Wahrscheinlichkeit

Eine Funktion $X:\Omega \to \mathbb{R}$, die jedem Ergebnis eines zufälligen Vorganges eine reelle Zahl zuordnet, heißt **Zufallsgröße** (oder auch **Zufallsvariable**). Eine Zufallsgröße X heißt endlich, wenn X nur endlich viele Werte x_i annehmen kann.

Kann eine Zufallsgröße X die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ annehmen, so heißt die Funktion, die jedem atomaren Ereignis $\{x_i\}$ mit $i \in \{1; 2; \ldots; n\}$ die Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ zuordnet, **Wahrscheinlichkeitsverteilung** und die Funktion F mit $F(x) = P(X \le x)$ (kumulierte) **Verteilungsfunktion** der Zufallsgröße X.

Es sei X eine endliche Zufallsgröße, die genau die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ annehmen kann. Dann heißt

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$$

der **Erwartungswert** der endlichen Zufallsgröße X. Für $E(X)$ schreibt man auch EX oder auch $\mu(X)$, μ_X oder kurz μ. Es gilt:

(1) $E(X-\mu) = E(X) - \mu = 0$. (Selber beweisen: Statt x_i bzw. X setze $y_i = x_i - \mu$ und $Y = X - \mu$.)

Es sei X eine endliche Zufallsgröße mit dem Erwartungswert $E(X)$. Die Größe $V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$ heißt **Varianz** oder **Streuung** und wird auch mit $D^2(X)$ oder kurz D^2X bezeichnet. Die Quadratwurzel aus der Varianz heißt **Standardabweichung** und wird mit $D(X)$ bzw. DX oder $\sqrt{V(X)}$ und mit $\sigma(X)$, σ_X oder nur σ symbolisiert.

Es gilt:

(2) $V(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 \cdot P(X = x_i)$ und **(3)** $V(X) = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
V(X) &= E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 \cdot P\left(\left(X - E(X)\right) = x_i - E(X)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 \cdot P(X = x_i) \qquad \textbf{(2)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - 2x_i E(X) + \left(E(X)\right)^2\right) \cdot P(X = x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot P(X = x_i) - 2E(X) \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) + \left(E(X)\right)^2 \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \\
&= E\left(X^2\right) - 2E(X) \cdot E(X) + \left(E(X)\right)^2 \\
&= E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2. \qquad \textbf{(3)}
\end{aligned}$$

Bezeichnungen: $E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = E\left(\left(X - EX\right)^2\right) = E\left(X - EX\right)^2$

http://www.youtube.com/watch?v=bgxlMQttvgE&feature=related

Betrachten wir noch zwei **Beispiele**.

1. **Verteilung**

$X=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix} \Rightarrow X^2=\begin{pmatrix}1 & 4 & 9 & 16\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$, $E(X)=2{,}5$ und $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=7{,}5-6{,}25$,

also $V(X)=1{,}25$ und damit $\sigma(X)=\frac{\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}11803.$

2. **Verteilung**

$X=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ \frac{1}{10} & \frac{4}{10} & \frac{4}{10} & \frac{1}{10}\end{pmatrix} \Rightarrow X^2=\begin{pmatrix}1 & 4 & 9 & 16\\ \frac{1}{10} & \frac{4}{10} & \frac{4}{10} & \frac{1}{10}\end{pmatrix}$, $E(X)=2{,}5$ und $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=6{,}9-6{,}25$,

also $V(X)=0{,}65$ und damit $\sigma(X)=\frac{\sqrt{65}}{10}\approx 0{,}80623.$

Beide Verteilungen besitzen denselben Erwartungswert, aber bei der zweiten Verteilung ist die Streuung geringer.

Merke: $P(|X-\vartheta|\le k)=P(-k\le X-\vartheta\le k)=P(-k+\vartheta\le X\le k+\vartheta)$

Binomialverteilung

Bernoulli[1]-Experiment

Bei diesem Experiment geht es immer nur um „**Erfolg**“ oder „**Misserfolg**“ bzw. „Treffer“ oder „Niete“. Die **Erfolgswahrscheinlichkeit** wird mit p, die **Misserfolgswahrscheinlichkeit** mit $q=1-p$ bezeichnet. Für den Erfolg wird der Buchstabe E oder die Zahl 1 zugeordnet. Entsprechend M bzw. 0 den Misserfolg.

Ein einstufiges Zufallsexperiment mit der Zufallsgröße $X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ p & 1-p\end{pmatrix}$ heißt **Bernoulli-Experiment**.

Die Zufallsgröße X heißt **Bernoulli-Größe**.

Für ein Bernoulli-Experiment gilt: $E(X)=p$ und $V(X)=p\cdot(1-p)$. Dies folgt sofort aus $E(X)=1\cdot p+0\cdot(1-p)$ und $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=1^2\cdot p+0^2\cdot(1-p)-p^2$.

Beispiele

Kronenverschluss: $X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0{,}72 & 0{,}28\end{pmatrix}\Rightarrow E(X)=0{,}72$ und $V(X)=0{,}2016$.

Idealer Würfel: $X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6}\end{pmatrix}\Rightarrow E(X)=\frac{1}{6}=0{,}1\overline{6}$ und $V(X)=\frac{5}{36}=0{,}13\overline{8}$.

[1)] Jakob Bernoulli (1654 – 1705)

Ein n-mal hintereinander ausgeführtes Bernoulli-Experiment heißt **Bernoulli-Kette** der **Länge** n und der **Erfolgswahrscheinlichkeit** p oder kurz **Bernoulli-Kette mit den Parametern** n **und** p. Die Wahrscheinlichkeit für genau k Erfolge beträgt

$$B_{n;p}(\{k\}) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}.$$

Eine Zufallsgröße X, welche die Werte $0; 1; \ldots; n$ mit den Wahrscheinlichkeiten

$$B_{n;p}(\{k\}) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k} \text{ für } k \in \{0; 1; \ldots; n\}$$

annehmen kann, heißt **binomialverteilt mit den Parametern** n **und** p oder kurz $\boldsymbol{B_{n;p}}$**-verteilt.** In Zeichen: $X \sim B_{n;p}$. Die zu X gehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt **Binomialverteilung mit den Parametern** n **und** p.

Die Binomialverteilung genügt den drei **kolmogorowschen Axiomen** der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Ist $X \sim B_{n;p}$ und $Y \sim B_{n;1-p}$, so gelten folgende Aussagen.

(1) $E(X) = n \cdot p$ http://www.youtube.com/watch?v=KAcAXUzQV80

(2) $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

Tabelleneigenschaften

(3) $P(X \le k) = B_{n;p}(\{0; 1; \ldots; k\}) = \sum_{i=0}^{k} B_{n;p}(\{i\}) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i (1-p)^{n-i}$

(4) $P(X \ge k) = 1 - B_{n;p}(\{0; 1; \ldots; k-1\}) = 1 - P(X \le k-1)$

(5) $P(i \le X \le k) = B_{n;p}(\{0; 1; \ldots; k\}) - B_{n;p}(\{0; 1; \ldots; i-1\}) = P(X \le k) - P(X \le i-1)$

(6) $P(X = k) = B_{n;p}(\{k\}) = B_{n;p}(\{0; 1; \ldots; k\}) - B_{n;p}(\{0; 1; \ldots; k-1\}) = P(X \le k) - P(X \le k-1)$

(7) $P(X = k) = B_{n;p}(\{k\}) = B_{n;1-p}(\{n-k\}) = P(Y = n-k)$

(8) $P(X \le k) = B_{n;p}(\{0; 1; \ldots; k\}) = 1 - B_{n;1-p}(\{0; 1; \ldots; n-k-1\}) = 1 - P(Y \le n-k-1)$

Schreibweisen: $B_{n;p}(\{k\}) = B_{n;p}(k) = B(n; p; \{k\}) = B(n; p; k)$ oder statt B auch b.

Aber was ist, wenn n sehr groß oder p nicht in der Binomialtabelle verzeichnet ist? Eine Antwort gibt uns der Satz von de Moivre-Laplace. Einen schönen Beweis findet ihr hier. Einfach als PDF-File downloaden. Ein Muss für einen Mathematiker!

http://en.wikipedia.org/wiki/De_Moivre%E2%80%93Laplace_theorem.

Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace (Näherungsformel)

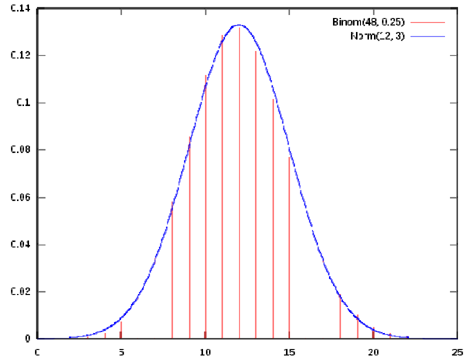
Es sei X eine binomialverteilte Zufallsgröße mit $X \sim B_{n;p}$.
Ist $npq > 9$, so gilt die **lokale Näherungsformel**

$$P(X = k) = B_{n;p}(\{k\}) = \tfrac{1}{\sigma}\varphi\left(\tfrac{k-\mu}{\sigma}\right)$$

und die **globale Näherungsformel**

$$P(X \le k) = B_{n;p}(\{0; 1; \ldots; k\}) = \Phi\left(\frac{k+0{,}5-\mu}{\sigma}\right),$$

wobei $\mu = E(X) = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{npq}$ sowie $q = p - 1$.
Der Zahlenwert $0{,}5$ hat mathematisch keine Bedeutung, ist nur ein reiner Erfahrungswert.



Dichte der Normalverteilung mit μ = 12 und σ = 3 und der Binomialverteilung mit *n* = 48 und *p* = 1/4

Eine sehr schöne dynamische Betrachtungsweise findet ihr unter dem folgenden Link.

http://www.geogebra.org/de/upload/files/dynamische_arbeitsblaetter/lwolf/binomialnormalverteilung/integralenaeherung.html

oder auch hier

http://kociemba.org/geogebra/geogebra2710/binomialverteilung.html

Online Übungen zum Thema gibt es hier:

http://www.cornelsen.de/teachweb/1.c.890157.de?hasjs=1315738083&submittedByForm=1

Die Normalverteilung

Eine (stetige) Zufallsgröße X heißt **normalverteilt mit den Parametern** μ **und** σ^2 oder (μ, σ^2) – normalverteilt oder kurz $N(\mu, \sigma^2)$ – verteilt, wenn

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \text{ mit } f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Ist X als Zufallsgröße $N(\mu, \sigma^2)$ – verteilt, so gilt

$$E(X) = \mu \text{ und } V(X) = \sigma^2.$$

Die Zufallsgröße $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ist $N(0;1)$ – verteilt. Ferner gilt: $P(X \le x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

Die $N(\mu, \sigma^2)$ – verteilte Zufallsgröße X nimmt Werte mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}68$ in $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$, $0{,}95$ in $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$ und $0{,}99$ in $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$ an.

Beweise

(1) $$E(X)=\sum_{i=1}^{n} i\cdot P(X=i)=\sum_{i=1}^{n} i\cdot\binom{n}{i}\cdot p^{i}(1-p)^{n-i}$$

$$=\sum_{i=1}^{n} i\cdot\frac{n!}{(n-i)!\cdot i!}\cdot p^{i}(1-p)^{n-i}=np\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(n-i)!\cdot(i-1)!}\cdot p^{i-1}(1-p)^{n-i}$$

Setze $i-1=j$ und $n-1=m$, dann ist $i=j+1$. Es folgt

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(n-i)!\cdot(i-1)!}\cdot p^{i-1}(1-p)^{n-i}=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-j-1)!\cdot j!}\cdot p^{j}(1-p)^{n-j-1}$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\frac{(n-1)!}{(n-1-j)!\cdot j!}\cdot p^{j}(1-p)^{n-1-j}$$

$$=(p+1-p)^{n-1}=1$$

(2) $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

$$E(X^2)=\sum_{i=0}^{n} i^2\cdot P(X=i)=\sum_{i=1}^{n} i^2\cdot\binom{n}{i}\cdot p^{i}(1-p)^{n-i}=\sum_{i=1}^{n} i^2\cdot\frac{n!}{(n-i)!\cdot i!}\cdot p^{i}(1-p)^{n-i}$$

$$=\sum_{i=1}^{n} i\cdot\frac{n!}{(n-i)!\cdot(i-1)!}\cdot p^{i}(1-p)^{n-i}=\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)\cdot\frac{n!}{(n-j-1)!\cdot j!}\cdot p^{j+1}(1-p)^{n-j-1}$$

$$=np\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)\cdot\frac{(n-1)!}{(n-1-j)!\cdot j!}\cdot p^{j}(1-p)^{n-1-j}$$

$$=np\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)\cdot\binom{n-1}{j}\cdot p^{j}(1-p)^{n-1-j}$$

$$=np\sum_{j=0}^{n-1} j\cdot\binom{n-1}{j}\cdot p^{j}(1-p)^{n-1-j}+np\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\cdot p^{j}(1-p)^{n-1-j}$$

$$=np\sum_{j=0}^{n-1} j\cdot\binom{n-1}{j}\cdot p^{j}(1-p)^{n-1-j}+np$$

$$=np(n-1)p+np=np[np-p+1]$$

Also ist $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=np(np-p+1)-n^2p^2=np(1-p)$.

(7) $P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^{k}(1-p)^{n-k}=\binom{n}{n-k}\cdot(1-p)^{n-k}\left(1-(1-p)\right)^{k}=P(Y=n-k)$

(8) $$P(X\le k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\cdot p^{i}(1-p)^{n-i}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\cdot p^{i}(1-p)^{n-i}+\sum_{i=k+1}^{n}\binom{n}{i}\cdot p^{i}(1-p)^{n-i}-\sum_{i=k+1}^{n}\binom{n}{i}\cdot p^{i}(1-p)^{n-i}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot p^{i}(1-p)^{n-i}-\sum_{i=k+1}^{n}\binom{n}{i}\cdot p^{i}(1-p)^{n-i}$$

$$=1-\sum_{i=k+1}^{n}\binom{n}{n-i}\cdot(1-p)^{n-i}\left(1-(1-p)\right)^{i}=1-\sum_{j=0}^{n-k-1}\binom{n}{j}\cdot(1-p)^{j}\left(1-(1-p)\right)^{n-j}$$