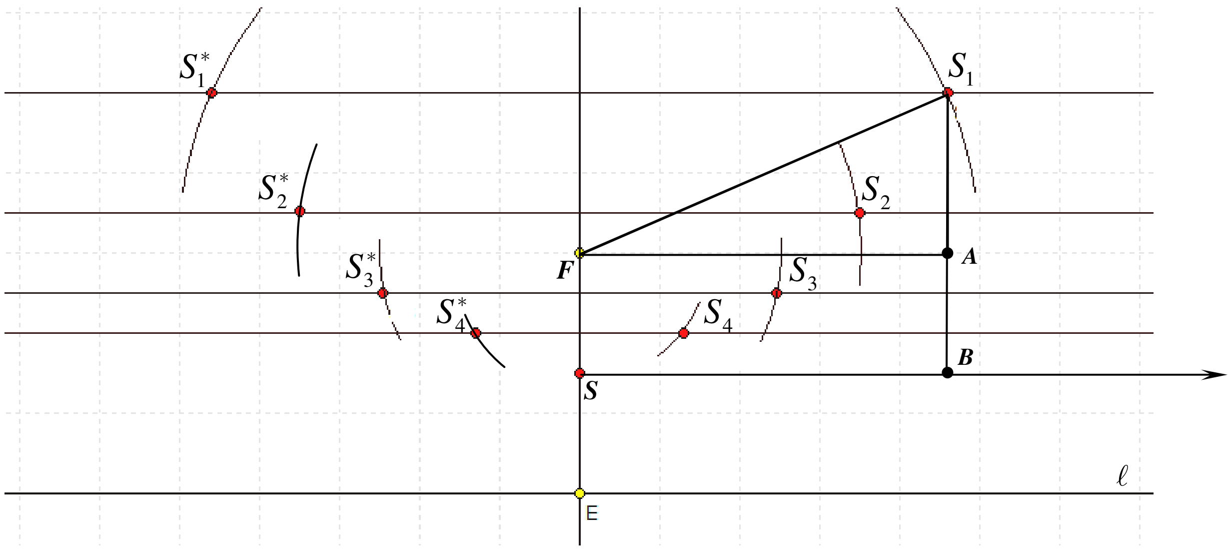
Parabel

Definition einer Parabel

Eine Parabel ist die Menge aller Punkte, die von einem Punkt (Focus) und einer Geraden (Leitlinie) denselben Abstand haben.

Konstruktion
In diesem Bild ist F der Focus. Der erste Punkt liegt in der Mitte zwischen F und ℓ.



Wir wollen nachweisen, dass die algebraische Beschreibung durch $f(x) = ax^2$ gegeben ist, wobei a zu bestimmen ist. Der Ursprung sei durch den Punkt S gegeben. Dazu sei p der Abstand $\left|\overline{FS}\right| = p$, also $F(0 \mid p)$. Die Koordinaten des Punktes S_1 seien $S_1(x \mid y)$, die von **B** seien $B(x \mid 0)$. Dann gilt mit $\left|\overline{BS_1}\right| = y$ und $\left|\overline{AS_1}\right| = y - p$ sowie $\left|\overline{FS_1}\right| = y + p$ (Abstand von S_1 zur Leitgeraden nach Voraussetzung) nach Pythagoras

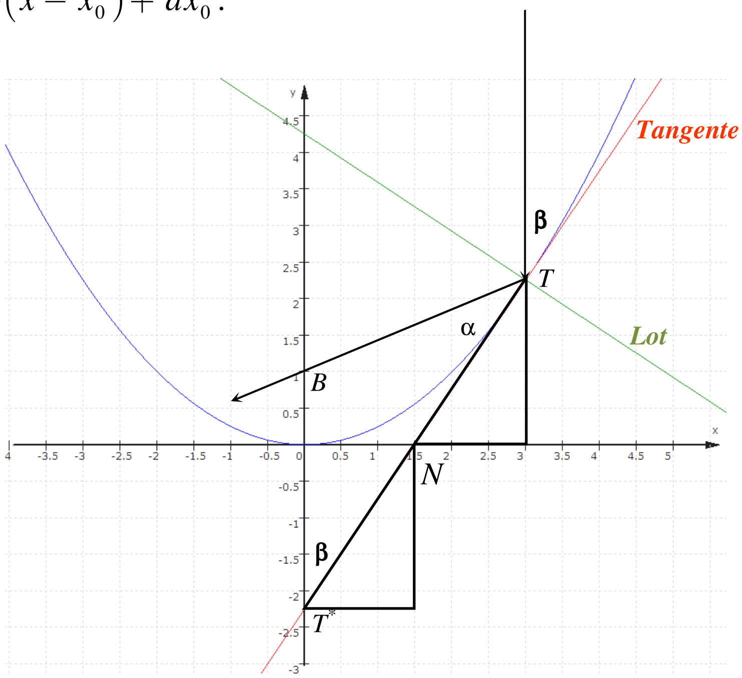
$$(y-p)^2 + x^2 = (y+p)^2 \Leftrightarrow y^2 - 2py + p^2 + x^2 = y^2 + 2py + p^2 \Leftrightarrow 4py = x^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4p}x^2.$$

Folglich ist $a = \frac{1}{4p}$ und $f(x) = \frac{1}{4p}x^2$. Für den Focus gilt nun $F\left(0 \mid \frac{1}{4a}\right)$.

Die Parabel hat eine bemerkenswerte Eigenschaft. Parallel zur zweiten Achse einfallende Lichtstrahlen werden im Focus gesammelt (verlaufen durch den Focus).

Dazu lassen wir uns von einem bekannten Beispiel aus der Physik leiten. Dort wird gezeigt, dass sich alle parallel zur Symmetrieachse einfallenden Lichtstrahlen in einem Brennpunkt sammeln, was wir uns bei dem Satellitenspiegel oder in einem Solarkraftwerk zu Nutze machen. Die Umkehrung gilt entsprechend, da dies auf der Umkehrung des Lichtweges beruht. Nun aber zurück zur Konstruktion. Sie verwendet die Tangente und die Normale (Lot). Sei dazu $P\left(x_0 \mid ax_0^2\right)$ ein Punkt der Parabel. Die Tangente ersetzt den ebenen Spiegel! Wir verwenden die Punkt-Steigungsform der Geraden durch P. Sie lautet $t_{x_0}(x) = m\left(x - x_0\right) + ax_0^2$. Die Tangente ist durch die doppelte Nullstelle von $f(x) - t_{x_0}(x) = 0$, also $ax^2 - m\left(x - x_0\right) - ax_0^2 = 0 \Leftrightarrow \left[a\left(x + x_0\right) - m\right]\left(x - x_0\right) = 0 \Leftrightarrow$ $m = 2ax_0$ eindeutig bestimmt.

Folglich ist $t_{x_0}(x) = 2ax_0\left(x - x_0\right) + ax_0^2$ und die Normale, hier das Lot, somit $n_{x_0}(x) = -\frac{1}{2ax_0}\left(x - x_0\right) + ax_0^2$.



Aufgrund des Reflexionsgesetzes sind Einfalls- und Reflexionswinkel gleich. Deshalb gilt auch $\alpha = \beta$. Die Tangente $t_{x_0}(x) = 2ax_0x - ax_0^2$ schließt folglich mit der 2. Achse denselben Winkel ein wie mit dem einfallenden Strahl (Stufenwinkel). Das Dreieck $\triangle TBT^*$ ist folglich gleichschenklig. Der Schnittpunkt der Tangente mit der ersten Achse ist $N\left(\frac{1}{2}x_0 \,|\, 0\right)$. Dies folgt sofort aus $0 = t_{x_0}(x) = 2ax_0x - ax_0^2$. Damit ist N als der Mittelpunkt der Basis des Dreiecks $\triangle TBT^*$ erkannt, da die Dreiecke kongruent sind. Die Höhe auf der Seite TT^* Ist folglich parallel zum Lot. Der Fokus berechnet sich daher mittels der parallelverschobenen Normalen (Lot) durch N. Folglich ist $n_1(x) = -\frac{1}{2ax_0}\left(x - \frac{1}{2}x_0\right)$. Sie schneidet die zweite Achse in $n_1(0) = -\frac{1}{2ax_0}\left(0 - \frac{1}{2}x_0\right) = \frac{1}{4a}$. Dies ist der Brennpunkt $B\left(0 \,|\, \frac{1}{4a}\right)$. Damit ist schon alles gezeigt.

Der Reflexionsstrahl wird beschrieben durch

$$r(x) = \frac{ax_0^2 - \frac{1}{4a}}{x_0}x + \frac{1}{4a} = \frac{4a^2x_0^2 - 1}{4ax_0}x + \frac{1}{4a} = \frac{1}{4a}\left[\left(4a^2x_0^2 - 1\right)\frac{x}{x_0} + 1\right]$$

oder durch

$$r(x) = \frac{ax_0^2 - \frac{1}{4a}}{x_0}\left(x - x_0\right) + ax_0^2 = \frac{4a^2x_0^2 - 1}{4ax_0}\left(x - x_0\right) + ax_0^2.$$

Setzen wir $r(x) = y$, so folgt auch $4ax_0\left(y - ax_0^2\right) - \left(4a^2x_0^2 - 1\right)\left(x - x_0\right) = 0$.