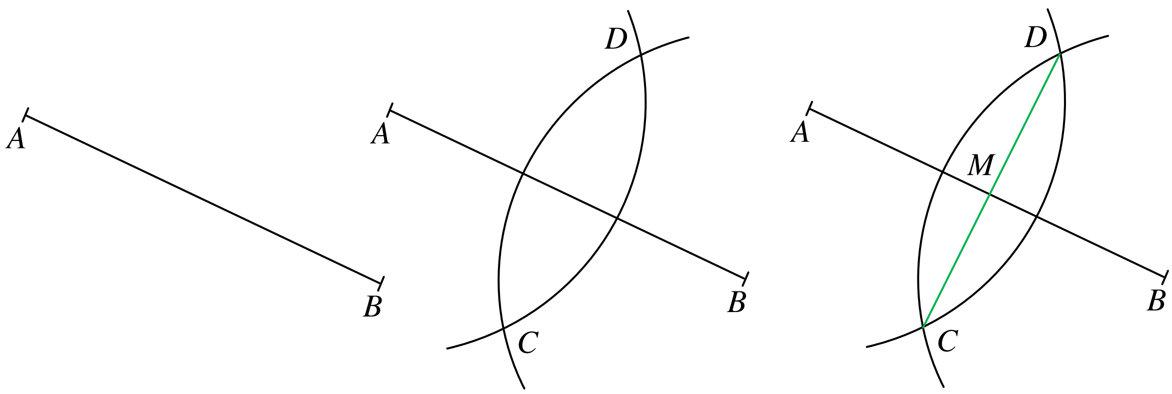
Konstruktion: Durch den Schnittpunkt P der beiden Geraden schlage ich einen beliebigen Kreisbogen, der die beiden Geraden in A und B trifft. Mit demselben Radius schlage ich um A und B je einen Kreisbogen, so dass ein neuer Punkt P' entsteht. Die Gerade durch P und P' halbiert den Winkel $\measuredangle(PA, PB)$.



Begründung: Die drei Punkte P, A und B bilden ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $\overline{AB}$ (nicht eingezeichnet). Entsprechend auch P', B und A. P' ist der Faltungspunkt von P an der Faltachse AB. P liegt dann über P'.

2. Der Mittelpunkt einer Strecke $\overline{AB}$ oder die Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$

Konstruktion: Ich schlage mit dem Zirkel zwei gleichgroße Kreisbögen um A und B. Die Kreisbögen schneiden sich in den Punkten C und D. Die Strecke $\overline{CD}$ schneidet die Strecke $\overline{AB}$ im Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$.



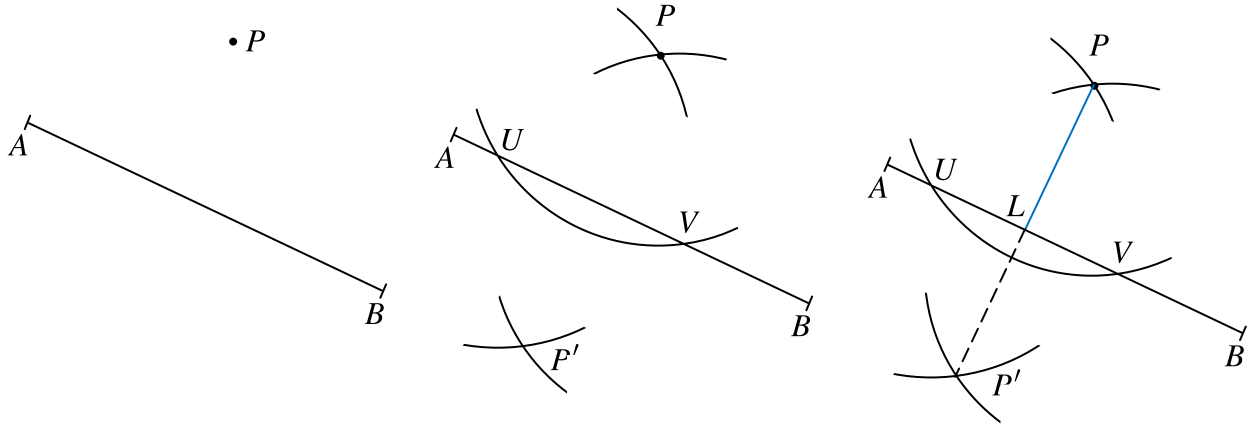
Begründung: Die Punkte C und D haben die gleichen Abstände zu A und B, da die Radien der Kreisbögen gleich sind. (Der Zirkel ist nicht verstellt worden.) Folglich sind die Dreiecke $\Delta(ABC)$ und $\Delta(ABD)$ gleichschenklige kongruente Dreiecke mit ihren Höhen $\overline{MC}$ bzw. $\overline{MD}$. Das Viereck $\square(ACBD)$ ist eine Raute.

Bemerkung: Da die Strecke $\overline{CD}$ die gegebene Strecke $\overline{AB}$ im Mittelpunkt M schneidet und senkrecht auf $\overline{AB}$ steht, heißt die Strecke $\overline{CD}$ auch Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$. Die Strecke $\overline{CD}$ kann auch als Winkelhalbierende gesehen werden. Warum?

3. Fällen eines Lots auf eine Strecke oder Gerade

Gegeben sind eine Strecke oder Gerade und ein Punkt P der nicht auf dieser Strecke oder Geraden liegt. Wir beschränken uns auf eine Strecke.

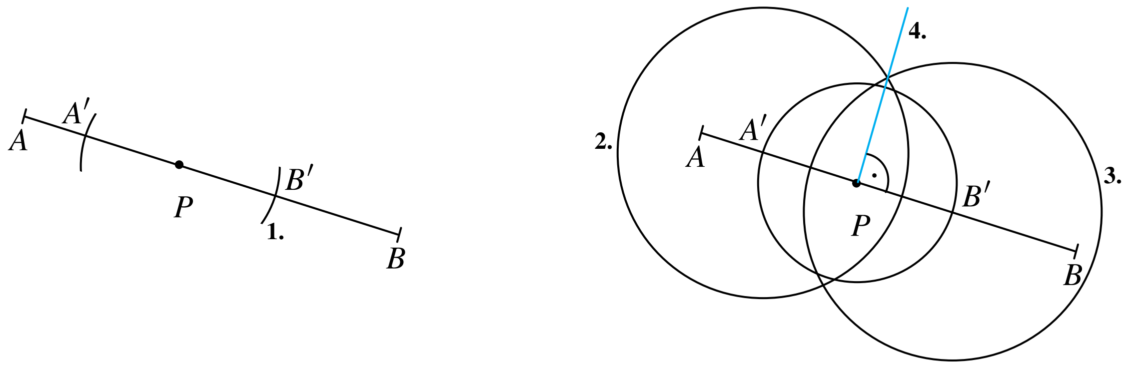
Konstruktion: Ich schlage mit meinem Zirkel um P einen Kreisbogen, der die Strecke $\overline{AB}$ in zwei Punkten U und V schneidet. Ohne den Zirkel zu verstellen, schlage ich mit gleichem Radius um U und V Kreisbögen, die sich in P' schneiden. Jetzt zeichne ich das Lot, indem ich P mit L verbinde.



Begründung: Die zwei Punkte U und V bilden zusammen mit dem Punkt P ein gleichschenkliges Dreieck. Ein gespiegeltes gleichschenkliges Dreieck $\Delta(UP'V)$ erhalte ich mit der Konstruktion **1.** L ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{UV}$. L heißt ***Lotfußpunkt***. Selbstverständlich steht $\overline{PL}$ senkrecht auf $\overline{UV}$.

4. Senkrechte durch einen Punkt auf einer Strecke oder Geraden errichten

Gegeben sind ein Punkt P auf einer Strecke $\overline{AB}$ oder Geraden g. Die Konstruktion, wenn P nicht Endpunkt einer Strecke ist, zeige ich nur in Bildern.

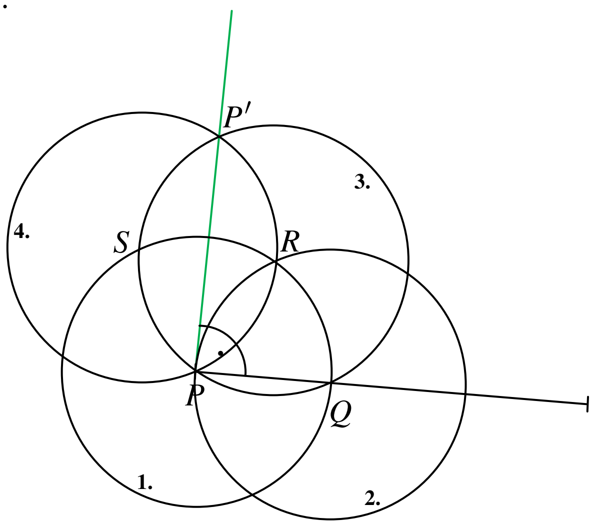


Begründung: Die Konstruktion führe ich auf die Rückwärtskonstruktion des Lotfällens zurück. L und P tauschen hier ihre Rollen. Natürlich sind nur die Schnittpunkte zu konstruieren.

Die folgende Konstruktion kann jederzeit verwendet werden.

Konstruktion, wenn *P* Endpunkt einer Strecke ist

Hier verwende ich die Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks. (Alle Seiten sind gleich lang.) Alle Innenwinkel sind 60° groß. Ich konstruiere nacheinander die Schnittpunkte *Q*, *R*, *S* und P'. Hierbei müssen die Kreise nicht voll ausgezogen werden. Die Strecke $\overline{PP'}$ steht senkrecht auf der Strecke $\overline{PQ}$.

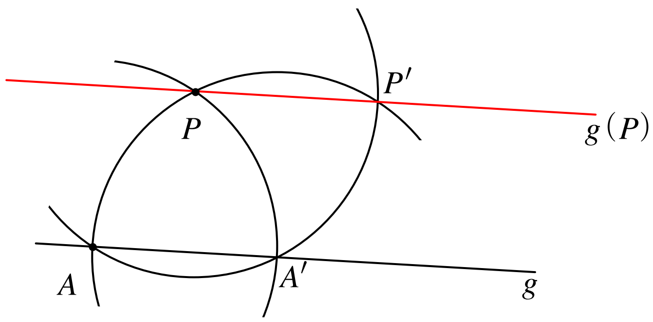


Begründung: Der Winkel zwischen $\overline{PQ}$ und $\overline{PR}$ beträgt $\measuredangle\left(\overline{PQ},\overline{PR}\right)=60°$. Es bleibt daher zu überlegen, dass $\measuredangle\left(\overline{PR},\overline{PP'}\right)=30°$. Nun ist aber auch $\measuredangle\left(\overline{PR},\overline{PS}\right)=60°$ und damit $\measuredangle\left(\overline{PR},\overline{PP'}\right)=30°$ als Winkelhalbierende.

5. Parallele durch einen Punkt außerhalb einer Geraden

Gegeben sind eine Strecke oder eine Gerade und ein Punkt *P*, der nicht auf dieser Strecke oder Gerade liegt. Ich beschränke mich auf eine Gerade *g*.

Konstruktion: Ich wähle auf der Geraden *g* einen Punkt *A* und schlage einen Kreisbogen mit Radius $\left|\overline{AP}\right|=r$ um *A* durch *P*. Der Kreisbogen trifft die Gerade *g* in A'. Um *P* und A' schlage ich zwei weitere Kreisbögen mit dem Radius *r* und erhalte den Punkt P'. Die Gerade $g(P)$ durch *P* ist parallel zu *g*.

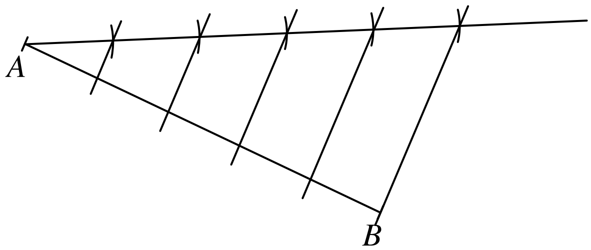


Begründung: Die Konstruktion benutzt die Eigenschaften einer Raute, bei der gegenüberliegende Strecken parallel sind. Folglich sind es auch die verlängerten Geraden. Die Raute ist durch die vier Punkte *A*, A', P' und *P* gegeben.

6. Teilen einer Strecke in gleichgroße Abschnitte

Eine Strecke $\overline{AB}$ soll in (hier fünf) gleichgroße Abschnitte unterteilt werden.

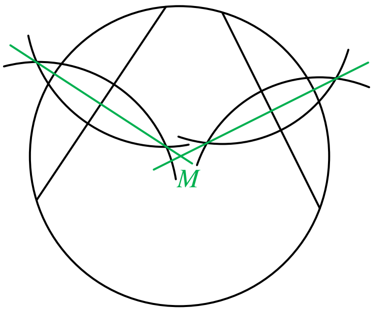
Konstruktion: Ich zeichne einen Strahl in A beginnend und schlage von A aus mit dem Zirkel beliebigen festen Radius fünf gleiche Teile ab. Ich verbinde den fünften Punkt mit dem Endpunkt B der Strecke $\overline{AB}$. Durch Parallelverschiebung werden nun alle anderen Punkte auf die Strecke $\overline{AB}$ übertragen.



Begründung: Die Konstruktion beruht auf den Strahlensatz oder einen äquivalenten Satz, z. B. Satz des Pythagoras.

7. Mittelpunkt eines Kreises finden

Konstruktion: Ich zeichne zwei beliebige nichtparallele Sehnen durch den Kreis und konstruiere die Mittelsenkrechten. Diese schneiden sich im Mittelpunkt M des Kreises.

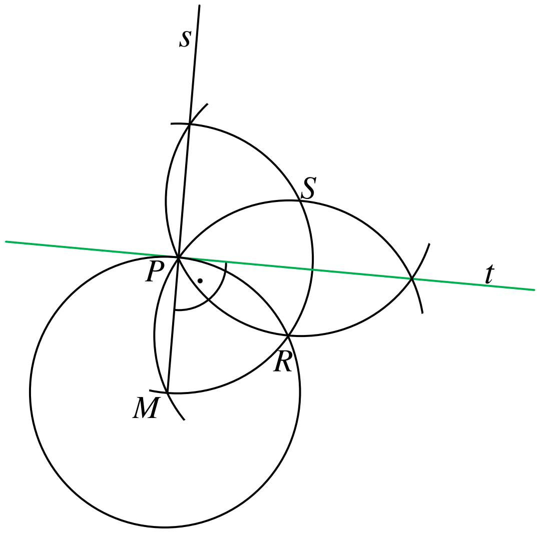


Begründung: Dies ist eine Rückwärtskonstruktion. Der Kreis ist durch drei Punkte eindeutig bestimmt. Die Mittelsenkrechte einer Sehne verläuft durch den Mittelpunkt, denn sie zerteilt den Kreis in zwei gleich große Teile, da sie auch Faltachse jeder parallelen Sehne ist. Folglich schneiden sich die beiden Mittelsenkrechten im Mittelpunkt M.

8. Tangentenkonstruktion durch genau einen Kreispunkt

Durch einen Punkt P des Kreises ist die Tangente t zu konstruieren.

Konstruktion: Ich zeichne einen Strahl s vom Mittelpunkt M durch P und konstruiere anschließend wie unter **4.** die Senkrechte durch P. Dies ist die Tangente t.



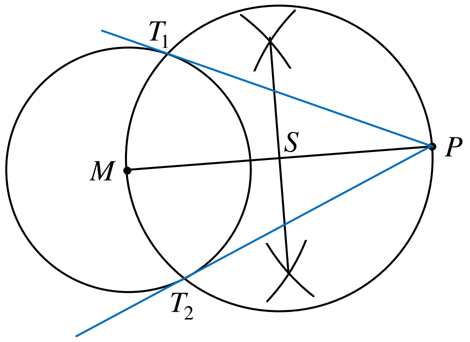
Begründung: Der Punkt P ist ein sogenannter Tangentendoppelpunkt, denn jeder Schnitt einer Geraden mit einem Kreis trifft immer doppelt auf. Da sie übereinander liegen, sehen wir nur einen Punkt. Verschieben wir die Tangente parallel in Richtung Kreismittelpunkt, so lösen sich die beiden Punkte und es entsteht mit M ein gleichschenkliges Dreieck, wobei die Basis durch den Sehnenabschnitt repräsentiert wird.

9. Tangentenkonstruktion von einem Punkt außerhalb des Kreises

Zu einem gegebenen Kreis und einem Punkt außerhalb des Kreises konstruiere die Tangente.

Natürlich sehen wir sofort zwei Tangenten, da wir einem Kreis immer einen „Winkel aufsetzen" können.

Konstruktion: Ich verbinde den Mittelpunkt M mit P und bestimme die Mitte S der Strecke $\overline{MP}$. Der Kreis um S durch P und M, der sogenannte Thaleskreis, schneidet den Ursprungskreis in den zwei Tangentenpunkten T_1 und T_2.



Begründung: Nach der 8. Konstruktion stehen Radius und Tangente immer senkrecht zueinander. Folglich bilden Mittelpunkt M Tangentenpunkt T und der Punkt P ein rechtwinkliges Dreieck. Zu jedem rechtwinkligen Dreieck gehört ein Thaleskreis.