Bemerkungen zur Differentialrechnung

Das vorrangige Ziel ist die Bestimmung der Steigung der Tangente und ihrer Anwendung. Die Tangente an den Graphen einer Funktion f in einem Punkt $P\left(a\middle|f(a)\right)$ ist eine Gerade, die durch die Punkt- Steigungsform beschrieben werden sollte. Demzufolge ist die Tangente wie folgt zu beschreiben: $t_a(x) := f'(a)(x-a)+f(a)$. Hierbei bezeichnet $f'(a)$ die Tangentensteigung, die zu bestimmen ist.

Bei algebraischen Funktionen, insbesondere ganzrationalen Funktionen, ist ein Grenzübergang überflüssig.

Eine algebraische Funktion f heißt an der Stelle a ihres Definitionsbereiches differenzierbar, wenn gilt:

$$f(x) = f(a) + m_a(x)(x-a),$$

wobei m_a die Sekantenfunktion bzw. mittlere Änderungsrate ist. Mithin ist $f'(a) := m_a(a)$ und

$$t_a(x) := f(a) + f'(a)(x-a)$$

die Tangentenfunktion. Bei irrationalen Funktionen ist $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} m_a(x)$, wobei $a \in I$ und I offen.

Diese Definition wird zur Berechnung von Ableitungen genommen.

Schreiben wir

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \left(m_a(x) - f'(a)\right)(x-a)$$

und setzen $r_a^f(x) := m_a(x) - f'(a)$, so ist f an der Stelle a ihres Definitionsbereiches differenzierbar, wenn gilt

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r_a^f(x)(x-a) \text{ mit } \lim_{x\to a} r_a^f(x) = 0.$$

Diese Definition wird zur Berechnung von Ableitungsregeln genommen.

Beispiele:

1. Es sei $f(x) := x^4$. Dann ist $f(x) - f(a) = x^4 - a^4 = \left(x^3 + x^2a + xa^2 + a^3\right)(x-a) = m_a(x)(x-a)$, also

$$m_a(x) = x^3 + x^2a + xa^2 + a^3$$

Mit anderen Worten: $f'(a) = m_a(a) = 4a^3$.

2. Verallgemeinern Sie auf $f(x) := x^n,\quad n \in \mathbb{N}$.

Beachten Sie: $x^n - a^n = \left(\underbrace{x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + x^2a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1}}_{n \text{ Summanden}}\right)(x-a)$.

3. Es sei $f(x) := \frac{1}{x}$. Dann ist $f(x) - f(a) = \frac{1}{x} - \frac{1}{a} = \frac{a-x}{xa} = -\frac{1}{xa}(x-a) = m_a(x)(x-a)$ also $m_a(x) = \frac{1}{xa}$. Mit anderen Worten: $f'(a) = m_a(a) = -\frac{1}{a^2}$.

4. Es sei $f(x) := \sqrt{x}$. Dann ist $f(x) - f(a) = \sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}(x-a) = m_a(x)(x-a)$.

Mit anderen Worten: $f'(a) = m_a(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}},\ a \neq 0$.

5. Es sei $f(x) = |x|$. Dann ist für $x,\ a > 0$ oder $x,\ a < 0$: $f(x) - f(a) = |x| - |a| = \frac{|a|}{a}(x-a)$, also $m_a(x) = \frac{|a|}{a}$. Mit anderen Worten: $f'(x) = \frac{|a|}{a},\ a \neq 0$. $f(x) = |x|$ ist in $x = 0$ **nicht** differenzierbar.

Deutung als mittlere und punktuelle Änderungsrate

Es sei *f* eine Funktion und $f(x) = f(a) + m_a(x)(x-a)$. Die Funktion m_a heißt ***mittlere Änderungsrate*** in $]a;\, x[$ der Funktion *f*, $f'(a)$ heißt ***momentane*** oder ***punktuelle Änderungsrate*** an der Stelle a.

Ableitungsregeln

Hier werden die Faktor-, Summen- und Differenzregel sowie die Produkt-, Ketten- und Umkehrregel bewiesen. Die Voraussetzungen sind: Die Funktionen f und g sind differenzierbar an der Stelle a, also

$$f(x)-f(a)+f'(a)(x-a)+r_a^f(x)(0-a),\quad g(0)=g(a)+g'(a)(x-a)+r_a^g(x)(0-a)$$

$$\text{mit}\qquad \lim_{x\to a} r_a^f(x)=0 \quad\text{und}\quad \lim_{x\to a} r_a^g(x)=0\,.$$

Faktorregel: $\quad (k\cdot f)(x):=k\cdot f(x)\Rightarrow (k\cdot f)'(x)=k\cdot f'(x)$

Aus $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+r_a^f(x)(x-a)$ folgt $k\cdot f(x)=k\cdot f(a)+k\cdot f'(a)(x-a)+k\cdot r_a^f(x)(x-a)$.

Die Behauptung ergibt sich nun aus $k\cdot f'(a)(x-a)+k\cdot r_a^f(x)(x-a)=(k\cdot f)'(a)(x-a)+r_a^{k\cdot f}(x)(x-a)$.

Beispiel: $f(x):=x^5$, also $f'(a)=5a^4$. Ist $g(x):=3x^5=3\cdot f(x)$, also $k:=3$, so folgt

$$g'(a)=(3\cdot f)'(a)=3\cdot f'(a) \;=\; 3\cdot 5\cdot x^4=15x^4\ .$$

Summenregel: $\quad (f+g)(x):=f(x)+g(x)\Rightarrow (f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$

Aus $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+r_a^f(x)(x-a)$ und $g(x)=g(a)+g'(a)(x-a)+r_a^g(x)(x-a)$ folgt

$$\begin{aligned}(f+g)(x)&=f(x)+g(x)\\ &=f(a)+g(a)+\big(f'(a)+g'(a)\big)(x-a)+\big(r_a^f(x)+r_a^g(x)\big)(x-a)\\ &=(f+g)(a)+(f+g)'(a)(x-a)+r_a^{f+g}(x)(x-a)\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Beispiel: Sind $f(x):=4x^3$, $g(x):=11\sqrt{x}$, also $h(x):=4x^3+11\sqrt{x}$, so folgt

$$h'(a)=f'(a)+g'(a)=12a^2+\tfrac{11}{2a}\sqrt{a},\; a\neq 0\,.$$

Differenzregel: Folgt aus der Summenregel und Faktorregel mit $k=-1$. $f(x)-g(x)=f(x)+\big((-1)\cdot g\big)(x)$.

Produktregel: $(f\cdot g)(x):=f(x)\cdot g(x)\;\rightarrow\;(f\cdot g)'(a)=f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a)$

Aus $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+r_a^f(x)(x-a)$ und $g(x)=g(a)+g'(a)(x-a)+r_a^g(x)(x-a)$ folgt

$$\begin{aligned}f(x)\cdot g(x)=\;&f(a)\cdot g(a)+f'(a)\cdot g(a)(x-a)+r_a^f(x)\cdot g(a)(x-a)\\ &+f(a)\cdot g'(a)(x-a)+f'(a)\cdot g'(a)(x-a)^2+r_a^f(x)\cdot g'(a)(x-a)^2\\ &+f(a)\cdot r_a^g(x)(x-a)+f'(a)\cdot r_a^g(x)(x-a)^2+r_a^f(x)\cdot r_a^g(x)(x-a)^2\\ =\;&f(a)\cdot g(a)+f'(a)\cdot g(a)(x-a)+f(a)\cdot g'(a)(x-a)+r_a^{f\cdot g}(x)(x-a).\end{aligned}$$

Vergleichen wir mit $(f\cdot g)(x)=(f\cdot g)(a)+(f\cdot g)'(a)(x-a)+r_a^{f\cdot g}(x)(x-a)$, so folgt die Behauptung, da

$$r_a^{f\cdot g}(x)=r_a^f(x)\cdot g(a)+f(a)\cdot r_a^g(x)+\big(r_a^f(x)\cdot g'(a)+f'(a)\cdot r_a^g(x)+f'(a)\cdot g'(a)+r_a^f(x)\cdot r_a^g(x)\big)(x-a).$$

Bemerkung: Ist f nur stetig an der Stelle a, g aber differenzierbar und $g(a)=0$, so gilt $(f\cdot g)'(a)=f(a)\cdot g'(a)$.

Beweis:

$g(x)=g'(a)(x-a)+r_a^g(x)(x-a) \to (f\cdot g)(x)=f(a)g'(a)(x-a)+\big((f(x)-f(a))g'(a)+f(x)\cdot r_a^g(x)\big)(x-a)$

und $\lim\limits_{x\to a}\big((f(x)-f(a))g'(a)+f(x)\cdot r_a^g(x)\big)=\lim\limits_{x\to a}(f(x)-f(a))g'(a)+\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot r_a^g(x)=0+0=0$.

Beispiel: Es seien $f(x)=|x|+1$ und $g(x)=2x^2-x$. Dann sind für $a\neq 0$ die Ableitungen gegeben durch $f'(a)=\frac{|a|}{a}$ und $g'(a)=4a-1$. Folglich gilt

$$(f\cdot g)'(a)=(|a|+1)(4a-1)+\tfrac{|a|}{a}(2a^2-a)=(|a|+1)(4a-1)+|a|(2a-1)=(6a-2)|a|+4a-1,\ a\neq 0.$$

Für $a=0$ erhalten wir

$$(f\cdot g)'(0)=f(0)\cdot g'(0)=1\cdot(-1)=-1.$$

Kettenregel: $(f\circ g)(x):=f(g(x)) \to\ (f\circ g)'(a)\ =f'(g(a))\cdot g'(a)$

Aus $f(y)=f(b)+f'(b)(y-b)+r_b(y)(y-b)$ und $g(x)=g(a)+g'(a)(x-a)+r_a(x)(x-a)$ folgt mit $y=g(x)$ sowie $b=g(a)$ die Gleichung

$$\begin{aligned} f(g(a)) &= f(g(a))+f'(g(a))(g(x)-g(a))+r_b(g(x))(g(x)-g(a))\\ &= f(g(a))+f'(g(a))g'(a)(x-a)+f'(g(a))r_a(x)(x-a)+r_b(g(x))(g(x)-g(a))\\ &= f(g(a))+f'(g(a))g'(a)(x-a)+r_{(f\circ g)(a)}(x)(x-a). \end{aligned}$$

Mit $r_{(f\circ g)(a)}(x)=f'(g(a))r_a(x)(x-a)+r_b(g(x))g'(a)(x-a)+r_b(g(x))r_a(x)(x-a)$ folgt die Behauptung aus

$$\lim_{x\to a} r_{(f\circ g)(a)}(x)=0.$$

Beispiel: $f(y):=\sqrt{y}$, $g(x):=x^3 \ \to\ f'(y)=\frac{1}{2y}\sqrt{y}$ und $g'(x)=3x^2$. Mit $f(g(x))=\sqrt{x^3}$ folgt

$$(f\circ g)'(a)=\tfrac{1}{2a^3}\sqrt{a^3}\cdot 3a^2=1{,}5\sqrt{a},\ a\neq 0.$$

Die Stelle $a=0$ ist gesondert zu untersuchen. Wir schreiben $f(g(x))=\sqrt{x^3}=x\sqrt{x}$. Jetzt folgt mit $h(x)=x$ und $f(x)=\sqrt{x}$ aus dem Zusatz der Produktregel $(f\circ g)'(0)=h'(0)\cdot f(0)=1\cdot\sqrt{0}=0.$

Eine weitere ***wichtige Anwendung der Kettenregel*** liefert die Funktion $f(x)=\dfrac{1}{g(x)}$. Wir betrachten dazu die Funktion $h(x)=\frac{1}{x}$. Dann ist $f(x)=h(g(x))$, also $f'(x)=h'(g(x))g'(x)=-\dfrac{1}{g^2(x)}g'(x)$.

Beweisen Sie hiermit die Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a)}{g^2(a)}.$$

Eine Funktion f besitzt in einem Intervall $I\subseteq\mathbb{R}$ eine ***inverse Funktion*** g (***Umkehrfunktion***), wenn $(g\circ f)(x)=x$ und $(f\circ g)(y)=y$ für alle $x\in I$ und $y\in f(I)$. Die Funktion g wird mit f^{-1} bezeichnet.

Umkehrregel:

Da f differenzierbar in $a \in I$, gilt $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r_a^f(x)(x-a)$ mit $\lim\limits_{x \to a} r_a^f(x) = 0$. Es sei $f(x) = y$, $f(a) = b$ und $f^{-1}(f(x)) = x$ in *I*. Folglich ist

$$y - b = f'\left(f^{-1}(b)\right)\left(f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\right) + r_{f^{-1}(b)}^f\left(f^{-1}(y)\right)\left(f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\right).$$

Lösen wir nach $f^{-1}(y) - f^{-1}(b)$ auf.

$$f'\left(f^{-1}(b)\right)\left(f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\right) = y - b - r_{f^{-1}(b)}^f\left(f^{-1}(y)\right)\left(f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\right)$$

$$\Leftrightarrow \; f^{-1}(y) = f^{-1}(b) + \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}(y-b) - \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)} r_{f^{-1}(b)}^f\left(f^{-1}(y)\right)\left(f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\right)$$

Folglich gilt

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}, \text{ da } f^{-1}(b) = a.$$

Tipp: Berechne erst $f'(a)$. Dann ist $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$. Ersetze nun $a = f^{-1}(b)$.

Bemerkung:

Die Kettenregel $1 = \left(f \circ f^{-1}\right)'(b) = f'\left(f^{-1}(b)\right) \cdot \left(f^{-1}\right)'(b)$ bzw. $1 = \left(f^{-1} \circ f\right)'(a) = \left(f^{-1}\right)'\left(f(a)\right) \cdot f'(a)$ darf im Beweis nicht verwendet werden. Begründen Sie es!

Beispiel:

$f(x) = x^3 \to f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$. Sei $f(a) = b$, dann ist $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{3a^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{b^2}}$.

Weiterführende Beispiele

Beispiel 1:

Die Exponentialfunktion wird schon im Jahrgang 11 eingeführt.

Gesucht wird eine Funktion f mit folgenden Eigenschaften:

$$\mathbf{1.}\; f'(x) = f(x) \text{ und } \mathbf{2.}\; f(0) = 1.$$

Die Lernenden zeigen nun leicht, dass f eine streng monoton steigende Funktion ist mit $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Existenz dieser Funktion exp kann aber erst im Jahrgang 12 bewiesen werden. Sie wird durch $\exp(x) =: e^x$ beschrieben. Mit $g(x) := e^x$ folgt $e^x = e^a + m_a(x)(x-a)$. Hier ist keine Polynomfaktorisierung möglich.

Definieren wir zuerst $\ln(x) := \int_1^x \frac{1}{z}\,dz$, $x, z > 0$ so folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass $\ln'(a) = \frac{1}{a}$. Nun wird die Exponentialfunktion als Umkehrfunktion des natürlichen Logarithmus definiert. Also ist $f(x) := \ln(x)$ und $f^{-1}(x) = e^x$. Wir erhalten mit der Umkehrregel $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{\ln'(e^a)} = \frac{1}{\frac{1}{e^a}} = e^a$. Damit ist die Existenz gezeigt.

Beispiel 2:

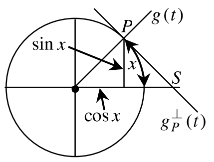
Ein weiteres Beispiel einer nicht faktorisierbaren Funktion liefert die Sinusfunktion $f(x) := \sin(x)$, denn $\sin(x) = \sin(a) + m_a(x)(x-a)$. (Ausnahme: sin wird durch eine Potenzreihe definiert)

Dieser Fall ist nicht trivial. Mit Hilfe der Additionstheoreme $\sin(y+z) = \sin y \cos z + \cos y \sin z$ und $\sin(y-z) = \sin y \cos z - \cos y \sin z$ folgt $\sin(y+z) - \sin(y-z) = 2\cos y \sin z$. Setzen wir $y+z=x$ und $y-z=a$, so folgt: $y = \frac{x+a}{2}$ und $z = \frac{x-a}{2}$. Wir erhalten $\sin(x) - \sin(a) = 2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}$.

Formen wir nun zu $\sin(x) - \sin(a) = m_a(x)(x-a)$ um und setzen ein

$$m_a(x)(x-a) = 2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2} \Leftrightarrow m_a(x) = \frac{2}{x-a}\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}.$$

Nun ist $\lim\limits_{x\to a} m_a(x)$ zu bestimmen. Nach den Grenzwertsätzen (Produktregel) ist nur der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a}\frac{2}{x-a}\sin\frac{x-a}{2}$ zu bestimmen, da $\lim\limits_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2} = \cos a$. Dazu setzen wir $u = \frac{x-a}{2}$. Dann ist $\lim\limits_{x\to a}\frac{2}{x-a}\sin\frac{x-a}{2} = \lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}$. Wir zeigen nun $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1$. Dann ist $\sin'(a) = \cos(a)$.



Betrachten wir den Kreis mit Radius 1 LE. Jeder Punkt des Kreises ist hier durch $P(\cos x \mid \sin x)$ beschrieben. Es genügt $0 < x < \frac{\pi}{4}$ zu betrachten. Die Gerade durch den Punkt P wird durch $g(t) := (\cos x \mid \sin x)\cdot t$, $t \in \mathbb{R}$ berieben. Für die Tangente erhalten wir $g_P^\perp(s) := (\cos x \mid \sin x) + (\sin x \mid -\cos x)\cdot s$, $s \in \mathbb{R}$.

Die Tangente schneidet die 1. Achse, wenn die 2. Koordinate null ist. Das ist für $s = \frac{\sin x}{\cos x}$ der Fall. Der Abstand des Punktes P vom Schnittpunkt S beträgt somit $\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x}\cdot s = s$. Wir sehen, dass für die Längen gilt: $\sin x < \mathrm{x} < \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$. Gehen wir zu den Inversen über, so erhalten wir $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Wegen $\cos 0 = 1$, folgt endlich die Behauptung $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1$.

Beispiel 3:

Ein letztes Beispiel soll das logarithmische Differenzieren sein. Betrachten wir die Funktion $h(x) := f(x)^{g(x)}$. Hier ist der Definitionsbereich besonders zu beachten. Wir gehen von $h(x) \geq 0$ aus. Sonst betrachten wir $-h(x)$.

Mit $\ell(x) := \ln\left(f(x)^{g(x)}\right) = g(x)\cdot\ln\left(f(x)\right)$ folgt $\ell'(x) = g'(x)\cdot\ln\left(f(x)\right) + g(x)\cdot\dfrac{f'(x)}{f(x)}$. Nun ist $h(x) = e^{\ell(x)}$.

Mit der Kettenregel folgt: $h'(x) = h(x)\cdot\ell'(x)$. Insgesamt erhalten wir

$$h'(x) = \frac{h(x)}{f(x)}\cdot\left(f(x)\cdot g'(x)\cdot\ln\left(f(x)\right) + g(x)\cdot f'(x)\right).$$

Konkret:

$h(x) := x^{\sin x}$, also $f(x) := x$ und $g(x) := \sin x$ liefert für $x > 0$: $h'(x) = x^{\sin(x)-1}\left(x\cdot\cos x\cdot\ln x + \sin x\right)$.

Für $x < 0$ erhalten wir nur dann definierte Werte, wenn $\sin x = \frac{p}{q} \wedge 2 \nmid q$, so dass keine Ableitung existiert.