Die Exponentialfunktion

Definition

Es sei a eine positive reelle Zahl, $a \in \mathbb{R}_+$, $a \neq 1$. Eine Funktion

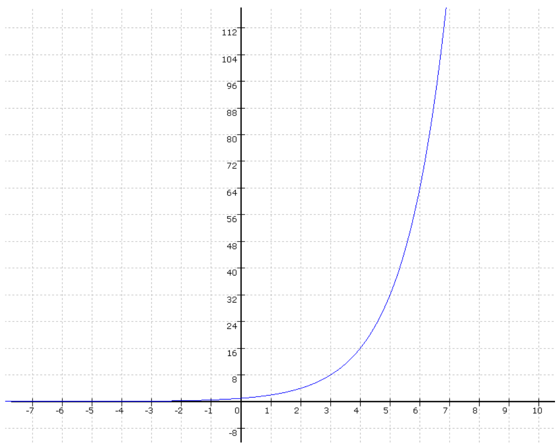
$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto a^x \end{cases}$$

heißt **Exponentialfunktion**. Die positive reelle Zahl a heißt **Basis** und die reele Zahl $x \in \mathbb{R}$ **Exponent** der Funktion f. Manchmal heißt a auch **Wachstumsfaktor**.

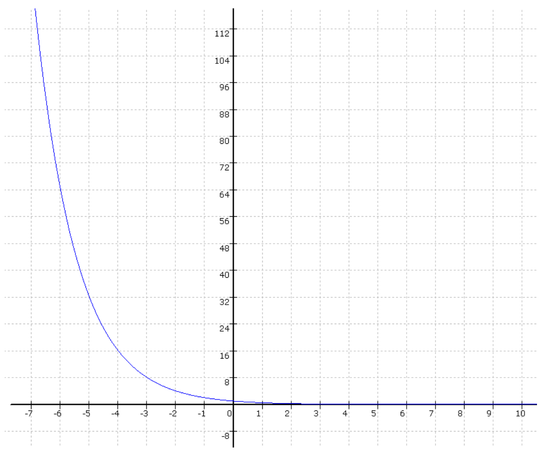
Bemerkung

Wegen $f(0) = a^0 = 1$ für alle $a \in \mathbb{R}_+$, ist $(0|1)$ ein Punkt im Koordinatensystem jeder Exponentialfunktion. Die Zahl $a \in \mathbb{R}_+$ für eine fest gewählte Exponentialfunktion ergibt sich aus $f(1) = a^1 = a$.

Beispiele



$f(x) = 2^x$



$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Dies sind typische Beispiele zweier Exponentialfunktionen. Während die Funktion f über alle Maßen wächst (sie wird immer größer), fällt g strikt (sie wird immer kleiner). Insbesondere ist $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Mathematiker sagen: f **steigt streng monoton und** g **fällt streng monoton. D. h.: Für** $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ **gilt**

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \qquad \textbf{und} \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2).$$

Sind x und y reelle Zahlen und ist $a, b \in \mathbb{R}_+$, so gilt

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \text{ und } \left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y} \text{ sowie } a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x.$$

Dies verallgemeinert die Potenzgesetze

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \text{ und } \left(a^r\right)^s = a^{r\cdot s}$$

für alle rationalen Zahlen $r,s \in \mathbb{Q}$.

In fast allen Anwendungen ist jedoch $f(0) \neq 1$.

Definition

Es seien $a \in \mathbb{R}_+,\ a \neq 1,\ c_0 \in \mathbb{R}$. Eine Funktion

$$f:\begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto c_0 \cdot a^x \end{cases}$$

heißt **Exponentialfunktion** mit **Anfangswert** $f(0) = c_0$.

Bemerkung

Für eine Exponentialfunktion mit Anfangswert $f(0) = c_0$ ist $\left(0 \mid c_0\right)$ ein Punkt im Koordinatensystem. Ist $f(1)$ bekannt, so auch a, da $f(1) = c_0 \cdot a^1 = c_0 \cdot a$. Natürlich kann die Funktion auch durch zwei verschiedene Funktionswerte oder Punkte bestimmt werden.

Beispiel 1

Bestimme die zu den Funktionswerten $f(2) = 8$ und $f(5) = 128$ die zugehörige Exponentialfunktion mit Anfangswert.

Lösung

Aus $f(2) = 8$ folgt $8 = f(2) = c_0 \cdot a^2 \Leftrightarrow 8 = c_0 \cdot a^2$.

Entsprechend folgt aus $f(5) = 128$ die Gleichung $128 = f(5) = c_0 \cdot a^5 \Leftrightarrow 128 = c_0 \cdot a^5$.

Dividieren der zweiten Gleichung durch die erste liefert

$$\frac{128}{8} = \frac{c_0 \cdot a^5}{c_0 \cdot a^2} = \frac{a^5}{a^2} = a^3 \Leftrightarrow a^3 = 16 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}.$$

In die erste Gleichung einsetzen bringt

$$8 = c_0 \cdot a^2 = c_0 \cdot \left(2\sqrt[3]{2}\right)^2 = c_0 \cdot 4\sqrt[3]{4} \Leftrightarrow c_0 = \frac{8}{4\sqrt[3]{4}} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2}} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{2} = \sqrt[3]{2}.$$

Die Funktionsgleichung lautet folglich

$$f(x) = c_0 \cdot a^x = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\sqrt[3]{16}\right)^x = \sqrt[3]{2} \cdot \left(16^{\frac{1}{3}}\right)^x = \sqrt[3]{2} \cdot 16^{\frac{1}{3} \cdot x}.$$

Beispiel 2

Ein Sparvertrag wird mit einer Bank wie folgt abgeschlossen. Bei einer Anlage von $5\,000\,€$ über 5 Jahre erhält der Sparer jedes Jahr $3\,\%$ Zinsen. Dabei darf während der 5 Jahre kein Geld entnommen werden. Welches Kapital steht nach 5 Jahren im Buch?

Lösung

Zu Beginn der 5 Jahre ($5\,\mathrm{a}$) beträgt der Anfangswert (Anfangskapital oder Startkapital) $5\,000\,€$. Also ist $f(0) = c_0 = 5\,000\,€$. Dieser Anfangswert wird hier mit $c_0 = K_0$ und die Funktion mit $K(t)$ für die Zeit t bezeichnet. Da sich das Kapital K_0 nach einem Jahr auf $K_0 \cdot 1,03$ „vermehrt" hat, ist $a = 1,03$. Die Exponentialfunktion K mit Startkapital K_0 lautet

$$K(t) = K_0 \cdot (1 + p\%)^{\frac{t}{\mathrm{a}}} = 5\,000\,€ \cdot 1,03^{\frac{t}{\mathrm{a}}}.$$

Das Kapital nach 5 Jahren kann jetzt leicht mit $t = 5\,\mathrm{a}$ berechnet werden.

$$K(5\,\mathrm{a}) = 5\,000\,€ \cdot 1,03^5 = 5796,37\,€$$

Auf die Einheit des Exponenten darf verzichtet werden, wenn sie absolut eindeutig ist.

Beispiel 3

Radioaktives Jod ^{131}I besitzt eine Halbwertszeit von ungefähr 8 Tagen. Zur Behandlung von Schilddrüsenerkrankungen bekommt der Patient 2 mg radioaktives Jod gespritzt. Gesucht ist die Exponentialfunktion mit Anfangswert. Wie viel mg radioaktives Jod ist nach 100 Tagen noch im Körper vorhanden?

Lösung

Die Halbwertszeit gibt an, nach welcher Zeit noch die Hälfte der radioaktiven Masse vorhanden ist. Folglich beträgt die radioaktive Masse nach 8 Tagen 1 mg. Nach 16 Tagen noch 0,5 mg, … Der Anfangswert ist daher 2 mg. Er wird mit N_0 bezeichnet. Da nach 8 Tagen nur noch die Hälfte strahlt, muss $N_0 = 2\,\mathrm{mg}$ mit $\frac{1}{2}$ multipliziert werden. Nun wird jedoch t in Tagen gemessen, so dass für den Exponenten nur $\frac{t}{8\mathrm{d}}$ in Frage kommt. Damit lautet die Exponentialfunktion mit Anfangswert

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8\mathrm{d}}} = 2\,\mathrm{mg} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8\mathrm{d}}}.$$

Die Funktion kann noch umgeschrieben werden.

$$N(t) = 2\,\mathrm{mg} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{8}\cdot\frac{t}{\mathrm{d}}} = 2\,\mathrm{mg} \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{8}}\right)^{\frac{t}{\mathrm{d}}}$$

Nach 100 Tagen sind noch

$$N(100\,\mathrm{d}) = 2\,\mathrm{mg} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{8}\cdot\frac{100\mathrm{d}}{\mathrm{d}}} = 2\,\mathrm{mg} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12,5} = 3,45 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{mg} = 3,45 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{g} = 0,345\,\mu\mathrm{g}$$

radioaktives Jod im Körper vorhanden.

Definition

Es seien $a \in \mathbb{R}_+,\ a \neq 1,\ c_0, \lambda \in \mathbb{R}$. Eine Funktion

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto c_0 \cdot a^{\lambda x} \end{cases}$$

heißt **Exponentialfunktion** mit **Anfangswert** c_0 und **Normfaktor** λ.

Bemerkung

Den Normfaktor haben wir schon fleißig verwendet. In Beispiel 1 ist $\lambda = \frac{1}{3}$, in 2 ist $\lambda = \frac{1}{8}$. Praktisch kann der Normfaktor nur rational ***gemessen*** werden, so dass in den Anwendungen $\lambda \in \mathbb{Q}$ ist.

Vereinbarung

Im Folgenden sprechen wir nur noch von einer Exponentialfunktion, wenn aus dem Zusammenhang der Anfangswert und der Normfaktor hervorgeht.

Beispiel 4

Die Veranschaulichung einer Exponentialfunktion zur Basis $a = 3$ verläuft durch die Punkte $(-3|2,5)$ und $(2|0,5)$. Bestimme den Anfangswert, den Normfaktor und die Funktionsgleichung.

Lösung

Mit $a = 3$ folgen aus $f(x) = c_0 \cdot 3^{\lambda x}$ die Gleichungen

$$2{,}5 = f(-3) = c_0 \cdot 3^{\lambda(-3)} \Leftrightarrow 2{,}5 = c_0 \cdot 3^{-3\lambda} \text{ und } 0{,}5 = f(2) = c_0 \cdot 3^{\lambda(2)} \Leftrightarrow 0{,}5 = c_0 \cdot 3^{2\lambda}.$$

Dividieren der zweiten Gleichung durch die erste liefert

$$\frac{0{,}5}{2{,}5} = \frac{c_0 \cdot 3^{2\lambda}}{c_0 \cdot 3^{-3\lambda}} = \frac{3^{2\lambda}}{3^{-3\lambda}} = 3^{5\lambda} \Leftrightarrow \frac{1}{5} = 3^{5\lambda} \Leftrightarrow 0{,}2 = 243^{\lambda}.$$

Nun wissen wir, dass für $\lambda \geq 0$ auch $243^{\lambda} \geq 1$ ist. λ muss folglich negativ sein. Nun kann z.B. durch Intervallschachtelung λ bestimmt werden. Dazu berechnen wir $243^{-1} = 0{,}00411...$ Wir sind noch weit von 0,2 entfernt, also nehmen wir die Hälfte. $243^{-0{,}5} = 0{,}06415...$ und wieder $243^{-0{,}25} = 0{,}2532...$ Jetzt liegt 0,2 zwischen den beiden Zahlen. $243^{-0{,}3} = 0{,}1924...$, $243^{-0{,}29} = 0{,}2033...$ Bleiben wir genau in der Mitte, also $243^{-0{,}295} = 0{,}1978...$ Wieder die Mitte liefert $243^{-0{,}2925} = 0{,}20054...$ Fahren wir so weiter fort, so finden wir $\lambda = -0{,}2929947041$. Mit Hilfe der Intervallschachtelung kann λ auf beliebig viele Stellen hinter dem Komma bestimmt werden. Selbstverständlich wird dazu eine Tabelle angelegt.

Der Normfaktor beträgt $\lambda = -0,2929947041$.

Mit eine der beiden Gleichungen wird c_0 bestimmt. Aus $2,5 = c_0 \cdot 3^{-3\lambda} = c_0 \cdot 3^{0,8789841124}$ folgt $c_0 = 0,9518269694$.

Der Anfangswert lautet $c_0 = 0,9518269694$.

Jetzt ist die Funktionsgleichung eindeutig bestimmt. Sie lautet $f(x) = c_0 \cdot 3^{\lambda x}$, wobei $c_0 = 0,9518269694$ und $\lambda = -0,2929947041$. Oder $f(x) = 0,9518269694 \cdot 3^{-0,2929947041x}$.

Wir werden bald ein einfaches Verfahren kennen lernen, um λ zu bestimmen. Dazu benötigen wir aber einen Logarithmus.

Damit du nicht so lange warten musst, gebe ich dir das Ergebnis bekannt.

Es sei $\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion der Exponentialunktion $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $\exp_a(x) := a^x$. Hier bezeichnen wir sie zum besseren Verständnis. Dann gilt

$$\log_a\left(\exp_a(x)\right) = x,\ x \in \mathbb{R} \text{ und } \exp_a\left(\log_a(x)\right) = x,\ x \in \mathbb{R}_+.$$

Nun erhalten wir aus $0,2 = 243^{\lambda}$ die Gleichung $\log_{243}(0,2) = \log_{243}\left(243^{\lambda}\right) = \lambda$. Der Taschenrechner zeigt sofort die Zahl $\lambda = -0,2929947041$ an.

Letzte Bemerkung

Beweise, dass $\log_{243}(0,2) = \dfrac{\log_a(0,2)}{\log_a(243)}$ oder allgemeiner $\log_a(b)\log_b(x) = \log_a(x)$ für alle reellen Zahlen $a,\ b,\ x$ gilt.