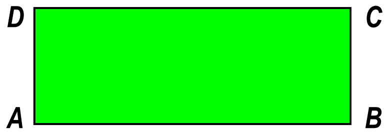
Allgemeine Volumenberechnung

Wir suchen eine einfache Möglichkeit ein Volumen zu berechnen. Dazu wollen wir eine erste Idee anhand einer Flächenberechnung gewinnen.

1. *Die Flächenberechnung eines Parallelogramms*

Starten wir mit einem Rechteck. Erinnern wir uns. Messen heißt eine reelle Zahl zuordnen.



Die Formel für den Flächeninhalt ist durch $F(\overline{AB};\overline{AD}) = \ell(\overline{AB})\cdot\ell(\overline{AD})$ gegeben.

Eine Flächenfunktion erfüllt vier wichtige Eigenschaften.

1. Der Flächeninhalt des Einheitsquadrates beträgt 1 FE.
2. Wird die Strecke $\overline{AB}$ um das x-fache, x > 0, verändert, so verändert sich auch der Flächeninhalt um das x-fache. Es gilt folglich $F(x\cdot\overline{AB};\overline{AD}) = x\cdot F(\overline{AB};\overline{AD})$. Entsprechend gilt $F(\overline{AB};y\cdot\overline{AD}) = y\cdot F(\overline{AB};\overline{AD})$ für die Strecke $\overline{AD}$.
3. Wird das Rechteck zu einem Parallelogramm geschert, d. h. die Höhe verändert sich nicht, so verändert sich der Flächeninhalt des Rechtecks nicht.

$$F(\overline{AB};\overline{AD'}) = F(\overline{AB};\overline{AD})$$

4. Der Flächeninhalt einer Strecke ist null.

$$F(\overline{AB};\overline{AB}) = 0$$

Um diese Formel auf Vektoren zu übertragen, müssen die Längen der Strecken durch die Längen der Vektoren ersetzt werden. Außerdem suchen wir eine Flächenfunktion Φ, die uns den Flächeninhalt ohne große Mühe berechnet.

Welche Eigenschaften muss nun die Flächenfunktion *Φ* besitzen?

Übertragen wir zuerst einmal die obigen vier Eigenschaften.

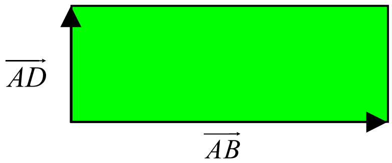
1. **Eigenschaft:**

   $F(\vec{AB};\vec{AD}) = 1$, wenn $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1$; $\overrightarrow{AD} = \vec{e}_2$ die Einheitsvektoren des R^2 sind.

2. **Eigenschaft:**

   a) Wird der Vektor $\overrightarrow{AB}$ verkürzt oder verlängert, so verändert sich der Flächeninhalt um diesen Faktor. Also $\Phi(x\cdot\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) = x\cdot\Phi(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$.

   b) Wird der Vektor $\overrightarrow{AD}$ verkürzt oder verlängert, so verändert sich der Flächeninhalt um diesen Faktor. Also $\Phi(\overrightarrow{AB};y\cdot\overrightarrow{AD}) = y\cdot\Phi(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$.

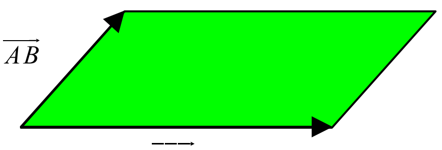


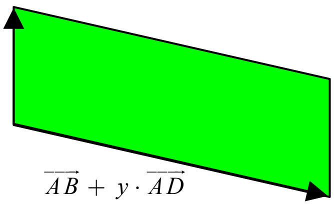
3. **Eigenschaft**

Der Flächeninhalt einer Länge ist null. Also $\Phi(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AB})=0$ für jeden Vektor.

4. **Eigenschaft:**

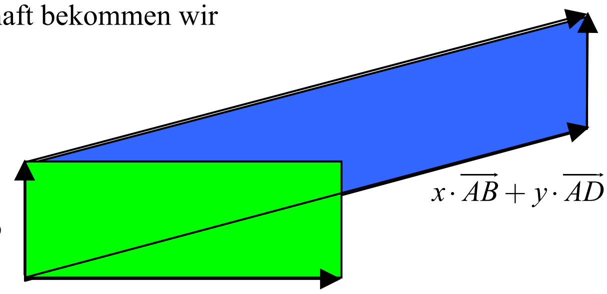
Wird das Rechteck zu einem Parallelogramm geschert, so verändert sich der Flächeninhalt nicht, da sich die Höhe nicht ändert.





Also $\Phi(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}+x\cdot\overrightarrow{AB})=\Phi(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$ und $\Phi(\overrightarrow{AB}+y\cdot\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AD})=\Phi(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$.

Aus der 2. und 4. Eigenschaft bekommen wir



$$\Phi(x\cdot\overrightarrow{AB}+y\cdot\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AD})=x\cdot\Phi(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})+y\cdot\Phi(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AD})$$

und damit

$$\begin{aligned}
\Phi(x\cdot\overrightarrow{AB}+y\cdot\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}) &= \Phi(x\cdot\overrightarrow{AB}+y\cdot(u\cdot\overrightarrow{AB}+v\cdot\overrightarrow{AD});\overrightarrow{AD})\\
&= \Phi(x\cdot\overrightarrow{AB}+y\cdot u\cdot\overrightarrow{AB}+y\cdot v\cdot\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AD})\\
&= \Phi((x+y\cdot u)\cdot\overrightarrow{AB}+y\cdot v\cdot\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AD})\\
&= (x+y\cdot u)\cdot\Phi(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})+y\cdot v\cdot\Phi(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AD})\\
&= x\cdot\Phi(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})+y\cdot u\cdot\Phi(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})+y\cdot v\cdot\Phi(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AD})\\
&= x\cdot\Phi(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})+y\cdot(u\cdot\Phi(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})+v\cdot\Phi(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AD}))\\
&= x\cdot\Phi(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})+y\cdot(\Phi(u\cdot\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})+\Phi(v\cdot\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AD}))\\
&= x\cdot\Phi(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})+y\cdot\Phi(u\cdot\overrightarrow{AB}+v\cdot\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AD})\\
&= x\cdot\Phi(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})+y\cdot\Phi(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD})
\end{aligned}$$

Anhand dieser definierenden Eigenschaft, sind wir in der Lage, die Flächenfunktion eindeutig zu definieren.

Definition 1:

Eine Zuordnung $\Phi: R^2 \times R^2 \to R$, die je zwei Vektoren eine reelle Zahl zuordnet, heißt Flächenfunktion, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

1. $\Phi(x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}; \vec{c}) = x \cdot \Phi(\vec{a}; \vec{c}) + y \cdot \Phi(\vec{b}; \vec{c}).$
2. $\Phi(\vec{a}; z \cdot \vec{c} + u \cdot \vec{d}) = z \cdot \Phi(\vec{a}; \vec{c}) + u \cdot \Phi(\vec{a}; \vec{d}).$
3. $\Phi(\vec{a}; \vec{a}) = 0.$
4. $\Phi(\vec{e_1}; \vec{e_2}) = 1$ für $\left\|\vec{e_1}\right\| = \left\|\vec{e_2}\right\| = 1$ und $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}.$

für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{d} \in \mathbf{R}^2$. sowie alle reellen Zahlen $x, y, z, u \in \mathbf{R}$. Die 4. Eigenschaft $\Phi(\overrightarrow{\boldsymbol{e}_1}; \overrightarrow{\boldsymbol{e}_2}) = 1$ für je zwei orthonormale Vektoren ist die Normierung auf das Einheitsquadrat.

Definition 1a:

Eine Abbildung $\Phi: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ heißt ***alternierende Bilinearform***, wenn sie die Eigenschaften 1. bis 3. besitzt.
Eine alternierende Bilinearform Φ heißt ***Flächenfunktion***, wenn sie die 4. Eigenschaft erfüllt.
Aus der 3. Eigenschaft lässt sich eine wichtige Folgerung ableiten.

Folgerung:

Es sei Φ eine alternierende Bilinearform. Dann gilt für je zwei Vektoren $\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}} \in \boldsymbol{R}^2$:

$$5.\ \Phi(\vec{x}; \vec{y}) = -\Phi(\vec{y}; \vec{x}).$$

Dies folgt sofort aus der 3. Eigenschaft, denn

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi(\vec{x} + \vec{y}; \vec{x} + \vec{y}) \\ &= \Phi(\vec{x}; \vec{x}) + \Phi(\vec{x}; \vec{y}) + \Phi(\vec{y}; \vec{x}) + \Phi(\vec{y}; \vec{y}) \\ &= \Phi(\vec{x}; \vec{y}) + \Phi(\vec{y}; \vec{x}). \end{aligned}$$

Aufgabe:

Gegeben ist ein Parallelogramm, dass durch die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ aufgespannt ist. Berechnen Sie den Flächeninhalt.

Lösung:

Der Flächeninhalt des Parallelogramms berechnet sich mittels Φ zu

$$\Phi(\vec{a}; \vec{b}) = \Phi(2\vec{e_1} - 3\vec{e_2}; -\vec{e_1} + 4\vec{e_2}) = 8 \cdot \Phi(\vec{e_1}; \vec{e_2}) + 3 \cdot \Phi(\vec{e_2}; \vec{e_1}) = (8-3)\Phi(\vec{e_1}; \vec{e_2}) = 5.$$

Der absolute Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt 5 FE.

1. Aufgabe:

In einem Koordinatensystem ist ein Parallelogramm durch die Punkte $O(0|0), A(3|-4), B(-2|5)$ gegeben.

a) Zeichnen Sie ein geeignetes Koordinatensystem und skizzieren Sie das Parallelogramm. Wie lauten die noch fehlenden Koordinaten des fehlenden Punktes C?
b) Berechnen Sie elementargeometrisch den Flächeninhalt.
c) Bestätigen Sie das Ergebnis mittels linearer Geometrie, d. h. mit Hilfe des Skalarproduktes zweier Vektoren.
d) Bestätigen Sie das Ergebnis mittels der Flächenfunktion Φ durch Nachrechnen.

2. Aufgabe:

Führen Sie die Scherungen für das obige Parallelogramm so durch, dass ein Rechteck entsteht, das zwei Seiten auf den Koordinatenachsen liegen hat.

3. Aufgabe:

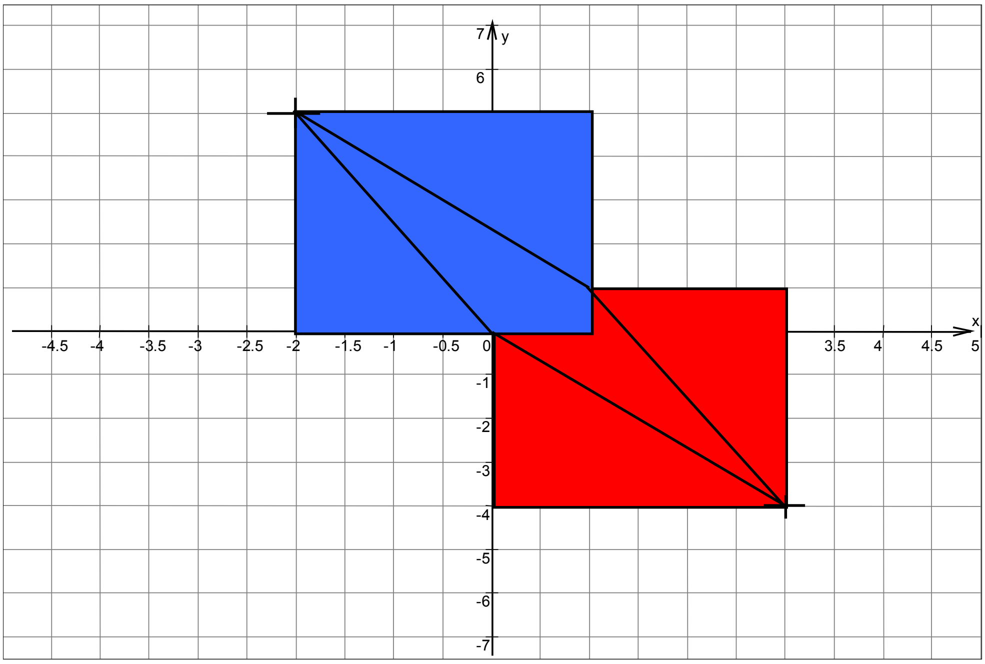
Weisen Sie nach, dass sich die Länge eines Vektors $\vec{a}$ durch $\Phi(\vec{a};\vec{a}^{\perp}) = \|\vec{a}\|^2$ berechnen lässt.

Beachten Sie dabei, dass $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\perp} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ ist.

Lösung zur 1. Aufgabe

a) Um die fehlenden Koordinaten des Punktes C zu berechnen, verschieben wir die Strecke $\overline{OA}$ in den Punkt $B(-2\,|\,5)$. Dabei wird die Strecke um -3 nach links und um 5 nach oben verschoben. Der Punkt A geht dabei in C über. Folglich hat der Punkt C die Koordinaten $C(3-2\,|\,-4+5) = C(1\,|\,1)$.

b)



Hier gibt es mehrere Möglichkeiten, den Flächeninhalt elementargeometrisch zu berechnen.
Zuerst berechne ich den Flächeninhalt des blauen Rechtecks: Es beträgt 15 FE. Das unterhalb des Parallelogramms gelegene Dreieck muss wieder abgezogen werden. Es hat einen Flächeninhalt von 5 FE. Außerdem ist der Flächeninhalt des oberhalb gelegenen Dreiecks abzuziehen. Dieser Flächeninhalt beträgt 6 FE. Es verbleiben 4 FE innerhalb.
Entsprechend verfahre ich mit dem roten Rechteck. Es besitzt einen Flächeninhalt von 15 FE. Wieder sind die beiden Flächeninhalte der außen gelegenen Dreiecke abzuziehen. Sie betragen 6 FE (unterhalb) und 5 FE. Innerhalb verbleiben also 4 FE.
Der aufmerksame Beobachter bemerkt natürlich, dass die sich überlappenden Flächen doppelt gerechnet wurde. Sie beträgt 1 FE. Dieser Flächeninhalt ist von der roten Fläche noch abzuziehen.
Damit erhalten wir 4 FE + 4 FE − 1 FE = 7 FE.

Der Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt 7 FE.

c) Wir führen Vektoren ein. Das Parallelogramm wird von den Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ aufgespannt. Wir berechnen $\sigma(\vec{b};\vec{a}) = -26$ und $\sigma(\vec{a};\vec{a}) = 25$. Mit der Formel

Aus $\vec{a}^{\perp}(\vec{b}) = \vec{b} - \frac{\sigma(\vec{b};\vec{a})}{\sigma(\vec{a};\vec{a})}\vec{a}$ folgt $\vec{a}^{\perp}(\vec{b}) = \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix} - \frac{-26}{25}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{25}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}28\\21\end{pmatrix} = \frac{7}{25}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$. Für die Länge erhalten wir nun $\left\|\vec{a}^{\perp}(\vec{b})\right\| = \frac{7}{5}$. Da $\left\|\vec{a}\right\| = 5$ ist, folgt für den Flächeninhalt $F(\vec{a};\vec{b}) = \left\|\vec{a}^{\perp}(\vec{b})\right\| \cdot \left\|\vec{a}\right\| = \frac{7}{5} \cdot 5 = 7$. **Der Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt 7 FE.**

d) Mit Hilfe der Flächenfunktion Φ erhalten wir

$$\Phi(\vec{a};\vec{b}) = \Phi(3\cdot\vec{e_1} - 4\cdot\vec{e_2}; -2\cdot\vec{e_1} + 5\cdot\vec{e_2}) = 15\cdot\Phi(\vec{e_1};\vec{e_2}) + 8\cdot\Phi(\vec{e_2};\vec{e_1}) = 7\cdot\Phi(\vec{e_1};\vec{e_2}) = 7 .$$

Der Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt 7 FE.

Lösung zur 2. Aufgabe

Zu dieser Aufgabe sind wieder mehrere Lösungsmöglichkeiten gegeben.

a) Zwei Scherungen

Die **erste Scherung** schiebt die Strecke $\overline{AC}$ entlang der Geraden AC, so dass der Punkt A auf der ersten Achse zu liegen kommt. Der neue Punkt A' hat die Koordinaten $A'(1,4\,|\,0)$. Der Leser weise dies nach! Der neue Punkt C' besitzt die Koordinaten $C'(-0,6\,|\,5)$.

Die **zweite Scherung** schiebt die Strecke $\overline{BC'}$ entlang der Geraden BC', so dass der Punkt B auf der 2. Achse zu liegen kommt. Der neue Punkt B' besitzt die Koordinaten $B'(0\,|\,5)$. Das zu einem Rechteck gescherte Parallelogramm besitzt nun die Punkte $O(0\,|\,0), A'(1,4\,|\,0), B'(0\,|\,5)$ und $C''(1,4\,|\,5)$. Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt offensichtlich 7 FE. Da Scherungen den Flächeninhalt nicht verändern, erhalten wir unser altes Ergebnis.

Der Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt 7 FE.

Verschieben wir zuerst den Punkt A in den Punkt C, danach den Punkt B auf die 2. Achse und zu guter Letzt den Punkt $A'(1\,|\,1)$ auf die 1. Achse, so entsteht das Rechteck mit den Punkten $O(0\,|\,0), A''(1\,|\,0), B'(0\,|\,7)$ und $C'''(1\,|\,7)$.

Lösung zur 3. Aufgabe

Rechnen Sie einfach nach!

Bemerkungen:

Der Vergleich aller Verfahren zur Berechnung des Flächeninhaltes zeigt den eindeutigen Vorteil der Flächenfunktion. Wir werden später in höherdimensionalen Räumen auch eine Formel mittels Skalarprodukt für Flächen- und Volumenberechnung bereitstellen.

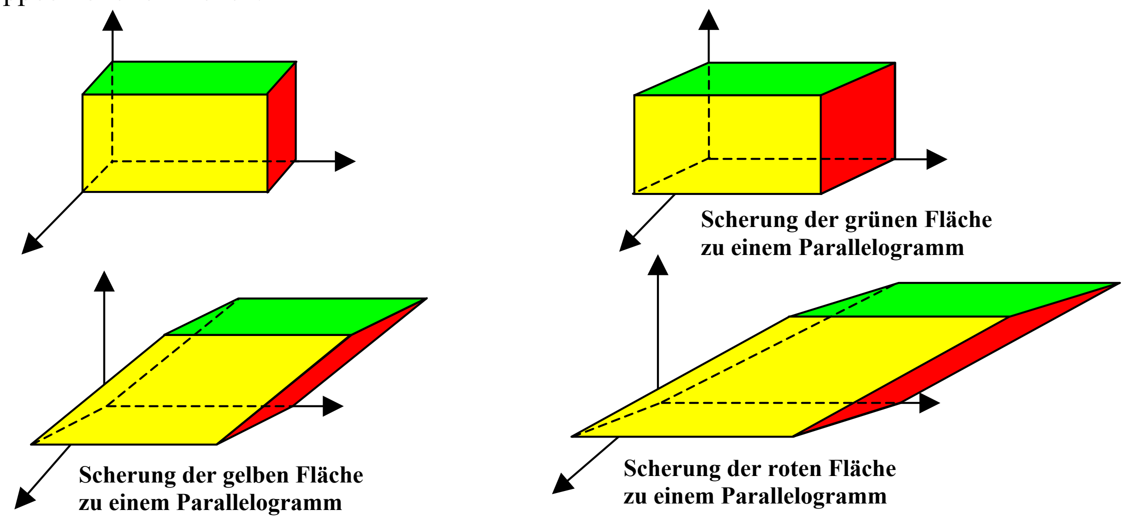
Diese Eigenschaften können auch in der Sekundarstufe I eingeführt und überprüft werden. Statt Vektoren werden hier Strecken betrachtet. Die Einheitsstrecken auf den Achsen werden dann mit E_1 und E_2 bezeichnet. Das Steigungsdreieck wird durch die Differenzkoordinaten als Punkt im Koordinatensystem gedeutet. Zwei Geraden sind genau dann parallel, wenn die Referenzkoordinaten auf einer Ursprungsgeraden liegen. Jetzt können auch Scherungen berechnet werden. Der Übergang zu Vektoren ist dann sehr einfach.

2. Die Volumenberechnung eines Parallelepipeds[1]

Auch hier beginnen wir wieder mit einem elementaren Beispiel. Die Erkenntnisse aus der Flächenberechnung wollen wir jedoch von Anfang an einbauen. Zuerst wollen wir uns jedoch noch

[1] Parallelepiped = Parallelflach = Spat

einmal Scherungen im dreidimensionalem Raum veranschaulichen. Geschert werden immer oppositionelle Flächen.



Bei diesen drei hintereinander ausgeführten Scherungen ändert sich das Volumen nicht, da je eine Grundfläche unverändert bleibt und die gegenüberliegende Fläche, bei unveränderter Höhe, geschoben wird. Natürlich ist die Reihenfolge der Scherungen beliebig.

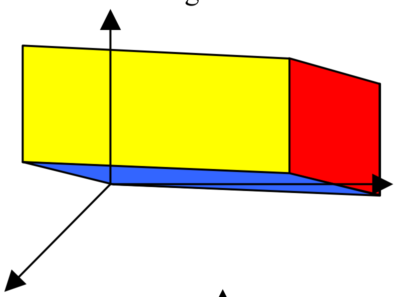
1. Aufgabe:

Formuliere die drei Scherungen in der Volumenfunktion $V(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$. Beachten Sie außerdem, dass die Scherungen natürlich in oppositionellen Flächen stattfinden.
Hinweis: Für die Scherung der grünen Fläche gilt $V(\vec{a}+x\cdot\vec{b},\vec{b},\vec{c})=V(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

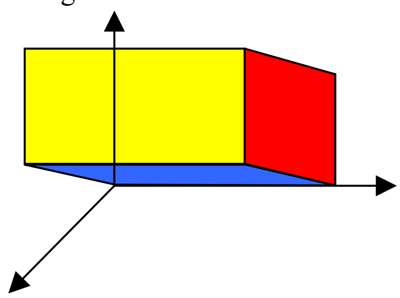
2. Aufgabe:

Welche Scherungen verbergen sich hinter den folgenden Parallelepipeds? Beschreiben Sie die einzelnen Scherungen als Hintereinanderausführungen, beim Quader beginnend.

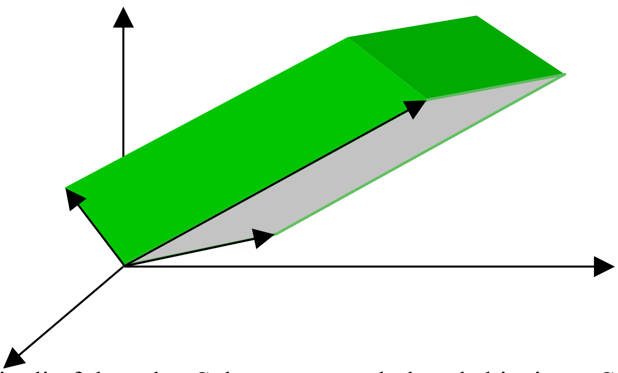
a)



b)



c)



3. Aufgabe:

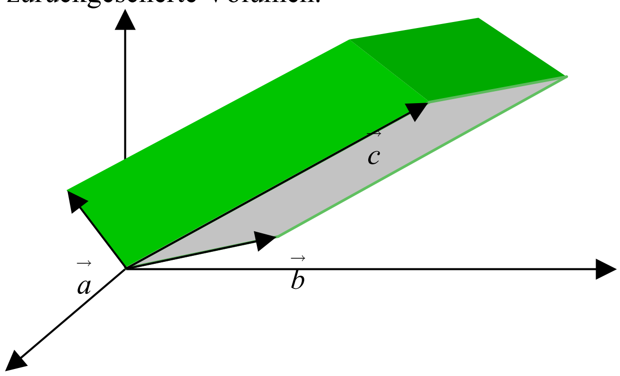
Formulieren Sie die folgenden Scherungen verbal und skizzieren Sie die gescherten Parallelepipeds.

a) $V(\vec{a},\vec{b}+x\cdot\vec{a},\vec{c})$ b) $V(\vec{a}+y\cdot\vec{b},\vec{b}+z\cdot\vec{c},\vec{c}+u\cdot(\vec{a}+y\cdot\vec{b}))$

Die Volumenberechnung mittels Skalarprodukt

Um die Vereinfachung zu verdeutlichen, die eine allgemeine Volumenfunktion mit sich bringt, wollen wir zuerst einmal mittels elementarer Vektorrechnung, d.h. mit Hilfe des Skalarproduktes das Volumen berechnen.

Das Volumen berechnet sich aus dem Produkt des Flächeninhaltes einer der Grundflächen und der Länge der Höhe darauf. Hierbei ist zu beachten, dass die Höhe senkrecht zur Grundfläche gemessen wird. Außerdem wissen wir bereits, dass Scherungen das Volumen nicht verändern. Wir berechnen ja auch das zum Quader zurückgescherte Volumen.



Wie groß ist das von den Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-6\\1\\-2\end{pmatrix}$ und $\vec{\mathbf{c}}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ aufgespannte Volumen des Parallelepipeds?

Verwenden wir zur Berechnung erst einmal die vektorielle Geometrie mit Hilfe des Skalarproduktes und vergleichen diese mit der Berechnung mittels der Volumenform.

Sei also $\sigma(\vec{a};\vec{b})$ das gewöhnliche Skalarprodukt im $\mathbf{R}^3$ und $\pi_{\vec{x}}(\vec{y}):=\frac{\sigma(\vec{x};\vec{y})}{\sigma(\vec{x};\vec{x})}\vec{x}$ die **Projektion** des Vektors $\vec{y}$ auf den Vektor $\vec{x}$. Die reelle Zahl $\frac{\sigma(\vec{x};\vec{y})}{\sigma(\vec{x};\vec{x})}$ heißt auch der **Scherungsfaktor** des von $\vec{y}$ und $\vec{x}$ aufgespannten Parallelogramms.

Aus der elementaren Geometrie ist bekannt, dass sich das Volumen mittels der Formel $V=G\cdot h$ berechnet. Hierbei ist G der Flächeninhalt einer der Grundflächen (Parallelogramme) und h die Höhe der schiefen Säule. Um den Flächeninhalt des Parallelogramms zu berechnen, beachte man, dass das Parallelogramm ein geschertes flächengleiches Rechteck ist. Daher muss der zu $\vec{a}$ senkrechte Vektor $\vec{a}_{\vec{b}}^{\perp}$ mit $\vec{b}=\vec{a}_{\vec{b}}^{\perp}+\frac{\sigma(\vec{a};\vec{b})}{\sigma(\vec{a};\vec{a})}\vec{a}$ berechnet werden.

Berechnen wir den Scherungsfaktor, den senkrechten Vektor und dessen Länge.

$$\frac{\sigma(\vec{a};\vec{b})}{\sigma(\vec{a};\vec{a})}=-\frac{11}{35}\Rightarrow \vec{a}_{\vec{b}}^{\perp}=\vec{b}-\frac{11}{35}\vec{a}=\frac{1}{35}\begin{pmatrix}-177\\90\\-81\end{pmatrix}\Rightarrow \left\|\vec{a}_{\vec{b}}^{\perp}\right\|=\frac{1}{\sqrt{35}}\sqrt{1314}.$$

Folglich ist der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Flächeninhaltes $\|\vec{a}\|\cdot\left\|\vec{a}_{\vec{b}}^{\perp}\right\|=\sqrt{1314}$.

Als nächstes berechnen wir die Höhe des Parallelepipeds.

Dazu benötigen wir einen auf der Ebene $[\vec{a};\vec{b}]$ senkrecht stehenden Vektor $\vec{e}$. Nun gilt

$$[\vec{a};\vec{b}]=[\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-6\\1\\-2\end{pmatrix}]=[\begin{pmatrix}0\\11\\-4\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-12\\-9\\0\end{pmatrix}]\Rightarrow \vec{e}=\begin{pmatrix}-3\\4\\11\end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir die Projektion $\pi_{\vec{e}}(\vec{c}) = \frac{\sigma(\vec{c};\vec{e})}{\sigma(\vec{e};\vec{e})}\begin{pmatrix}-3\\4\\11\end{pmatrix} = \frac{4}{146}\begin{pmatrix}-3\\4\\11\end{pmatrix}$.

Das gesuchte Volumen kann nun berechnet werden. Es beträgt

$$V = \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{a}_{\vec{b}}^{\perp}\right\| \cdot \|\pi_{\vec{e}}(\vec{c})\| = \sqrt{1314} \cdot \tfrac{2}{73} \cdot \sqrt{146} = 12\,.$$

Die Volumenberechnung mittels Volumenfunktion

Das Volumen des von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds beträgt **12 VE**.

Verwenden wir nun die Volumenfunktion ***V***. Dazu übernehmen wir die Eigenschaften, die wir schon beim Parallelogramm erarbeitet haben.

1. Das Volumen einer Scherung verändert sich nicht.
2. Das Volumen eines Flächeninhaltes und einer Länge ist null.
3. Das Volumen dreier orthonormaler Vektoren (Würfel mit der Kantenlänge 1) ist **1 VE**.

Die Volumenfunktion *V* ist folglich diesmal eine alternierende 3-Linearform.

Fassen wir die Eigenschaften zusammen:

1. $\Phi(x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}+z\cdot\vec{c};\vec{d};\vec{e}) = x\cdot\Phi(\vec{a};\vec{d};\vec{e}) + y\cdot\Phi(\vec{b};\vec{d};\vec{e}) + z\cdot\Phi(\vec{c};\vec{d};\vec{e})$.
   $\Phi(\vec{a};x\cdot\vec{b}+y\cdot\vec{c}+z\cdot\vec{d};\vec{e}) = x\cdot\Phi(\vec{a};\vec{b};\vec{e}) + y\cdot\Phi(\vec{a};\vec{c};\vec{e}) + z\cdot\Phi(\vec{a};\vec{d};\vec{e})$
   $\Phi(\vec{a};\vec{b};x\cdot\vec{c}+y\cdot\vec{d}+z\cdot\vec{e}) = x\cdot\Phi(\vec{a};\vec{b};\vec{c}) + y\cdot\Phi(\vec{a};\vec{b};\vec{d}) + z\cdot\Phi(\vec{a};\vec{b};\vec{e})$
2. $\Phi(\vec{a};\vec{a};\vec{b}) = \Phi(\vec{a};\vec{b};\vec{a}) = \Phi(\vec{b};\vec{a};\vec{a}) = 0$.
3. $\Phi(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3}) = 1$ für $\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = \|\vec{e_3}\| = 1$ und $\vec{e_1}\perp\vec{e_2},\ \vec{e_1}\perp\vec{e_3},\ \vec{e_2}\perp\vec{e_3}$.
4. $\Phi(\vec{b};\vec{a};\vec{c}) = -\Phi(\vec{a};\vec{b};\vec{c}),\quad \Phi(\vec{c};\vec{b};\vec{a}) = -\Phi(\vec{a};\vec{b};\vec{c}),\quad \Phi(\vec{a};\vec{c};\vec{b}) = -\Phi(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$

Definition 2:

Eine Funktion $\Phi:\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ heißt **alternierende 3-Linearform,** wenn Φ die Bedingungen 1. und 2. erfüllt. Φ heißt Volumenfunktion, wenn Φ außerdem die Bedingung 3. erfüllt. Die Bedingung 4. ist eine Folgerung aus den Bedingungen 1. und 2.

Die drei Vektoren $\vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{e_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ heißen Einheitsvektoren des Koordinatensystems.

Berechnen wir nun das Volumen mittels der Volumenfunktion.

Wie groß ist das von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{b} = \begin{pmatrix}-6\\1\\-2\end{pmatrix},\quad \vec{c} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ aufgespannte Volumen des Parallelepipeds?

Dazu schreiben wir $\vec{a} = 3\vec{e_1}+5\vec{e_2}-\vec{e_3}$, $\vec{b} = -6\vec{e_1}+\vec{e_2}-2\vec{e_3}$ und $\vec{c} = \vec{e_1}-\vec{e_2}+\vec{e_3}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
V(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) &= 3\cdot V(\vec{e_1},\vec{b},\vec{c}) + 5\cdot V(\vec{e_2},\vec{b},\vec{c}) - V(\vec{e_3},\vec{b},\vec{c})\\
&= 3\cdot V(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{c}) - 3\cdot 2\cdot V(\vec{e_1},\vec{e_3},\vec{c}) - 5\cdot 6\cdot V(\vec{e_2};\vec{e_1};\vec{c})\\
&\quad -5\cdot 2\cdot V(\vec{e_2};\vec{e_3};\vec{c}) - 1\cdot(-6)\cdot V(\vec{e_3},\vec{e_1},\vec{c}) - V(\vec{e_3},\vec{e_2},\vec{c})\\
&= 3\cdot V(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}) - 6\cdot V(\vec{e_1},\vec{e_3},\vec{e_2}) - 30\cdot V(\vec{e_2},\vec{e_1},\vec{e_3})\\
&\quad -10\cdot V(\vec{e_2},\vec{e_3},\vec{e_1}) + 6\cdot V(\vec{e_3},\vec{e_1},\vec{e_2}) - V(\vec{e_3},\vec{e_2},\vec{e_1})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 3\cdot V(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}) + 6\cdot V(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}) + 30\cdot V(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})\\
&\quad -10\cdot V(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}) - 6\cdot V(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}) + V(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})\\
&= (3-6+30-10-6+1)\cdot V(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})\\
&= 12\cdot V(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})\\
&= 12.
\end{aligned}
$$

Das Volumen stimmt folglich mit dem bereits bekannten Ergebnis überein.

An dieser Stelle möchte ich Ihnen einen kleinen Trick verraten, der den Rechenaufwand erheblich reduziert.
Wenn wir es schaffen, dass möglichst viele Nullen in den Koordinatendarstellungen der Vektoren auftreten, so vereinfacht sich der Rechenaufwand.

Dazu betrachten wir statt der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3\\ 5\\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6\\ 1\\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1 \end{pmatrix}$ die Vektoren

$\vec{a} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 4\\ 4\\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} -5\\ 0\\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} - 3\vec{c} = \begin{pmatrix} 0\\ 8\\ -4 \end{pmatrix}$.

Jetzt erhalten wir

$$
\begin{aligned}
V(\vec{a}+\vec{c},\vec{b}+\vec{c},\vec{a}-3\,\vec{c}) &= -3\cdot V(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) + V(\vec{c},\vec{b},\vec{a})\\
&= -3\cdot V(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) - V(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\\
&= -4\cdot V(\vec{a},\vec{b},\vec{c}).
\end{aligned}
$$

Rechnen wir mit den neuen Vektoren das Volumen aus, so wird

$$
\begin{aligned}
-4\cdot V(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) &= V(\vec{a}+\vec{c},\vec{b}+\vec{c},\vec{a}-3\,\vec{c})\\
&= V(4\vec{e_1}+4\vec{e_2}, -5\vec{e_1}-\vec{e_3}, 8\vec{e_2}-4\vec{e_3})\\
&= -32\cdot V(\vec{e_1},\vec{e_3},\vec{e_2}) + 80\cdot V(\vec{e_2},\vec{e_1},\vec{e_3})\\
&= (32-80)\cdot V(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})\\
&= -48.
\end{aligned}
$$

Folglich ist $V(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 12.$ Der Rechenaufwand ist somit erheblich geschrumpft.

3. Das vierdimensionale Volumen

In der ***Speziellen*** und ***Allgemeinen Relativitätstheorie*** benötigen wir ein 4-dimensionales (komplexes) Volumen bzgl. einer Metrik. Wie aber soll man sich einen 4-dimensionalen Quader vorstellen?
Dies geschieht über die Verallgemeinerung auf 4 Dimensionen.
Ein 4-dimensionaler Quader wird durch 4 paarweise aufeinander senkrecht stehender Vektoren beschrieben. Wenn wir dies so definieren, so sind auch die Scherungen festgelegt. Damit ist auch die allgemeine Volumenfunktion festgelegt.

Definition 3:

Eine Volumenfunktion V ist eine alternierende 4-Linearform auf einen 4-dimensionalen Vektorraum mit $V(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},\vec{e_4}) = 1$ für Vektoren $\left\|\vec{e_i}\right\| = 1$ und $\vec{e_i} \perp \vec{e_j}; i \neq j$.

Aufgabe:

Wie groß ist das von den folgenden Vektoren aufgespannte Volumen?

$$
\vec{a} = \begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 2\\ -4 \end{pmatrix},\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2\\ 1\\ 3\\ 5 \end{pmatrix},\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 7\\ -4\\ 1\\ -2 \end{pmatrix},\quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 6\\ 3\\ 1\\ -2 \end{pmatrix}
$$

Lösung:

Um möglichst viele Nullen zu bekommen, ersetzen wir die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{d}$ durch

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\0\\5\\1\end{pmatrix}, 2\cdot\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\-1\\7\\-3\end{pmatrix}, \vec{a}-2\cdot\vec{c}=\begin{pmatrix}-13\\7\\0\\0\end{pmatrix} \text{und } \vec{c}-\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\-7\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Ersetzen wir noch

$$\vec{a}-2\cdot\vec{c} \text{ durch } \vec{a}-2\cdot\vec{c}+\vec{c}-\vec{d}=\begin{pmatrix}-12\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned}V(\vec{a}+\vec{b};2\cdot\vec{a}+\vec{b};\vec{a}-\vec{c}-\vec{d};\vec{c}-\vec{d}) &= V(\vec{a};\vec{b};-\vec{c};-\vec{d})+V(\vec{a};\vec{b};-\vec{d};\vec{c})\\ &\quad +V(\vec{b};2\cdot\vec{a};-\vec{c};-\vec{d})+V(\vec{b};2\cdot\vec{a};-\vec{d};\vec{c})\\ &= V(\vec{a};\vec{b};\vec{c};\vec{d})+V(\vec{a};\vec{b};\vec{c};\vec{d})\\ &\quad -2\cdot V(\vec{a};\vec{b};\vec{c};\vec{d})-2\cdot V(\vec{a};\vec{b};\vec{c};\vec{d})\\ &= -2\cdot V(\vec{a};\vec{b};\vec{c};\vec{d})\end{aligned}$$

Hiermit berechnen wir:

$$\begin{aligned}-2\cdot V(\vec{a};\vec{b};\vec{c};\vec{d}) &= V(\vec{a}+\vec{b};2\cdot\vec{a}+\vec{b};\vec{a}-\vec{c}-\vec{d};\vec{c}-\vec{d})\\ &= V(-\vec{e_1}+5\cdot\vec{e_3}+\vec{e_4};-\vec{e_2}+7\cdot\vec{e_3}-3\cdot\vec{e_4};-12\cdot\vec{e_1};\vec{e_1}-7\cdot\vec{e_2})\\ &= V(5\cdot\vec{e_3};-3\cdot\vec{e_4};-12\cdot\vec{e_1};-7\cdot\vec{e_2})+V(\vec{e_4};7\cdot\vec{e_3};-12\cdot\vec{e_1};-7\cdot\vec{e_2})\\ &= 5\cdot(-3)\cdot(-12)\cdot(-7)\cdot V(\vec{e_3};\vec{e_4};\vec{e_1};\vec{e_2})+7\cdot(-12)\cdot(-7)\cdot V(\vec{e_4};\vec{e_3};\vec{e_1};\vec{e_2})\\ &= -3\cdot 5\cdot 7\cdot 12\cdot V(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3};\vec{e_4})-7\cdot 7\cdot 12\cdot V(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3};\vec{e_4})\\ &= -22\cdot 7\cdot 12\cdot V(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3};\vec{e_4})\\ &= -22\cdot 7\cdot 12\,\mathbf{VE}\end{aligned}$$

Folglich gilt $V(\vec{a};\vec{b};\vec{c};\vec{d})=11\cdot 84\,\mathbf{VE}=924\,\mathbf{VE}$.

Fassen wir die bisherigen Ergebnisse zusammen.

Definition 4:

Eine Funktion $\mu:\mathbf{R}^n\to W\subset\mathbf{R}^m$ heißt **alternierende vektorwertige n-Linearform**, wenn gilt:

1. $\mu(\ldots,\underbrace{x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}}_{\text{i-te Stelle}},\ldots)=x\cdot\mu(\ldots,\underbrace{\vec{a}}_{\text{i-te Stelle}},\ldots)+y\cdot\mu(\ldots,\underbrace{\vec{b}}_{\text{i-te Stelle}},\ldots)$ für alle $i\in\{1,\ldots,n\}$.

2. $\mu(\ldots,\underbrace{\vec{a}}_{\text{i-te Stelle}},\ldots,\underbrace{\vec{a}}_{\text{j-te Stelle}},\ldots)=0$ für alle $i,j\in\{1,\ldots,n\},\ i\neq j.$

Eine **alternierende n-Linearform** $\mu:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ (**R** ist Körper der reellen Zahlen) heißt Volumenfunktion, wenn

3. $\mu(\vec{e_1},\vec{e_2},\ldots,\vec{e_n})=1$ für die orthonormalen Einheitsvektoren $\vec{e_1},\vec{e_2},\ldots,\vec{e_n}$.

Die **alternierende n-Linearform** $\mu:\mathbf{V^n}\to\mathbf{R}$ in 3. heißt auch normierte Determinantenform.

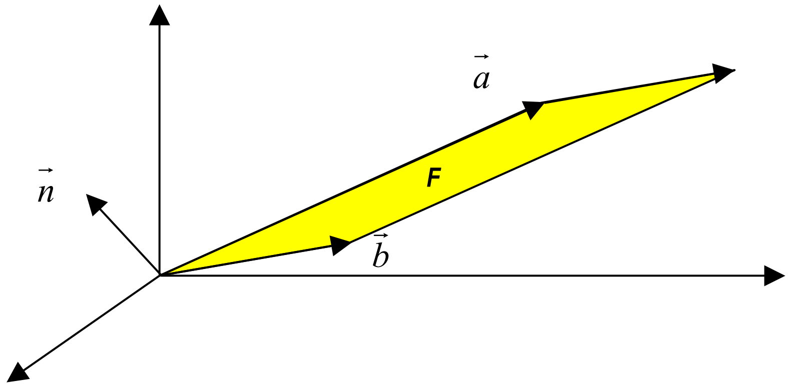
4. Ist $\mu(\vec{a_1},\ldots,\vec{a_n})=a\cdot\mu(\vec{e_1},\vec{e_2},\ldots,\vec{e_n})$, so heißt a die **Determinante**.

An dieser Stelle wollen wir den Begriff der Determinantenform nicht allgemein behandeln.

Das p-dimensionale Volumen im n-dimensionalen Raum (p < n)

Starten wir im Anschauungsraum, d.h. n = 3 und p < 3. Der Fall p = 1 ist uns bekannt. Es ist das Skalarprodukt. Trotzdem ist es interessant, ob es sich in die allgemeine Berechnung einfügt. Beginnen wir mit p = 2.

Es sei ***F*** eine Fläche, die von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird. Es sei $\vec{n}$ ein orthonormalen Vektor auf der Fläche ***F***.



Verschiedene Möglichkeiten der Berechnung:

A) Mittels der Volumenform μ

Es sei $\mu : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ die Volumenform. Ergänzen wir $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch einen orthonormalen Vektor $\vec{n}$ auf der Fläche ***F*** zu einem Volumen, so stimmt die Maßzahl des Volumens und der Fläche überein. Dabei ist das Volumen positiv, wenn $\vec{a}, \vec{b}$, und $\vec{n}$ ein Rechtssystem bilden, sonst negativ. Wir definieren folglich eine Flächenfunktion $\mu_{\vec{n}}$ durch $\mu_{\vec{n}}(\vec{a},\vec{b}) = \mu(\vec{a},\vec{b},\vec{n})$. **Weisen Sie $\mu_{\vec{n}}$ als 2-Form nach.** Jetzt noch eine leichte Aufgabe.

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wir ersetzen $\vec{a}$ durch $\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}$ durch $2\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir finden $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ als orthogonalen und damit $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ als orthonormalen Vektor.

Ersetzen wir $\vec{c}$ durch $\vec{a} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, so ergibt sich

$$\mu(\vec{b} - \vec{a}, 2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{c}) = -2\mu(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) + \mu(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 3\mu(\vec{a},\vec{b},\vec{c}).$$

Jetzt können wir $\mu_{\vec{n}}(\vec{a},\vec{b}) = \mu(\vec{a},\vec{b},\vec{n})$ leicht berechnen.

$$\begin{aligned}\mu(\vec{a},\vec{b},\vec{n}) &= \frac{1}{3\cdot\sqrt{6}}\mu(\vec{b}-\vec{a},2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{c})\\ &= \frac{1}{3\cdot\sqrt{6}}\mu(\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix})\\ &= \frac{1}{3\cdot\sqrt{6}}\cdot 3\cdot 6\cdot 3\cdot\mu(\vec{e_3},\vec{e_1},\vec{e_2})\\ &= 3\cdot\sqrt{6}\cdot\mu(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}).\end{aligned}$$

B) Mittels der natürlichen Flächenform φ in $\mathbf{R}^2$

Dazu sei $\pi_i:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ wie folgt definiert. $\pi_1(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\pi_2(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}a_1\\a_3\end{pmatrix}$, $\pi_3(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$. Es sei φ die Flächenform in $\mathbf{R}^2$. Dann sind $\varphi\circ(\pi_i\times\pi_i)$ für $i\in\{1,2,3\}$ Flächenformen in $\mathbf{R}^3$. Wir finden für $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$ $\quad(\varphi\circ(\pi_1\times\pi_1))(\vec{a},\vec{b})=\varphi(\pi_1(\vec{a}),\pi_1(\vec{b}))=\varphi(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix})=3$.

Entsprechend $\varphi(\pi_2(\vec{a}),\pi_2(\vec{b}))=\varphi(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix})=6$ und $\varphi(\pi_3(\vec{a}),\pi_3(\vec{b}))=\varphi(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix})=-3$. Wir haben noch die Orientierungen zu beachten. Hier ist ein Rechtssystem zu beachten: (1; 2), (2; 3) und (3; 1). Die Zahlen 1; 2; 3 stehen für die entsprechenden Achsen des Koordinatensystems. Folglich ist $\varphi(\pi_2(\vec{a}),\pi_2(\vec{b}))$ falsch orientiert. Es muss daher ein Minuszeichen hinzugefügt werden. Jetzt können wir die Daten zu einer vektorwertigen Flächenform zusammenfassen: $\Theta(\vec{a},\vec{b})=\begin{pmatrix}3\\-6\\-3\end{pmatrix}$.

Offensichtlich ist φ eine vektorwertige 2-Form (alt: Kreuzprodukt). Definieren wir noch

$\lambda_1(a)=\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}$, $\lambda_2(a)=\begin{pmatrix}0\\a\\0\end{pmatrix}$ und $\lambda_3(a)=\begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix}$, so ist

$$\Theta=\lambda_1\circ\varphi\circ\pi_1\times\pi_1-\lambda_2\circ\varphi\circ\pi_2\times\pi_2+\lambda_3\circ\varphi\circ\pi_3\times\pi_3.$$

Hieraus erhalten wir eine Flächenform in der Ebene, die von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird. Dazu seien $\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ zwei orthonormale Vektoren in dieser Ebene.

Definition 5:

Es sei $\boldsymbol{E}$ die von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Ebene. Es seien $\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ zwei orthonormale Vektoren in der Ebene $\boldsymbol{E}$ und $\vec{n}$ ein zu $\boldsymbol{E}$ orthonormaler Vektor.

Es sei $\mu_E:\boldsymbol{E}\to\mathbf{R}$ definiert durch $\mu_E(\vec{a},\vec{b})=\varepsilon\cdot\sqrt{\sigma\left(\Theta(\vec{a},\vec{b}),\Theta(\vec{a},\vec{b})\right)}$, mit $\varepsilon=\mathrm{sgn}(\frac{\mu(\vec{a},\vec{b},\vec{n})}{\mu(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})})$. Dann ist μ_E eine Flächenform in der Ebene $\boldsymbol{E}$. Für unsere Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ folgt nun ($\varepsilon=1$):

$$
\begin{aligned}
\mu_E(\vec{a},\vec{b}) &= \sqrt{\sigma\left(\Theta(\vec{a},\vec{b}),\Theta(\vec{a},\vec{b})\right)}\\
&= \sqrt{\sigma(\begin{pmatrix}3\\-6\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-6\\-3\end{pmatrix})}\\
&= \sqrt{9+36+9}\\
&= \sqrt{54}\\
&= \sqrt{9\cdot 6}\\
&= 3\cdot\sqrt{6}.
\end{aligned}
$$

Dies ist unser bekanntes Ergebnis. **Weisen Sie nach, dass μ_E eine alternierende 2-Form ist.**

C) Die Flächenformen der Projektion

Wir projizieren $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ und erhalten $\vec{a} = (\vec{a} - \frac{\sigma(\vec{a},\vec{b})}{\sigma(\vec{a},\vec{a})}\vec{b}) + \frac{\sigma(\vec{a},\vec{b})}{\sigma(\vec{a},\vec{a})}\vec{b}$. Der Flächeninhalt ist damit

$$
\sqrt{\sigma(\vec{b},\vec{b})}\cdot\sqrt{\sigma(\vec{a}-\frac{\sigma(\vec{a},\vec{b})}{\sigma(\vec{a},\vec{a})}\vec{b},\vec{a}-\frac{\sigma(\vec{a},\vec{b})}{\sigma(\vec{a},\vec{a})}\vec{b})} = \sqrt{\sigma(\vec{a},\vec{a})\cdot\sigma(\vec{b},\vec{b})-\sigma(\vec{a},\vec{b})^2}\ .
$$

Hieraus gewinnen wir eine dritte Darstellung $\mu_\sigma(\vec{a},\vec{b}) = \varepsilon\cdot\sqrt{\sigma(\vec{a},\vec{a})\cdot\sigma(\vec{b},\vec{b})-\sigma(\vec{a},\vec{b})^2}$ mit $\varepsilon = \mathrm{sgn}(\frac{\mu(\vec{a},\vec{b},\vec{n})}{\mu(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)})$, wobei $\vec{n}\perp\vec{a},\vec{b}$ und $\sigma(\vec{n},\vec{n})=1$ ist.

Wir erhalten $\mu_\sigma(\vec{a},\vec{b}) = \varepsilon\cdot\sqrt{3\cdot 21-3^2} = \sqrt{9\cdot 6} = 3\cdot\sqrt{6}$. Auch hier stimmt unser Ergebnis überein.

Weisen Sie wieder nach, dass μ_σ eine alternierende 2-Form ist.

Dazu schreibe man $\mu_\sigma(\vec{a},\vec{b}) = \varepsilon\cdot\sqrt{\left|\mu(\begin{pmatrix}\sigma(\vec{a},\vec{a})\\\sigma(\vec{b},\vec{a})\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma(\vec{a},\vec{b})\\\sigma(\vec{b},\vec{b})\end{pmatrix})\right|}$. Hierbei ist wieder μ die natürliche 2-Form auf $\mathbf{R}^2$.

Wir geben noch eine andere Definition dieser Form, die etwas einfacher zu handhaben ist.

Erinnern wir uns an Orthonormalbasen. Im $\mathbf{R}^n$ sind per Definitionem $\vec{e}_i,\ i\in\{1,\ldots,n\}$ orthonormal bzgl. des natürlichen Skalarproduktes. Insbesondere ist die Determinante 1 bzgl. der Determinantenform in Definition 4.4. Wir können nun **innere Orientierungen** erklären. Zwei Basen sind gleichorientiert, wenn ihre Determinante gleiches Vorzeichen haben. Eine Basis heißt positiv orientiert, wenn ihre Determinante positiv ist.

Es sei $\vec{n}_1,\vec{n}_2$ eine positive orientierte Orthonormalbasis bzgl. μ_σ. Es sei

$$
\mu_\sigma(\vec{a},\vec{b}) := \mu(\begin{pmatrix}\sigma(\vec{a},\vec{n}_1)\\\sigma(\vec{b},\vec{n}_1)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma(\vec{a},\vec{n}_2)\\\sigma(\vec{b},\vec{n}_2)\end{pmatrix}).
$$

Dann gilt für eine andere positive orientierte Orthonormalbasis $\vec{t}_1,\vec{t}_2$:

$$\mu(\begin{pmatrix}\sigma(\vec{a},\vec{n}_1)\\ \sigma(\vec{b},\vec{n}_1)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma(\vec{a},\vec{n}_2)\\ \sigma(\vec{b},\vec{n}_2)\end{pmatrix})=\mu(\begin{pmatrix}\sigma(\vec{t}_1,\vec{n}_1)\\ \sigma(\vec{t}_2,\vec{n}_1)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma(\vec{t}_1,\vec{n}_2)\\ \sigma(\vec{t}_2,\vec{n}_2)\end{pmatrix})\cdot\mu(\begin{pmatrix}\sigma(\vec{a},\vec{t}_1)\\ \sigma(\vec{b},\vec{t}_1)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma(\vec{a},\vec{t}_2)\\ \sigma(\vec{b},\vec{t}_2)\end{pmatrix})$$

Dazu schreiben man $\vec{n}_1,\vec{n}_2$ als Linearkombination von $\vec{t}_1,\vec{t}_2$. Setzen wir nun für $\vec{a},\vec{b}$ die Vektoren $\vec{n}_1,\vec{n}_2$ ein, so steht auf der linken Seite 1. Folglich ist auch die rechte Seite 1 und damit ist

$$\mu(\begin{pmatrix}\sigma(\vec{t}_1,\vec{n}_1)\\ \sigma(\vec{t}_2,\vec{n}_1)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma(\vec{t}_1,\vec{n}_2)\\ \sigma(\vec{t}_2,\vec{n}_2)\end{pmatrix})=1.$$

Vorteil: Keine Wurzel und keine Quadrate. Prüfen Sie dies!

Verallgemeinerung

Es sei W ein Unterraum des K-Vektorraumes V. Es sei $\vec{t}_1,\dots,\vec{t}_m$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von W bzgl. einer nicht ausgearteten Bilinearform σ. Dann definiert μ_σ durch

$$\mu_\sigma(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_m):=\mu(\left(\sigma(\vec{a}_i,\vec{t}_1)\right)_{1\le i\le m},\dots,\left(\sigma(\vec{a}_i,\vec{t}_m)\right)_{1\le i\le m})$$

eine Volumenform auf W. Hierbei ist μ die natürliche Volumenform auf $\mathbf{R}^m$ (Definition 4.3).

Nun muss noch nachgewiesen werden, dass diese Definition nicht von der gewählten Orthonormalbasis $\vec{t}_1,\dots,\vec{t}_m$ abhängt. Führen Sie es für eine andere gewählte positiv orientierte Orthonormalbasis $\vec{s}_1,\dots,\vec{s}_m$ durch ($\vec{x}=\sum_{k=1}^{m}\sigma(\vec{x},\vec{t}_k)\vec{t}_k$ für jeden Vektor $\vec{x}\in W$)!

Mit den Projektionen p_i und den Injektionen λ_i, ι_i haben wir $\mu_\sigma=\mu\circ\sum_{j=1}^{m}\iota_j\circ(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\circ\sigma_{t_j}\circ p_i)$, wobei

$$p_i(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_m)=\vec{a}_i,\ \sigma_{\vec{t}_j}(\vec{a})=\sigma(\vec{a},\vec{t}_j)\ \ \lambda_k(x)=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \underset{\text{k-te Stelle}}{x}\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\ \iota_l(\vec{z})=\begin{pmatrix}0 & \cdots & \underset{\text{l-te Stelle}}{\vec{z}} & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

Nachzuweisen ist $\mu(\left(\sigma(\vec{a}_i,\vec{t}_1)\right)_{1\le i\le m},\dots,\left(\sigma(\vec{a}_i,\vec{t}_m)\right)_{1\le i\le m})=\mu(\left(\sigma(\vec{a}_i,\vec{s}_1)\right)_{1\le i\le m},\dots,\left(\sigma(\vec{a}_i,\vec{s}_m)\right)_{1\le i\le m})$.

Wie oben zeigen Sie

$$\mu(\left(\sigma(\vec{a}_i,\vec{t}_1)\right)_{1\le i\le m},\dots,\left(\sigma(\vec{a}_i,\vec{t}_m)\right)_{1\le i\le m})=\mu(\left(\sigma(\vec{s}_i,\vec{t}_1)\right)_{1\le i\le m},\dots,\left(\sigma(\vec{s}_i,\vec{t}_m)\right)_{1\le i\le m})\cdot\mu(\left(\sigma(\vec{a}_i,\vec{s}_1)\right)_{1\le i\le m},\dots,\left(\sigma(\vec{a}_i,\vec{s}_m)\right)_{1\le i\le m})$$

Setzen Sie auf der linken Seite wieder $\vec{t}_1,\dots,\vec{t}_m$ für $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_m$ ein und ziehen Sie richtige Schlüsse. Zeigen Sie aber erst einmal die Gleichheit. Beginnen Sie mit $m = 2$ und $m = 3$, um ein Gefühl für die Richtigkeit zu bekommen.

Man kann sogar zeigen: Bis auf Isometrie, gibt es genau eine Volumenform, wenn für ein positiv orientiertes Orthonormalensystem das Maß 1 zugeordnet wird.

Dabei heißt eine lineare Abbildung $\chi:\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ eine Isometrie, wenn $\mu(\chi(\vec{t}_1),\ldots,\chi(\vec{t}_m)) = \mu(\vec{t}_1,\ldots,\vec{t}_m)$ auf jeder Orthonormalbasis $\vec{t}_1,\ldots,\vec{t}_m$ ist. Mit anderen Worten, die Determinante der Isometrie ist 1. χ heißt ***orientierungserhaltender Isomorphismus***.

Zusammenfassung:

Wir haben nun vier verschiedene 2-Formen zur Flächenberechnung festgelegt. Es sind

1. $\mu_{\vec{n}}(\vec{a},\vec{b}) = \mu(\vec{a},\vec{b},\vec{n})$, **2.** $\mu_F(\vec{a},\vec{b}) = \varepsilon\cdot\sqrt{\sigma\left(\Theta(\vec{a},\vec{b}),\Theta(\vec{a},\vec{b})\right)}$,

3. $\mu_\sigma(\vec{a},\vec{b}) = \varepsilon\cdot\sqrt{\left|\mu\left(\begin{pmatrix}\sigma(\vec{a},\vec{a})\\ \sigma(\vec{b},\vec{a})\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma(\vec{a},\vec{b})\\ \sigma(\vec{b},\vec{b})\end{pmatrix}\right)\right|}$, **4.** $\mu_\sigma(\vec{a},\vec{b}) := \mu\left(\begin{pmatrix}\sigma(\vec{a},\vec{n}_1)\\ \sigma(\vec{b},\vec{n}_1)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma(\vec{a},\vec{n}_2)\\ \sigma(\vec{b},\vec{n}_2)\end{pmatrix}\right)$.

Aufgabe:

Weisen Sie nach, dass diese vier Formen äquivalent sind (dasselbe Ergebnis besitzen). Beachten Sie, dass $\Theta(\vec{a},\vec{b}) = \begin{pmatrix}\varphi(\pi_1(\vec{a}),\pi_1(\vec{b}))\\ -\varphi(\pi_2(\vec{a}),\pi_2(\vec{b}))\\ \varphi(\pi_3(\vec{a}),\pi_3(\vec{b}))\end{pmatrix}$ ein Vektor ist, der senkrecht auf der Fläche F steht.

Zeigen Sie auch $\mu_\sigma(\vec{a},\vec{b}) = \varepsilon\cdot\sqrt{\left|\mu\left(\begin{pmatrix}\sigma(\vec{a},\vec{a})\\ \sigma(\vec{b},\vec{a})\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma(\vec{a},\vec{b})\\ \sigma(\vec{b},\vec{b})\end{pmatrix}\right)\right|} = \varepsilon\cdot\sqrt{\left|\mu\left(\begin{pmatrix}\sigma(\vec{a},\vec{n}_1)\\ \sigma(\vec{b},\vec{n}_1)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma(\vec{a},\vec{n}_2)\\ \sigma(\vec{b},\vec{n}_2)\end{pmatrix}\right)\right|^2}$, indem Sie $\vec{a},\vec{b}$ durch eine Linearkombination von $\vec{n}_1,\vec{n}_2$ ersetzen. Beachten Sie dabei, dass $\varepsilon = \operatorname{sgn}\left(\frac{\mu(\vec{a},\vec{b},\vec{n})}{\mu(\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n})}\right) = 1$ gilt. Wir kommen darauf bei inneren und äußeren Orientierungen zurück. Diese spielen, nicht nur in der Physik, eine wichtige Rolle.

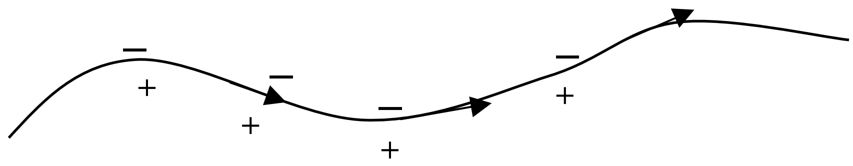
Innere und äußere (transversale) Orientierungen

Ein geometrisches Objekt $\mathcal{O}$ (ein Weg, eine Fläche) liege in einen höherdimensionalem geometrischen Objekt $\mathcal{X}$. $\mathcal{X}$ kann ein affiner Raum sein. Eine **innere Orientierungen** legt links, rechts oben, unten usw. in $\mathcal{P}$ selbst fest. Eine **äußere** oder **transversale Orientierung von** $\mathcal{P}$ gibt an, wie $\mathcal{P}$ in $\mathcal{X}$ liegt.

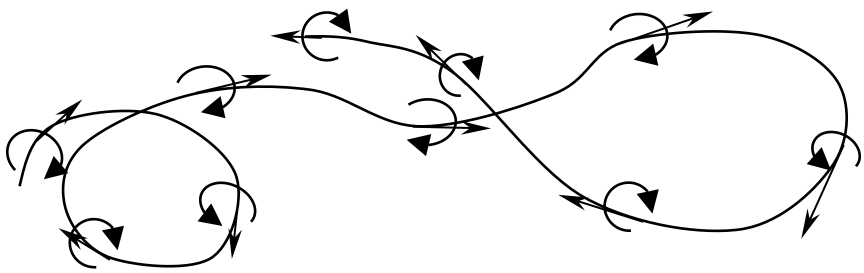
Beispiele:

1) Ein Weg $\mathcal{P}$ oder Steckenzug wird in eine Richtung durchlaufen. Damit wird eine innere Orientierung festgelegt. Hier gibt es zwei Möglichkeiten, vorwärts (**positiv**) oder rückwärts (**negativ**).

a) Der Weg verläuft in $\mathcal{X} = \mathbf{R}^2$
Dann zerteilt der Weg die Ebene in zwei Teile. Die Festlegung, welche der Seiten positiv sein soll, ist willkürlich. Wir legen die transversale Orientierung wie folgt fest: Eine positive innere Orientierung wird rechts der Durchlaufrichtung positiv transversal orientiert. Folglich gibt es zwei transversale Orientierungen, die von der inneren Orientierung unabhängig sind.

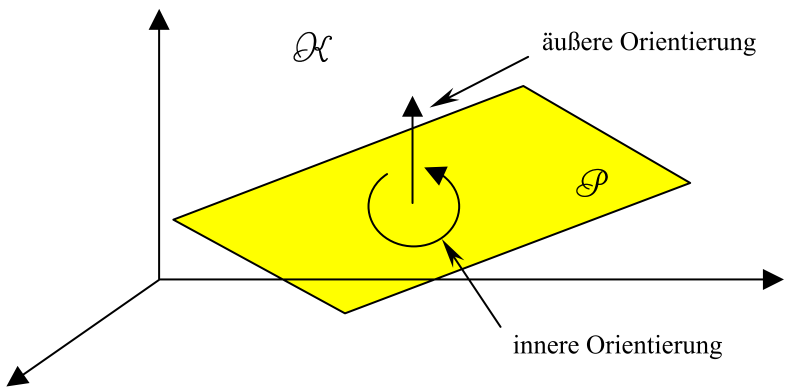


b) Der Weg $\mathcal{P}$ verläuft im $\mathcal{X} = \mathbf{R}^3$
Hier wird eine positive transversale Orientierung durch eine Rechtsdrehung angegeben. Wird der Weg in positiver Richtung (innere Orientierung) durchlaufen, so soll der umgebende Raum durch eine Rechtsdrehung positiv orientiert sein (transversale Orientierung). Es gibt folglich zwei Möglichkeiten der transversalen Orientierung. Diese ist von der inneren Orientierung unabhängig.

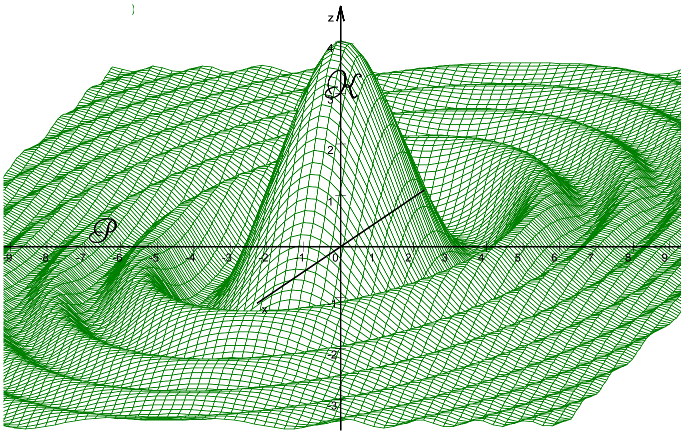


2) Eine Fläche $\mathcal{P}$ liegt in einen dreidimensionalem Raum $\mathcal{X} = \mathbf{R}^3$. In der Fläche wird durch eine innere Orientierung festgelegt, wie man sich in der Fläche bewegen soll. Dies kann dadurch geschehen, indem man ein Koordinatensystem einführt. Auf welcher äußeren Seite der Fläche man sich befindet, wird durch die transversale Orientierung festgelegt. Wieder gibt es zwei, von der inneren Orientierung unabhängig, transversalen Orientierungen.

Eine Ebene.



Oder eine Fläche.



Die betrachteten Beispiele sind sicher einleuchtend. Wie können aber innere und transversale Orientierungen mathematisch beschrieben werden. Einer positiven Orientierung kann die Zahl +1, einer negativen Orientierung die Zahl –1 zugeordnet werden. Wie aber stets mit den Orientierungen?

Beginnen wir mit der **inneren Orientierung.**

1. **Die Einheitsstrecke**
   Die Einheitsstrecke wird durch das Intervall $[0;1]$ mit Anfang 0 und Ende 1 beschrieben. Wir legen eine positive Orientierung durch die Randpunkte fest. Bezeichnen wir mit ∂ die Randzuordnung (Randabbildung), kurz Rand. Wir legen fest:
   $$\partial[0;1] := \{1\} - \{0\},$$
   wobei $\{1\}$ der obere und $\{0\}$ der untere Punkt des Intervalls bedeuten. Die Strecke ist nun von 0 nach 1 positiv orientiert. Die Differenzschreibweise hat den Vorteil, dass nun die negative Orientierung durch $-\partial[0;1] := -(\{1\}-\{0\}) = \{0\}-\{1\}$ gegeben ist. Sie unterscheiden sich folglich durch ein –zeichen.

2. **Das Einheitsquadrat**
   Das Einheitsquadrat wird durch $\{(x;y) \mid x \in [0;1] \quad \wedge \quad y \in [0;1]\}$ beschrieben. Hierfür schreiben wir $[0;1]\times[0;1]$. Der Rand wird wie folgt positiv definiert:
   $$\begin{aligned}\partial([0;1]\times[0;1]) &= \partial[0;1]\times[0;1] - [0;1]\times\partial[0;1]\\ &= \{1\}\times[0;1] - \{0\}\times[0;1] - [0;1]\times\{1\} + [0;1]\times\{0\}\end{aligned}$$
   Es wird hier **links** und **rechts** sowie **oben** und **unten** festgelegt. Dies ist die positive Orientierung. Die negative Orientierung ist dann
   $$\begin{aligned}-\partial([0;1]\times[0;1]) &= -(\{1\}\times[0;1] - \{0\}\times[0;1] - [0;1]\times\{1\}) + [0;1]\times\{0\})\\ &= -\{1\}\times[0;1] + \{0\}\times[0;1] + [0;1]\times\{1\} - [0;1]\times\{0\}\end{aligned}$$
   Wieder unterscheiden sich die Orientierungen durch ein –zeichen.

3. **Der Einheitswürfel**
   Der Einheitswürfel ist durch die Menge aller Punkte $(x;y;z) \in [0;1]\times[0;1]\times[0;1]$ beschreibbar. Wir beschreiben die positive Orientierung des Randes.
   $$\begin{aligned}\partial([0;1]\times[0;1]\times[0;1]) &:= (\partial[0;1]\times[0;1]\times[0;1]) - ([0;1]\times\partial[0;1]\times[0;1]) + ([0;1]\times[0;1]\times\partial[0;1])\\ &= (\{1\}\times[0;1]\times[0;1]) - (\{0\}\times[0;1]\times[0;1])\\ &\quad - ([0;1]\times\{1\}\times[0;1]) + ([0;1]\times\{0\}\times[0;1])\\ &\quad + ([0;1]\times[0;1]\times\{1\}) - ([0;1]\times[0;1]\times\{0\})\end{aligned}$$
   Auch hier unterscheiden sich die Orientierungen durch ein – zeichen. Beim Einheitswürfel wird zu **links** und **rechts** sowie **oben** und **unten** auch **hinten** und **vorne** festgelegt.

4. **Der Einheitspunkt**
Der Einheitspunkt ist durch $\{0\}$ festgelegt. Da ein Punkt keinen Rand hat, sagen wir: Der Rand eines Punktes ist leer. Wir schreiben dafür $\partial\{0\} = \partial\{1\} = 0$.

5. **Der Rand des Randes**
Ein zugeordneter Rand ist geschlossen. Deshalb ist der Rand des Randes leer oder jeder Punkt des Randes ist Anfang und Ende zugleich.
Nun folgt formal:

$$\partial\partial[0;1] := \partial(\{1\} - \{0\}) = \partial\{1\} - \partial\{0\} = 0$$

$$\begin{aligned}\partial\partial([0;1]\times[0;1]) &= \partial(\{1\}\times[0;1] - \{0\}\times[0;1] - ([0;1]\times\{1\} - [0;1]\times\{0\}) \\ &= \{1\}\times\partial[0;1] - \{0\}\times\partial[0;1] - \partial[0;1]\times\{1\} + \partial[0;1]\times\{0\} \\ &= \{1\}\times\{1\} - \{1\}\times\{0\} - \{0\}\times\{1\} + \{0\}\times\{0\} - \{1\}\times\{1\} + \{0\}\times\{1\} + \{1\}\times\{0\} - \{0\}\times\{0\} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial\partial([0;1]\times[0;1]\times[0;1]) &= \partial(\{1\}\times[0;1]\times[0;1]) - \partial(\{0\}\times[0;1]\times[0;1]) \\ &\quad - \partial([0;1]\times\{1\}\times[0;1]) + \partial([0;1]\times\{0\}\times[0;1]) \\ &\quad + \partial([0;1]\times[0;1]\times\{1\}) - \partial([0;1]\times[0;1]\times\{0\}) \\ &= (\{1\}\times\{1\}\times[0;1]) - (\{1\}\times\{0\}\times[0;1]) - (\{1\}\times[0;1]\times\{1\}) + (\{1\}\times[0;1]\times\{0\}) \\ &\quad - (\{0\}\times\{1\}\times[0;1]) + (\{0\}\times\{0\}\times[0;1]) + (\{0\}\times[0;1]\times\{1\}) - (\{0\}\times[0;1]\times\{0\}) \\ &\quad - (\{1\}\times\{1\}\times[0;1]) + (\{0\}\times\{1\}\times[0;1]) + ([0;1]\times\{1\}\times\{1\}) - ([0;1]\times\{1\}\times\{0\}) \\ &\quad + (\{1\}\times\{0\}\times[0;1]) - (\{0\}\times\{0\}\times[0;1]) - ([0;1]\times\{0\}\times\{1\}) + ([0;1]\times\{0\}\times\{0\}) \\ &\quad + (\{1\}\times[0;1]\times\{1\}) - (\{0\}\times[0;1]\times\{1\}) - ([0;1]\times\{1\}\times\{1\}) + ([0;1]\times\{0\}\times\{1\}) \\ &\quad - (\{1\}\times[0;1]\times\{0\}) + (\{0\}\times[0;1]\times\{0\}) + ([0;1]\times\{1\}\times\{0\}) - ([0;1]\times\{0\}\times\{0\}) \\ &= 0\end{aligned}$$

Die Randabbildung ist ohne große Erklärung eingeführt worden, da sie sich selbst erklärt. Die Einzelbestandteile des Randes kann als Erzeugendensystems eines „Vektorraumes“ über den ganzen Zahlen aufgefasst werden. Natürlich kann auch ein Dreieck statt eines Quadrates und ein Tetraeder statt eines Würfels betrachtet werden. Die nachfolgenden Gedankengänge werden aber komplizierter in der Schreibweise.

Präzisieren wir unsere Überlegungen.

Definition 1:

1. Es sei $W^n := \prod_{i=1}^{n}[0,1]$ der **n-Einheitswürfel** im $\mathbf{R}^n$. Es sei $W^0 := \{0\}$. Es sei $I^n := id_{R^n} | W^n$, $I^n(x) = x$ für $x \in W^n$.

I^n heißt ***n*-Würfel**.

2. $I^n(x_1,\ldots,\underset{\text{i-te Stelle}}{0},\ldots x_n)$ heißt $(i,0)$-te Seite und $I^n(x_1,\ldots,\underset{\text{i-te Stelle}}{1},\ldots x_n)$ heißt $(i,1)$-te Seite des Würfels W^n.

3. Bezeichne $(x_1,\ldots,\overset{\wedge}{x_i},\ldots,x_n)$ die Auslassung der i-ten Koordinate. Durch

$$I^n_{(i,\alpha)} : \begin{cases} W^{n-1} & \to & W^n \\ (x_1,\ldots,\overset{\wedge}{x_i},\ldots,x_n) & \mapsto & (x_1,\ldots,\underset{\text{i-te Stelle}}{\alpha},\ldots,x_n) \end{cases}, \quad \alpha \in \{0,1\}$$

werden zwei $(n-1)$-Würfel $I^n_{(i,0)}, I^n_{(i,1)}$ (die Seiten des n-Würfels) in den n-Würfel eingebettet.

4. Es sei $C_n(W^n)$ der freier **Z**-Modul („Vektorraum" über **Z)**, der von I^n erzeugt wird. $C_{n-1}(W^n)$ sei der freie **Z**-Modul, der zusätzlich alle $I^n_{(i,0)}, I^n_{(i,1)}$ enthält. Wir definieren einen **Z**-Modulhomomorphismus

$$\partial_n : \begin{cases} C_n(W^n) & \to & C_{n-1}(W^n) \\ I^n & \mapsto & \partial_n I^n := \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha\in\{0;1\}} (-1)^{i+\alpha} I^n_{(i,\alpha)} \end{cases}$$

als den Rand des n-Würfels I^n und setzen ihn linear fort. Entsprechend definieren wir $C_m(W^n)$ als den freien **Z**-Modul aller Einbettungen aller m-Würfel in den n-Würfel.

Es gilt folglich $\partial_n I^n(x_1,\ldots,x_n) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha\in\{0,1\}} (-1)^{i+\alpha} I^n_{(i,\alpha)}(x_1,\ldots,\overset{\wedge}{x_i},\ldots,x_n)$.

Satz 1:

Es sei I^n der n-Würfel. Dann gilt $\partial_{n-1}(\partial_n I^n)) = 0$.

Beweis:

$$\partial_{n-1}(\partial_n I^n)) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha\in\{0,1\}} (-1)^{i+\alpha} \partial_{n-1}(I^n_{(i,\alpha)})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha\in\{0,1\}} (-1)^{i+\alpha} (\sum_{\substack{j=1 \\ J\neq i}}^{n} \sum_{\beta\in\{0,1\}} (-1)^{j+\beta} (I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha\in\{0,1\}} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \sum_{\beta\in\{0,1\}} (-1)^{i+j+\alpha+\beta} (I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}$$

Halten wir ein $i<j$ fest, so ist

$$(I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}(x_1,\ldots,\overset{\wedge}{x_i},\ldots,\overset{\wedge}{x_{j+1}},\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,\underset{i-\text{te Stelle}}{\alpha},\ldots,\underset{(j+1)-\text{te Stelle}}{\beta},\ldots,x_n)$$

und

$$(I^n_{(j,\beta)})_{(i,\alpha)}(x_1,\ldots,\overset{\wedge}{x_i},\ldots,\overset{\wedge}{x_j},\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,\underset{i-\text{te Stelle}}{\alpha},\ldots,\underset{j-\text{te Stelle}}{\beta},\ldots,x_n) .$$

Folglich ist

$$(I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}(x_1,\ldots,\overset{\wedge}{x_i},\ldots,\overset{\wedge}{x_{j+1}},\ldots,x_n) = (I^n_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}(x_1,\ldots,\overset{\wedge}{x_i},\ldots,\overset{\wedge}{x_{j+1}},\ldots,x_n)$$

und damit

$$(-1)^{i+j+\alpha+\beta}(I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)} + (-1)^{i+j+1+\alpha+\beta}(I^n_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)} = 0 .$$

Verifizieren Sie die bisher gegebene Definition und den Satz für den 1-, 2- und 3-Würfel und vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Eingangs gegebenen geometrischen Überlegungen.

Definition 1 (Fortsetzung):

5. Ein **singulärer n-Würfel** ist eine stetig differenzierbare Abbildung

$$c^n : \begin{cases} W^n & \to & M \\ x & \mapsto & c^n(x), \end{cases}$$

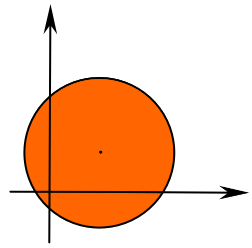
wobei $M \subseteq \mathbf{R}^m, n \leq m$ und $c^n \mid (W^n - \partial W^n)$ injektiv ist.

Es bezeichne $C_n(M)$ den **Z**-Modul aller singulären n-Würfel. Ein $c \in C_n(M)$ heißt **n-Kette**.

Es sei $c^n_{(i,\alpha)} := c \circ I^n_{(i,\alpha)}$ und $\partial_n c := \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha\in\{0;1\}} (-1)^{i+\alpha} c^n_{(i,\alpha)}$. Für jede n-Kette c^n gilt $\partial_{n-1}(\partial_n(c^n)=0$.

Dies folgt unmittelbar aus $\partial_{n-1}(\partial_n I^n))=0$.

Beachte, dass in der Randfunktion auch „Klebestellen" auftreten.



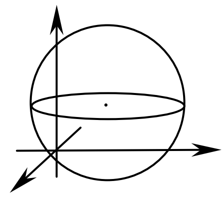
Beispiel 1: (*abgeschlossener Kreis mit Radius R* > 0)

Der Kreis wird durch die algebraische Gleichung $(x-a)^2+(y-b)^2 \le R^2$ beschrieben. Der Mittelpunkt ist folglich $M(a,b)$. Der Kreis wird auch durch $c(r,s) := (a+Rr\cos 2\pi s, b+Rr\sin 2\pi s)$, wobei $(r,s)\in W^2$, beschreiben, wie durch Einsetzen verifiziert wird. Der orientierte Rand ist also

$$\begin{aligned}\partial c(r,s) &= -c_{(1,0)}(s)+c_{(1,1)}(s)+c_{(2,0)}(r)-c_{(2,1)}(r)\\ &= -(a,b)+(a+R\cos 2\pi s, b+R\sin 2\pi s)+(a+Rr,b)-(a+Rr,b)\\ &= (a+R\cos 2\pi s, b+R\sin 2\pi s)-(a,b).\end{aligned}$$

Der erste Teil beschreibt den topologischen Rand, der zweite Teil den Mittelpunkt. Analytisch ist dieser Punkt eine Nullmenge, da der Rand eindimensional, der Mittelpunkt aber nulldimensional ist.

Beispiel 2: (*abgeschlossene Kugel*)



Für die Kugel gilt entsprechende algebraische Gleichung $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \le R^2$. Für $z=c$ ist dies der abgeschlossene Kreis $(x-a)^2+(y-b)^2 \le R^2$. Die Gleichung für diesen Kreis muss vervollständigt werden. Dies geschieht in der Ebene $x=a$ oder $y=b$. Damit Punkte nicht doppelt erscheinen, wird nur der halbe Kreis betrachtet.

Es sei $c: W^3 \to \mathbf{R}^3$ definiert durch

$$c(r,s,t) := (a+Rr\sin\pi s\cos 2\pi t, b+Rr\sin\pi s\sin 2\pi t, c+Rr\cos\pi s).$$

c ist folglich ein singulärer 3-Würfel im $\mathbf{R}^3$. $c(W^3)$ ist die abgeschlossene Kugel mit Radius R.

Hieraus erhalten wir die singulären Seiten

$$c_{(1;0)}(s,t)=c(0,s,t)=(a,b,c) \ \textbf{(Nullmenge)},$$

$$c_{(1;1)}(s,t)=c(1,s,t)=(a+R\sin\pi s\cos 2\pi t, b+R\sin\pi s\sin 2\pi t, c+R\cos\pi s),$$

$$c_{(2;0)}(r,t)=c(r,0,t)=(a,b,c+Rr) \ \textbf{(Nullmenge)},$$

$$c_{(2;1)}(r,t)=c(r,1,t)=(a,b,c-Rr) \ \textbf{(Nullmenge)},$$

$$c_{(3;0)}(r,s)=c(r,s,0)=(a+Rr\sin\pi s, b, c+Rr\cos\pi s),$$

$$c_{(3;1)}(r,s)=c(r,s,1)=(a+Rr\sin\pi s, b, c+Rr\cos\pi s).$$

Der orientierte Rand ist mit $\partial_3 c := \sum_{i=1}^{3}\sum_{\alpha\in\{0;1\}} (-1)^{i+\alpha} c_{(i,\alpha)}$ folglich

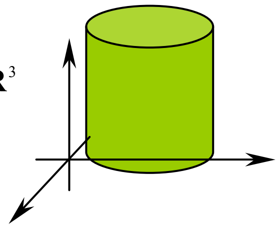
$$\begin{aligned}(\partial_3 c)(r,s,t) &= -c_{(1;0)}(s,t)+c_{(1;1)}(s,t)+c_{(2;0)}(r,t)-c_{(2;1)}(r,t)\\ &= (a+R\sin\pi s\cos 2\pi t, b+R\sin\pi s\sin 2\pi t, c+R\cos\pi s)\\ &\quad -(a,b,c)+2(0,0,Rr).\end{aligned}$$

Wir geben noch eine geometrische Interpretation der Vorgänge. Betrachten wir $c\,|\,\partial W^3$. Im obigen Beispiel deformiert c ganze Seiten des n-Würfels auf eine Strecke $c(r;0;t)=(a,b,Rr)$ bzw. auf den Mittelpunkt $c(0;s;t)=(a,b,c)$. Innerhalb des n-Würfels ist c jedoch injektiv.

Das **Bild einer Seite** heißt **entartet**, wenn die Dimension des Bildes um mindestens eins kleiner ist als die Dimension der Seite des n-Würfels. Sie bilden Nullmengen bei der Integration.

Einfacher ist der Zylinder.

Beispiel 3: (*Zylinder*)



Der Zylinder erhebt sich über dem Mittelpunkt des Kreises. Es sei $c: W^3 \to \mathbf{R}^3$ definiert durch $c(r,s,t) := (a + Rr\cos 2\pi s, b + Rr\sin 2\pi s, c + Ht)$.

Wir bestimmen

$$c_{(1;0)}(s,t) = c(0,s,t) = (a,b,c+Ht) \ \ (\textbf{\textit{Nullmenge}}),$$

$$c_{(1;1)}(s,t) = c(1,s,t) = \big(a + R\cos 2\pi s, b + R\sin 2\pi s, c + Ht\big) \ \ (\textbf{\textit{Mantel}}),$$

$$c_{(2;0)}(r,t) = c(r,0,t) = (a + Rr, b, c + Ht)\,,\ \ c_{(2;1)}(r,t) = c(r,1,t) = (a + Rr, b, c + Ht)\,,$$

$$c_{(3;0)}(r,s) = c(r,s,0) = \big(a + Rr\cos 2\pi s, b + Rr\sin 2\pi s, c\big) \ \ (\textbf{\textit{Grundfläche}}),$$

$$c_{(3;1)}(r,s) = c(r,s,1) = \big(a + Rr\cos 2\pi s, b + Rr\sin 2\pi s, c + H\big) \ \ (\textbf{\textit{Deckfläche}}).$$

Folglich ist der orientierte Rand

$$\begin{aligned}\partial c(r,s,t) &= -c_{(1,0)}(s,t) + c_{(1,1)}(s,t) - c_{(3,0)}(r,s) + c_{(3,1)}(r,s)\\ &= -(a,b,c+Ht) + \big(a + R\cos 2\pi s, b + R\sin 2\pi s, c + Ht\big)\\ &\quad -\big(a + Rr\cos 2\pi s, b + Rr\sin 2\pi s, c\big) + \big(a + Rr\cos 2\pi s, b + Rr\sin 2\pi s, c + H\big).\end{aligned}$$

Betrachten wir noch den ***Mantel des Zylinders***.

Es sei $c: W^2 \to \mathbf{R}^3$ definiert durch $c(s,t) = (a + R\cos 2\pi s, b + R\sin 2\pi s, c + Ht)$. Wir finden

$$c_{(1,0)}(t) = c(0,t) = (a + R, b, c + Ht)\,,\ \ c_{(1,1)}(t) = c(1,t) = (a + R, b, c + Ht)\,,$$

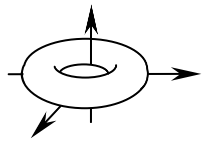
$$c_{(2,0)}(s) = c(s,0) = (a + R\cos 2\pi s, b + R\sin 2\pi s, c) \ \ (\textbf{\textit{Kreisrand Basis}}),$$

$$c_{(2,1)}(s) = c(s,1) = (a + R\cos 2\pi s, b + R\sin 2\pi s, c + H) \ \ (\textbf{\textit{Kreisrand Deckel}}).$$

Wir erhalten den orientierten Rand

$$\begin{aligned}\partial c(s,t) &= c_{(2,0)}(s) - c_{(2,1)}(s)\\ &= \big(a + R\cos 2\pi s, b + R\sin 2\pi s, c\big) - \big(a + Rr\cos 2\pi s, b + Rr\sin 2\pi s, c + H\big).\end{aligned}$$

Beispiel 4: (*Der dreidimensionale Torus oder Rettungsring*)



In diesem Fall haben wir es mit zwei ineinander greifenden Kreisen zu tun.

Es sei $c: W^3 \to \mathbf{R}^3$ definiert durch

$$c(s,t,u) := \big((R + u\cos 2\pi t)\cos 2\pi s, (R + u\cos 2\pi t)\sin 2\pi s, u\sin 2\pi t\big), \quad R > 1\,.$$

Also

$$c_{(1,0)}(t,u) = c(0,t,u) = \big(R + u\cos 2\pi t, 0, u\sin 2\pi t\big),\ \ c_{(1;1)}(t,u) = c(1,t,u) = \big(R + u\cos 2\pi t, 0, u\sin 2\pi t\big),$$

$$c_{(2,0)}(s,u) = c(s,0,u) = \big((R+u)\cos 2\pi s, (R+u)\sin 2\pi s, 0\big),$$

$$c_{(2,1)}(s,u) = c(s,1,u) = \big((R+u)\cos 2\pi s, (R+u)\sin 2\pi s, 0\big),$$

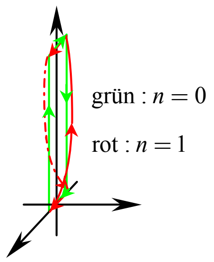
$$c_{(3,0)}(s,t) = c(s,t,0) := \big(R\cos 2\pi s, R\sin 2\pi s, 0\big) \text{ (**Nullmenge**)},$$

$$c_{(3,1)}(s,t) = c(s,t,1) := \big((R+\cos 2\pi t)\cos 2\pi s, (R+\cos 2\pi t)\sin 2\pi s, \sin 2\pi t\big).$$

Für den orientierten Rand bleibt

$$\begin{aligned}\partial c(s,t,u) &= -c_{(3,0)}(s,t,u) + c_{(3,1)}(s,t,u) \\ &= -\big(R\cos 2\pi s, R\sin 2\pi s, 0\big) + \big((R+\cos 2\pi t)\cos 2\pi s, (R+\cos 2\pi t)\sin 2\pi s, \sin 2\pi t\big).\end{aligned}$$

Beispiel 5: (*n -fach getwistetes Band*)



Ein Band der Länge L soll in sich so verdreht werden, dass die Mittellinie sich nicht verändert. Die Breite soll eine LE behalten.

Es sei $c: W^2 \to \mathbf{R}^3$ definiert durch

$$c(s,t) := \big((s-0{,}5)\cos n\pi t, (s-0{,}5)\sin n\pi t, Lt\big).$$

Für den orientierten Rand berechnen wir die singulären Seiten.

$$c_{(1,0)}(t) = c(0,t) = \big(-0{,}5\cos n\pi t, -0{,}5\sin n\pi t, Lt\big),\; c_{(1,1)}(t) = c(1,t) = \big(0{,}5\cos n\pi t, 0{,}5\sin n\pi t, Lt\big),$$

$$c_{(2,0)}(s) = c(s,0) = \big(s-\tfrac{1}{2}, 0, 0\big),\; c_{(2,1)}(s) = c(s,1) = \big((s-0{,}5)\cos n\pi, (s-0{,}5)\sin n\pi, L\big).$$

Wir erhalten für den orientierten Rand

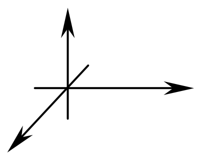
$$\begin{aligned}\partial c(s,t) &= -c_{(1,0)}(t) + c_{(1,1)}(t) + c_{(2,0)}(s) - c_{(2,1)}(s) \\ &= -\big(-0{,}5\cos n\pi t, -0{,}5\sin n\pi t, Lt\big) + \big(0{,}5\cos n\pi t, 0{,}5\sin n\pi t, Lt\big). \\ &\quad + \big(s-\tfrac{1}{2}, 0, 0\big) - \big((s-0{,}5)\cos n\pi, (s-0{,}5)\sin n\pi, L\big).\end{aligned}$$

Dann sind

$$c(0,0) = \big(-\tfrac{1}{2}, 0, 0\big),\; c(0,1) = \big(-0{,}5\cos n\pi, 0, L\big),\; c(1,0) = (\tfrac{1}{2}, 0, 0),\; c(1,1) = \big(0{,}5\cos n\pi, 0, L\big).$$

Vergleichen Sie die Eckpunkte mit dem ungetwisteten Band $n = 0$.

Beispiel 6: (*Das Möbius-Band 1*)



Beim einfach getwisteten Band ($n = 1$) müssen die Punkte $c(0,0)$ und $c(1,1)$ sowie $c(0,1)$ und $c(1,0)$ samt Verbindungsstrecke $c(s,0)$ und $c(s,1)$ „verklebt“ werden. Dazu wählen wir den Zylinder mit Mittelpunkt $M(0,-R,0)$, $R > 0{,}5$ und „rollen“ das einfach getwistete Band über die Zylinderoberfläche. Auf der ersten Achse „kleben“ wir die Enden zusammen.

Wir definieren $\big((s-0{,}5)\cos \pi t, -R + R\cos 2\pi t, (s-0{,}5)\sin \pi t\big)$. Dann bewegt sich die Strecke $s - 0{,}5$ auf der zweiten Achse und wird dabei gedreht, so wie es gewünscht wird. Aber sie durchdringt sich noch selbst, da sie nicht über den Zylinder läuft. Dies ändern wir durch Addition von $R\sin 2\pi t$ auf der dritten Achse. Es sei $c: W^2 \to \mathbf{R}^3$ definiert durch

$$c(s,t) := \big((s-0{,}5)\cos \pi t, -R + R\cos 2\pi t, (s-0{,}5)\sin \pi t + R\sin 2\pi t\big).$$

Zu überprüfen bleiben $c(s,0)$ und $c(s,1)$. Dazu genügt es die Einzelränder zu berechnen.

$$c_{(1,0)}(t) = c(0,t) = \big(-0{,}5\cos \pi t, -R + R\cos 2\pi t, -0{,}5\sin \pi t + R\sin 2\pi t\big),$$

$$c_{(1,1)}(t) = c(1,t) = \big(0{,}5\cos \pi t, -R + R\cos 2\pi t, 0{,}5\sin \pi t + R\sin 2\pi t\big),$$

$$c_{(2,0)}(s) = c(s,0) = \left(s - \tfrac{1}{2}, 0, 0\right),\ c_{(2,1)}(s) = c(s,1) = \left(\tfrac{1}{2} - s, 0, 0\right).$$

Die Randfunktion lautet

$$\begin{aligned}\partial c(s;t) &= -c_{(1,0)}(t) + c_{(1,1)}(t) + c_{(2,0)}(s) - c_{(2,1)}(s) \\ &= -\left(-0{,}5\cos\pi t, -R + R\cos 2\pi t, -0{,}5\sin\pi t + R\sin 2\pi t\right) \\ &\quad + \left(0{,}5\cos\pi t, -R + R\cos 2\pi t, 0{,}5\sin\pi t + R\sin 2\pi t\right) \\ &\quad + \left(s - \tfrac{1}{2}, 0, 0\right) - \left(\tfrac{1}{2} - s, 0, 0\right).\end{aligned}$$

Zeigen Sie: $c\big|\overset{\circ}{W}{}^2$ ist injektiv. Hinweis: 2. Koordinate $\cos 2\pi t = \cos 2\pi(1-t)$.

Beispiel 7: (*Möbius-Band 2*)

In den meisten Büchern findet man folgende Definition. Es sei $c: W^2 \to \mathbf{R}^3$ definiert durch

$$c(s,t) := \left(\cos 2\pi t\left(1 + (s-0{,}5)\cos\pi t\right), \sin 2\pi t\left(1 + (s-0{,}5)\cos\pi t\right), (s-0{,}5)\sin 2\pi t\right).$$

Also $c(0,0) = (\tfrac{1}{2}, 0, 0)$, $c(0,1) = (\tfrac{3}{2}, 0, 0)$, $c(1,0) = (\tfrac{3}{2}, 0, 0)$, $c(1,1) = (\tfrac{1}{2}, 0, 0)$.

$$c_{(1;0)}(t) = c(0,t) = \left(\cos 2\pi t\left(1 - 0{,}5\cos\pi t\right), \sin 2\pi t\left(1 - 0{,}5\cos\pi t\right),\ -0{,}5\sin 2\pi t\right),$$

$$c_{(1;1)}(t) = c(1,t) = \left(\cos 2\pi t\left(1 + 0{,}5\cos\pi t\right), \sin 2\pi t\left(1 + 0{,}5\cos\pi t\right),\ 0{,}5\sin 2\pi t\right)$$

$$c_{(2;1)}(s) = c(s,1) = \left(1{,}5 - s, 0, 0\right),$$

$$c_{(2;0)}(s) = c(s,0) = \left(0{,}5 + s, 0, 0\right).$$

$$\begin{aligned}\partial c(s;t) &= -c_{(1,0)}(t) + c_{(1,1)}(t) + c_{(2,0)}(s) - c_{(2,1)}(s) \\ &= -\left(\cos 2\pi t\left(1 - 0{,}5\cos\pi t\right), \sin 2\pi t\left(1 - 0{,}5\cos\pi t\right),\ -0{,}5\sin 2\pi t\right) \\ &\quad + \left(\cos 2\pi t\left(1 + 0{,}5\cos\pi t\right), \sin 2\pi t\left(1 + 0{,}5\cos\pi t\right),\ 0{,}5\sin 2\pi t\right) \\ &\quad \left(0{,}5 + s, 0, 0\right) - \left(1{,}5 - s, 0, 0\right).\end{aligned}$$

Beispiel 8:

Es sei $c: W^2 \to \mathbf{R}^4$ definiert durch $c(s,t) := \left(t\sin\pi s, t\cos\pi s, st, s-t\right)$. c ist folglich ein singulärer 2-Würfel im $\mathbf{R}^4$. Das Bild $c(W^2)$ ist eine parametrisierte Fläche.

Die Seiten des singulären 2-Würfels sind

$$c_{(1,0)}(t) = c(0,t) = \left(0, t, 0, -t\right),\ c_{(1,1)}(t) = c(1,t) = \left(0, -t, t, 1-t\right),$$

$$c_{(2,0)}(s) = c(s,0) = \left(0, 0, 0, s\right),\ c_{(2,1)}(s) = c(s,1) = \left(\sin\pi s, \cos\pi s, s, s-1\right).$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}(\partial_2 c)(s;t) &= -c_{(1;0)}(t) + c_{(1;1)}(t) + c_{(2;0)}(s) - c_{(2;1)}(s) \\ &= -\left(0, t, 0, -t\right) + \left(0, -t, t, 1-t\right) + \left(0, 0, 0, s\right) - \left(\sin\pi s, \cos\pi s, s, s-1\right).\end{aligned}$$