Das Skalarprodukt

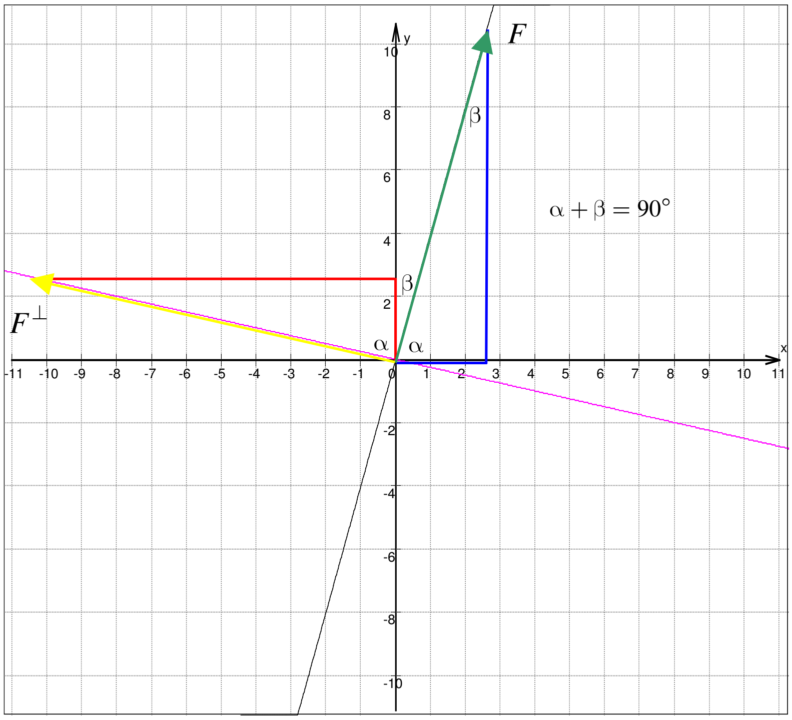


Abbildung 1

In diesem ersten Teil werden wir uns mit folgender Frage beschäftigen:

Wie kann die Länge eines Vektors bestimmt werden und wie kann entschieden werden, wann zwei Vektoren senkrecht aufeinander stehen?

Dazu wiederholen wir einige bekannte Tatsachen. Betrachten wir eine Gerade $\mathbf{G}$ durch den Ursprung. Sie wird

a) durch den Graphen einer Funktion f , also $\mathbf{G} = G(f) = \{ (x \mid f(x)) \mid x \in R \}$,

b) durch eine Gleichung $ax + by = 0$, also $\mathbf{G} = \{ (x \mid y) \in R^2 \mid ax + by = 0 \wedge \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R \}$

c) durch ihre Koordinaten $\mathbf{G} = \{ (x_0 \cdot k \mid y_0 \cdot k) \mid k \in R$ und $\langle x_0 ; y_0 \rangle$ ist Steigungsdreieck $\}$,

d) durch einen Richtungsvektor $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ und dessen Vielfaches beschrieben, also

$$\mathbf{G} = \left\{ k \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \middle| k \in R \right\}.$$

1. Geometrische Betrachtungen im zweidimensionalen Raum R^2

Betrachten wir in der Abbildung 1 die Gerade $\boldsymbol{F}$ mit ihrem Steigungsdreieck $\langle x_F = 2; y_F = 8 \rangle$. Wird die Gerade $\boldsymbol{F}$ um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedreht, so wird auch das Steigungsdreieck um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedreht. Dabei geht die Gerade $\boldsymbol{F}$ in die Gerade $\boldsymbol{F}^{\perp}$, das Steigungsdreieck $\langle x_F = 2; y_F = 8 \rangle$ in das Steigungsdreieck $\langle x_{F^{\perp}} = -8; y_{F^{\perp}} = 2 \rangle$ über.

In den folgenden Aufgaben beziehen sich $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{F}^{\perp}$ immer auf die Abbildung 1.

Aufgabe 1:

Betrachten Sie die Geraden $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{F}^{\perp}$ als Graphen zweier Funktionen $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{f}^{\perp}$.

a) Berechnen Sie deren Steigungen m_f und $m_{f^{\perp}}$ sowie das Produkt $m_f \cdot m_{f^{\perp}}$.

b) Zeigen Sie allgemein, dass die Eigenschaft des Produktes aus a) für je zwei senkrechte Geraden $\boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{H}^{\perp}$ als Funktionsgeraden auch gilt, wenn $x_H \neq 0$ und $y_H \neq 0$ sind.

c) Zeigen Sie weiterhin: Ist $m_h \cdot m_g = -1$, so stehen die zugehörigen Geraden $\boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{G}$ senkrecht aufeinander.

Aufgabe 2:

Betrachten Sie die Geraden $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{F}^{\perp}$ als Gleichungen $a_1 x + b_1 y = 0$ und $a_2 x + b_2 y = 0$.

a) Geben Sie a_1, b_1 und a_2, b_2 für $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{F}^{\perp}$ an.

b) Beschreiben Sie a_2, b_2 durch a_1, b_1.

c) Wie lautet eine allgemeine Bedingung des Senkrechtstehens?

Aufgabe 3:

Betrachten Sie die Geraden $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{F}^{\perp}$ in Koordinatenschreibweise.

a) Geben Sie die Koordinatenbeschreibung für $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{F}^{\perp}$ an.

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Koordinaten von $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{F}^{\perp}$?

c) Finden Sie eine Gleichung, die den Zusammenhang für zwei senkrecht aufeinanderstehende Geraden beschreibt.

Aufgabe 4:

Betrachten Sie die Geraden $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{F}^{\perp}$ in Vektorschreibweise.

a) Geben Sie Richtungsvektoren für die Geraden $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{F}^{\perp}$ an.

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Komponenten dieser Richtungsvektoren?

c) Geben sie allgemein eine Gleichung für zwei Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ an, die das Senkrechtstehen beschreibt.

d) Zeigen Sie auch: Gilt die Gleichung aus c) für je zwei Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, so stehen die Richtungsvektoren senkrecht aufeinander.

2. Das Skalarprodukt im zweidimensionalen Raum $\boldsymbol{R}^2$

Aus dem Ergebnis der Aufgabe 3d) finden wir: Ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ der Richtungsvektor von $\boldsymbol{F}$ und ist $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ der Richtungsvektor von $\boldsymbol{G}$, so gilt: $F \perp G \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 = 0$.

Wir definieren daher:

Definition 1:

Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ Vektoren in $\boldsymbol{V}$, so wird durch $x_1 y_1 + x_2 y_2$ eine reelle Zahl zugeordnet.

Die Zuordnungsvorschrift wird ausgedrückt durch

$$\sigma : \begin{cases} V \times V \to R \\ (\vec{a};\vec{b}) \mapsto \sigma(\vec{a};\vec{b}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{cases}.$$

σ heißt **kanonisches** (natürliches) **Skalarprodukt** der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Folgerung 2:

1. Vektoren stehen senkrecht aufeinander (sind orthogonal), wenn ihr Skalarprodukt null ergibt.
2. Insbesondere ergibt sich für $\vec{b} = \vec{a}$: $\sigma(\vec{a},\vec{a}) = \sigma(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = x_1x_1 + x_2x_2 = x_1^2 + x_2^2$.

   Dies ist das Quadrat der Länge des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ nach Pythagoras.

Welche Eigenschaften sollte ein Skalarprodukt haben?

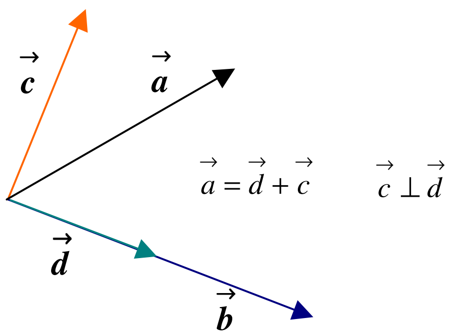
Übertragen wir die gewonnenen Eigenschaften.

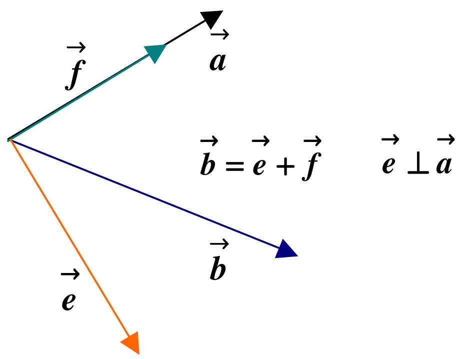
1. Für je zwei orthogonale Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ gilt: $\sigma(\vec{a};\vec{b}) = 0$.

2. Da die Eigenschaft orthogonal sein eine symmetrische Eigenschaft ist, gilt $\sigma(\vec{a};\vec{b}) = \sigma(\vec{b};\vec{a})$.

3. $\sigma(\vec{a};\vec{a})$ soll das Quadrat der Länge des Vektors $\vec{a}$ sein.

Das Skalarprodukt σ soll also die Lage zweier Vektoren zueinander messen. Dabei soll der senkrechte Anteil keine Rolle spielen. Es wird folglich in einer Dimension gemessen. Betrachten Sie dazu die folgenden Bilder.





4. $\sigma(\vec{a};\vec{b}) = \sigma(\vec{d};\vec{b})$ $\qquad\qquad$ $\sigma(\vec{a};\vec{b}) = \sigma(\vec{a};\vec{f})$

Aufgrund der Addition der Vektoren $\vec{a} = \vec{d} + \vec{c}$ und $\vec{b} = \vec{e} + \vec{f}$ verlangen wir allgemein

4. $\sigma(\vec{a} + \vec{b};\vec{c}) = \sigma(\vec{a};\vec{c}) + \sigma(\vec{b};\vec{c})$ für alle $\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in V$.

5. $\sigma(x\vec{a};\vec{b}) = x\sigma(\vec{a};\vec{b})$ für alle $\vec{a},\vec{b} \in V$ und $x \in \mathbf{R}$.

Aufgabe 5:

Zeigen Sie, dass auch für alle $\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in V$ und $x, y \in \mathbf{R}$ gilt:

6. $\sigma(\vec{a};\vec{b} + \vec{c}) = \sigma(\vec{a};\vec{b}) + \sigma(\vec{a};\vec{c})$

7. $\sigma(x\vec{a}+y\vec{b};\vec{c}) = x\sigma(\vec{a};\vec{c}) + y\sigma(\vec{b};\vec{c})$

8. $\sigma(\vec{a};x\vec{b}+y\vec{c}) = x\sigma(\vec{a};\vec{b}) + y\sigma(\vec{a};\vec{c})$

3. Das Skalarprodukt im dreidimensionalen Raum $\boldsymbol{R}^3$

Wir wollen nun dieses Skalarprodukt auf den dreidimensionalen Raum $\boldsymbol{R}^3$ erweitern. Dazu müssen natürlich die Eigenschaften 1. bis 8. weiterhin gelten. Um zu zeigen, dass $\sigma(\vec{a};\vec{b}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ auch in drei Dimensionen gilt, benötigen wir nur die Eigenschaft: σ berücksichtigt den senkrechten Anteil nicht.

In den Koordinatenebenen ist die Festlegung für σ bekannt. Folglich sind:

$$\sigma(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}) = x_1y_1 + x_2y_2,\ \sigma(\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \\ y_3 \end{pmatrix}) = x_1y_1 + x_3y_3 \text{ und } \sigma(\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = x_2y_2 + x_3y_3.$$

Diese Eigenschaften bleiben auch erhalten, wenn an die zweite Stelle der Vektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ gesetzt wird, denn der senkrechte Anteil wird nicht berücksichtigt. Also gilt auch:

$$\sigma(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = x_1y_1 + x_2y_2,\ \sigma(\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = x_1y_1 + x_3y_3 \text{ und } \sigma(\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = x_2y_2 + x_3y_3.$$

Addieren wir beide Seiten, so erhalten wir:

$$2\cdot\sigma(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = 2\cdot(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \Leftrightarrow \sigma(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Dies wollten wir zeigen.

Wir geben jetzt eine Definition an, die allgemeiner ist und mit weniger Eigenschaften auskommt.

Definition 3:
Es seien U, V und $\boldsymbol{W}$ drei $\boldsymbol{K}$-Vektorräume ($\boldsymbol{K}$ ein beliebiger Körper). Eine Zuordnung

$$\sigma : \begin{cases} U \times V & \to & W \\ (\vec{a};\vec{b}) & \mapsto & \sigma(\vec{a};\vec{b}) \end{cases}$$

heißt **vektorwertige Bilinearform**, wenn für alle $\vec{a},\vec{b} \in U$, $\vec{c},\vec{d} \in V$ und $x, y \in K$ gilt:

VBF) $\sigma(x\vec{a}+y\vec{b};\vec{c}) = x\sigma(\vec{a};\vec{c}) + y\sigma(\vec{b};\vec{c})$ und $\sigma(\vec{a};x\vec{c}+y\vec{d}) = x\sigma(\vec{a};\vec{c}) + y\sigma(\vec{a};\vec{d})$.

Ist $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{K}$, so sprechen wir von einer Bilinearform (**BF**).

Beispiele:

1. Es sei $\boldsymbol{\sigma}(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}) := a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2$ für $a_i, b_i \in R, i \in \{1,2\}$. $\boldsymbol{\sigma}$ ist eine Bilinearform, die nicht symmetrisch ist.

2. Es sei $\boldsymbol{\sigma}(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_1 b_2 \\ a_2 b_2 \end{pmatrix}$ für $a_i, b_i \in R, i \in \{1,2\}$. $\boldsymbol{\sigma}$ ist eine vektorwertige Bilinearform, die nicht symmetrisch ist.

3. Es sei $\boldsymbol{\pi}_i(\vec{c})$ für $i \in \{1,2,3\}$ die Projektion, deren i-te Komponente null ist. Es sei $\boldsymbol{\sigma}(\vec{a};\vec{b}) := \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_K(\boldsymbol{\pi}_1(\vec{a});\boldsymbol{\pi}_1(\vec{b})) \\ \boldsymbol{\sigma}_K(\boldsymbol{\pi}_2(\vec{a});\boldsymbol{\pi}_2(\vec{b})) \\ \boldsymbol{\sigma}_K(\boldsymbol{\pi}_3(\vec{a});\boldsymbol{\pi}_3(\vec{b})) \end{pmatrix}$ mit $\boldsymbol{\sigma}_K$ als kanonisches Skalarprodukt im $\boldsymbol{R}^3$. Dann ist $\boldsymbol{\sigma}$ eine vektorwertige symmetrische Bilinearform.

Eine vektorwertige Bilinearform $\boldsymbol{\sigma}$ heißt **symmetrisch**, wenn gilt:

SBF) $U = V$ und $\boldsymbol{\sigma}(\vec{a};\vec{b}) = \boldsymbol{\sigma}(\vec{b};\vec{a})$.

Eine Bilinearform $\boldsymbol{\sigma}$ heißt **positiv**, wenn gilt:

PBF) $U = V$ und $\boldsymbol{\sigma}(\vec{a};\vec{a}) > 0$ für jeden Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Um ein Skalarprodukt allgemein für jeden Körper definieren zu können, benötigen wir den Begriff der Involution.

I) Es sei $\boldsymbol{K}$ ein Körper. Eine Abbildung

$$\boldsymbol{\iota} : \begin{cases} K \to K \\ x \mapsto \boldsymbol{\iota}(x) \end{cases}$$

heißt Involution, wenn die Hintereinanderausführung $\boldsymbol{\iota} \circ \boldsymbol{\iota}$ die Identität , d.h. $\boldsymbol{\iota}^2 = 1$ ist.

Beispiel:

Es sei $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ der Körper der komplexe Zahlen. $\boldsymbol{\iota}(a+bi) = a - bi$ und $\boldsymbol{\iota}(a-bi) = a+bi$ ist eine Involution mit $(a+bi)\cdot\boldsymbol{\iota}(a+bi) = a^2 + b^2$.

Es seien U, V und $\boldsymbol{W}$ drei $\boldsymbol{K}$-Vektorräume ($\boldsymbol{K}$ ein beliebiger Körper). Eine Zuordnung

$$\boldsymbol{\sigma} : \begin{cases} U \times V \to W \\ (\vec{a};\vec{b}) \mapsto \boldsymbol{\sigma}(\vec{a};\vec{b}) \end{cases}$$

heißt **vektorwertige Sesquilinearform**, wenn für alle $\vec{a}, \vec{b} \in U$, $\vec{c}, \vec{d} \in V$ und $x, y \in K$ gilt:

VSQF) $\boldsymbol{\sigma}(x\vec{a} + y\vec{b};\vec{c}) = x\boldsymbol{\sigma}(\vec{a};\vec{c}) + y\boldsymbol{\sigma}(\vec{b};\vec{c})$ und $\boldsymbol{\sigma}(\vec{a};x\vec{c} + y\vec{d}) = \boldsymbol{\iota}(x)\boldsymbol{\sigma}(\vec{a};\vec{c}) + \boldsymbol{\iota}(y)\boldsymbol{\sigma}(\vec{a};\vec{d})$.

Ist $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{K}$, so sprechen wir von einer Sesquilinearform (**SQF**).

Eine Sesquilinearform $\boldsymbol{\sigma}$ heißt **positiv**, wenn gilt:

PSQF) $U = V$ und $\boldsymbol{\sigma}(\vec{a};\vec{a}) > 0$ für jeden Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$.

SP) Eine **positiv definite hermitesche Sesquilinearform** $\boldsymbol{\sigma}$ heißt ein **Skalarprodukt**.

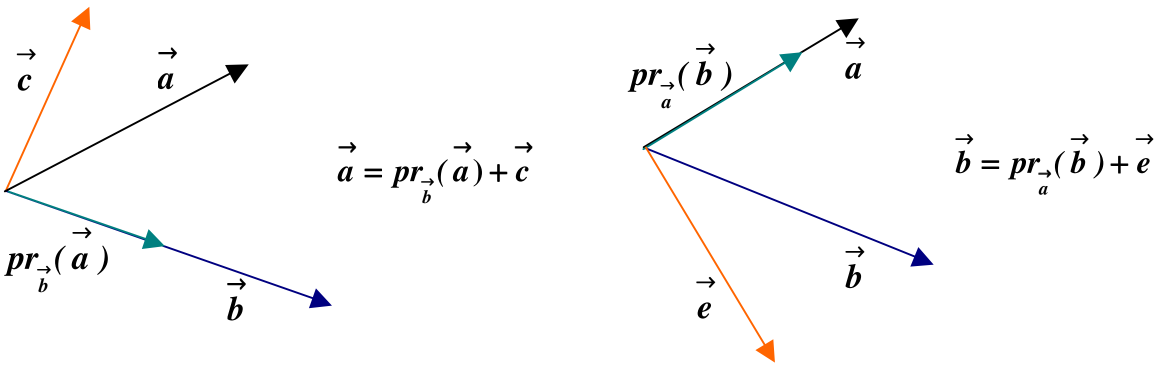
Da die Definition des Skalarproduktes sehr allgemein ist, muss die Orthogonalität zweier Vektoren definiert werden.

Definition 4:

Es seien $\vec{a}, \vec{b} \in V$. Es sei $\boldsymbol{\sigma}$ ein **Skalarprodukt** auf $\boldsymbol{V}$. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen orthogonal, in Zeichen $\vec{a} \perp \vec{b}$, wenn $\boldsymbol{\sigma}(\vec{a};\vec{b})=0$ ist. Ein Vektor $\vec{n} \in V$ heißt normal oder **Normalenvektor**, wenn $\boldsymbol{\sigma}(\vec{n};\vec{n})=1$ ist. Die reelle Zahl $\left\|\vec{a}\right\| = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}(\vec{a};\vec{a})}$ heißt Norm des Vektors $\vec{a}$.

4. Die Projektion eines Vektors auf einen anderen Vektor

Zur Motivation betrachten wir folgende Bilder.



Unter der Projektion eines Vektors $\vec{a}$ auf den Vektor $\vec{b}$, in Zeichen $pr_{\vec{b}}(\vec{a})$, versteht man den Vektor $pr_{\vec{b}}(\vec{a})$ mit $\vec{a} - pr_{\vec{b}}(\vec{a}) \perp \vec{b}$.

Berechnen wir $pr_{\vec{b}}(\vec{a})$. Es ist $pr_{\vec{b}}(\vec{a}) = x\vec{b}$ für $\boldsymbol{x \in K}$. Andererseits gilt $\boldsymbol{\sigma}(\vec{a};\vec{b}) = \boldsymbol{\sigma}(pr_{\vec{b}}(\vec{a});\vec{b}) = x\boldsymbol{\sigma}(\vec{b};\vec{b})$. Daraus folgt $x = \dfrac{\boldsymbol{\sigma}(\vec{a};\vec{b})}{\boldsymbol{\sigma}(\vec{b};\vec{b})}$. Also ist $pr_{\vec{b}}(\vec{a}) = \dfrac{\boldsymbol{\sigma}(\vec{a};\vec{b})}{\boldsymbol{\sigma}(\vec{b};\vec{b})}\vec{b}$.

Aufgabe 6:

a) Es seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Es seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $pr_{\vec{b}}(\vec{a})$, $pr_{\vec{a}}(\vec{b})$ und $\vec{a} - pr_{\vec{b}}(\vec{a})$, $\vec{b} - pr_{\vec{a}}(\vec{b})$.

Aufgabe 7:

Zeigen Sie, dass für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ gilt:

a) $pr_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = pr_{\vec{c}}(\vec{a}) + pr_{\vec{c}}(\vec{b})$

b) $pr_{\vec{c}}(x\vec{a}) = x pr_{\vec{c}}(\vec{a})$

Zeigen Sie an einem Beispiel in $\boldsymbol{R}^2$, dass $pr_{\vec{b}+\vec{c}}(\vec{a}) \neq pr_{\vec{b}}(\vec{a}) + pr_{\vec{c}}(\vec{a})$.

5. Ein Orthogonalisierungsverfahren

Es sei $\boldsymbol{V}$ ein K-Vektorraum mit Erzeugendensystem $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\right\}$. Gesucht ist ein Erzeugendensystem $\left\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n\right\}$, deren Vektoren paarweise orthogonal sind.

Der Ansatz der Projektion eines Vektors auf einen anderen Vektor liefert ein konstruktives Verfahren ein solches Erzeugendensystem zu berechnen.

Dazu setzen wir $\vec{g}_1 = \vec{a}_1$ und $\vec{g}_2 = \vec{a}_2 - pr_{\vec{g}_1}(\vec{a}_2)$. Dann ist $\vec{g}_1 \perp \vec{g}_2$. Für $\vec{g}_3$ orthogonalisieren wir erst auf $\vec{g}_1$ und diesen dann auf $\vec{g}_2$. Also

$$
\begin{aligned}
\vec{g}_3 &= \vec{a}_3 - pr_{\vec{g}_1}(\vec{a}_3) - pr_{\vec{g}_2}\left(\vec{a}_3 - pr_{\vec{g}_1}(\vec{a}_3)\right) \\
&= \vec{a}_3 - pr_{\vec{g}_1}(\vec{a}_3) - pr_{\vec{g}_2}(\vec{a}_3) + pr_{\vec{g}_2}\left(pr_{\vec{g}_1}(\vec{a}_3)\right) \\
&= \vec{a}_3 - pr_{\vec{g}_1}(\vec{a}_3) - pr_{\vec{g}_2}(\vec{a}_3)
\end{aligned}
$$

$\vec{g}_3 \perp \vec{g}_1$, da $\vec{a}_3 - pr_{\vec{g}_1}(\vec{a}_3) \perp \vec{g}_1$ und $pr_{\vec{g}_2}(\vec{a}_3) \perp \vec{g}_1$. $\vec{g}_3 \perp \vec{g}_2$ da $\vec{a}_3 - pr_{\vec{g}_2}(\vec{a}_3) \perp \vec{g}_2$ und $pr_{\vec{g}_1}(\vec{a}_3) \perp \vec{g}_2$.

Allgemein setzen wir $\vec{g}_i = \vec{a}_i - pr_{\vec{g}_1}(\vec{a}_i) - pr_{\vec{g}_2}(\vec{a}_i) - \cdots - pr_{\vec{g}_{i-1}}(\vec{a}_i)$.

Aufgabe 8:
Formulieren Sie das Orthogonalisierungsverfahren als Satz und beweisen Sie es durch vollständige Induktion nach $k \le n$.

Lösungen der Aufgaben zum Skalarprodukt

Aufgabe 1:

a) Die Steigungen berechnen sich aus den Steigungsdreiecken zu $m_f = \frac{y_F}{x_F} = \frac{8}{2} = 4$ und $m_{f^\perp} = \frac{y_{F^\perp}}{x_{F^\perp}} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$. Das Produkt beträgt $m_f \cdot m_{f^\perp} = 4 \cdot (-\frac{1}{4}) = -1$.

b) Aus $m_h = \frac{y_H}{x_H}$ und $m_{h^\perp} = \frac{y_{H^\perp}}{x_{H^\perp}} = \frac{x_{H^\perp}}{-y_{H^\perp}} = -\frac{x_{H^\perp}}{y_{H^\perp}}$ folgt $m_h \cdot m_{h^\perp} = \frac{y_H}{x_H} \cdot \left(-\frac{x_{H^\perp}}{y_{H^\perp}}\right) = -1$.

c) Mit $m_h = \frac{y_H}{x_H}$ und $m_{h^\perp} = \frac{y_{H^\perp}}{x_{H^\perp}}$ sowie $m_h \cdot m_{h^\perp} = \frac{y_H}{x_H} \cdot \frac{y_{H^\perp}}{x_{H^\perp}} = -1$ folgt $\frac{y_H}{x_H} \cdot \frac{y_{H^\perp}}{x_{H^\perp}} = -1 \Leftrightarrow \frac{y_H}{x_H} = -\frac{x_{H^\perp}}{y_{H^\perp}} = \frac{x_{H^\perp}}{-y_{H^\perp}}$. Die beiden Steigungsdreiecke lauten $\langle x_H ; y_H \rangle$ und $\langle x_{H^\perp} = -y_H ; y_{H^\perp} = x_H \rangle$. Damit stehen die Geraden $\boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{G}$ senkrecht aufeinander, d.h. $G = H^\perp$. Zwei Geraden $\boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{G}$ stehen folglich genau dann senkrecht aufeinander, wenn für zwei Steigungsdreiecke $\langle x_H ; y_H \rangle$ und $\langle x_G ; y_G \rangle$ die Gleichung $x_H \cdot x_G + y_H \cdot y_G = 0$ erfüllt ist.

Aufgabe 2:

a) Da $-\frac{a_1}{b_1}$ die Steigung der Geraden ***F*** und $-\frac{a_2}{b_2}$ die Steigung der Geraden $F^{\perp}$ ist, wählen wir $a_1 = 8$ und $b_1 = -2$ sowie $a_2 = 2$ und $b_2 = 8$. Dann sind die Gleichungen erfüllt. Also $F = \{(x \mid y) \mid 8x - 2y = 0\}$ und $F^{\perp} = \{(x \mid y) \mid 2x + 8y = 0\}$. Da die Steigung durch einen Bruch definiert ist, liefert jede Erweiterung oder Kürzung eine Gleichung.

b) Z.B. $a_2 = -b_1$ und $b_2 = a_1$.

c) Ist $H = \{(x \mid y) \mid a_H x + b_H y = 0\}$, so ist $H^{\perp} = \{(x \mid y) \mid b_H x - a_H y = 0\}$. Zwei Geraden ***G*** und ***H*** stehen senkrecht aufeinander, wenn die Gleichung $a_H \cdot a_G + b_H \cdot b_G = 0$ erfüllt ist.

Aufgabe 3:

a) Es gilt $F = \{(2k_F \mid 8k_F) \mid k_F \in R\}$ und $F^{\perp} = \{(\mathbf{-8}k_{F^{\perp}} \mid 2k_{F^{\perp}}) \mid k_{F^{\perp}} \in R\}$.

b) Die Steigungen sind hier $\frac{8k_F}{2k_F} = 4$ und $\frac{2k_{F^{\perp}}}{-8k_{F^{\perp}}} = -\frac{1}{4}$. Der Zusammenhang ist folglich: Ist $(x_F \mid y_F)$ ein Punkt von ***F***, so ist $(x_{F^{\perp}} = -y_F \mid y_{F^{\perp}} = x_F)$ ein Punkt von $F^{\perp}$.

c) Eine Gleichung finden wir über die Koordinaten: $2k_F \cdot (\mathbf{-8}k_{F^{\perp}}) + 8k_F \cdot 2k_{F^{\perp}} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (\mathbf{-8}) + 8 \cdot 2 = 0$.

d) Aus c) erhalten wir eine Gleichung für den allgemeinen Fall: Zwei Geraden ***G*** und ***H*** stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn die Gleichung $x_H \cdot x_G + y_H \cdot y_G = 0$ für zwei Punkte $(x_H \mid y_H) \in H$ und $(x_G \mid y_G) \in G$ erfüllt ist.

Aufgabe 4:

a) Zwei mögliche Richtungsvektoren lauten $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ für F und $\begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ für $F^{\perp}$. Aber auch alle Vielfachen sind Richtungsvektoren, d.h. $\begin{pmatrix} 2x \\ 8x \end{pmatrix}$ für F und $\begin{pmatrix} -8y \\ 2y \end{pmatrix}$ für $F^{\perp}$, $x, y \in R$.

b) Für die Komponenten zweier beliebiger Richtungsvektoren besteht der Zusammenhang: Zwei Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 2x \\ 8x \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -8y \\ 2y \end{pmatrix}$ stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn die Gleichung $2x \cdot (-8y) + 8x \cdot 2y = 0$ erfüllt ist.

c) Mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektoren für F und $F^{\perp}$ folgt: Die Richtungsvektoren stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn die Gleichung $x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 = 0$ erfüllt ist.

d) Es sei die Gleichung $x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 = 0$ für zwei Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ für ***G*** und ***H*** erfüllt. Diese Gleichung hat z. B. $y_1 = x_2$ und $y_2 = -x_1$ als Lösung. Die Steigungsdreiecke $\langle x_1 ; x_2 \rangle$ und $\langle x_2 ; -x_1 \rangle$ stehen senkrecht aufeinander, also auch die Richtungsvektoren.

Für das kanonische Skalarprodukt kann folglich zu jedem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ein dazu orthogonaler Richtungsvektor angegeben werden: $\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5:

7. $\boldsymbol{\sigma}(\vec{a};\vec{b}+\vec{c}) \underset{2.}{=} \boldsymbol{\sigma}(\vec{b}+\vec{c};\vec{a}) \underset{5.}{=} \boldsymbol{\sigma}(\vec{b};\vec{a})+\boldsymbol{\sigma}(\vec{c};\vec{a}) \underset{2.}{=} \boldsymbol{\sigma}(\vec{a};\vec{b})+\boldsymbol{\sigma}(\vec{a};\vec{c})$

8. $\boldsymbol{\sigma}(x\vec{a}+y\vec{b};\vec{c}) \underset{5.}{=} \boldsymbol{\sigma}(x\vec{a};\vec{c})+\boldsymbol{\sigma}(y\vec{b};\vec{c}) \underset{6.}{=} x\boldsymbol{\sigma}(\vec{a};\vec{c})+y\boldsymbol{\sigma}(\vec{b};\vec{c})$

9. $\boldsymbol{\sigma}(\vec{a};x\vec{b}+y\vec{c}) \underset{2.}{=} \boldsymbol{\sigma}(x\vec{b}+y\vec{c};\vec{a}) \underset{8.}{=} x\boldsymbol{\sigma}(\vec{b};\vec{a})+y\boldsymbol{\sigma}(\vec{c};\vec{a}) \underset{2.}{=} x\boldsymbol{\sigma}(\vec{a};\vec{b})+y\boldsymbol{\sigma}(\vec{a};\vec{c})$

Aufgabe 6: Es ist $pr_{\vec{v}}(\vec{u})=\dfrac{\boldsymbol{\sigma}(\vec{u};\vec{v})}{\boldsymbol{\sigma}(\vec{v};\vec{v})}\vec{v}$.

a) Es seien $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

$$pr_{\vec{b}}(\vec{a})=\frac{\boldsymbol{\sigma}(\vec{a};\vec{b})}{\boldsymbol{\sigma}(\vec{b};\vec{b})}\vec{b}=\frac{6-4}{4+1}\vec{b}=\frac{2}{5}\vec{b}\,;\quad pr_{\vec{a}}(\vec{b})=\frac{\boldsymbol{\sigma}(\vec{a};\vec{b})}{\boldsymbol{\sigma}(\vec{a};\vec{a})}\vec{a}=\frac{2}{25}\vec{a}\,;$$

$$\vec{a}-pr_{\vec{b}}(\vec{a})=\vec{a}-\frac{2}{5}\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}-\frac{2}{5}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\left(5\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}11\\22\end{pmatrix}=\frac{11}{5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

$$\vec{b}-pr_{\vec{a}}(\vec{b})=\vec{b}-\frac{2}{25}\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}-\frac{2}{25}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\left(25\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}44\\-33\end{pmatrix}=\frac{11}{25}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}.$$

b) Es seien $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$. $pr_{\vec{b}}(\vec{a})=\dfrac{\boldsymbol{\sigma}(\vec{a};\vec{b})}{\boldsymbol{\sigma}(\vec{b};\vec{b})}\vec{b}=\dfrac{-2-1+2-4}{4+1+1}\vec{b}=\dfrac{-1}{6}\vec{b}\,;$ $pr_{\vec{a}}(\vec{b})=\dfrac{\boldsymbol{\sigma}(\vec{a};\vec{b})}{\boldsymbol{\sigma}(\vec{a};\vec{a})}\vec{a}=\dfrac{-1}{6}\vec{a}\,;$

$$\vec{a}-pr_{\vec{b}}(\vec{a})=\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\left(6\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4\\-5\\13\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}=\vec{b}$$

$$\vec{b}-pr_{\vec{a}}(\vec{b})=\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\left(6\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-11\\5\\8\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\vec{a}.$$

Aufgabe 7:

Für alle $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V$ gilt:

a) $pr_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{\boldsymbol{\sigma}(\vec{a}+\vec{b};\vec{c})}{\boldsymbol{\sigma}(\vec{c};\vec{c})}\vec{c}=\dfrac{\boldsymbol{\sigma}(\vec{a};\vec{c})+\boldsymbol{\sigma}(\vec{b};\vec{c})}{\boldsymbol{\sigma}(\vec{c};\vec{c})}\vec{c}=\dfrac{\boldsymbol{\sigma}(\vec{a};\vec{c})}{\boldsymbol{\sigma}(\vec{c};\vec{c})}\vec{c}+\dfrac{\boldsymbol{\sigma}(\vec{b};\vec{c})}{\boldsymbol{\sigma}(\vec{c};\vec{c})}\vec{c}=pr_{\vec{c}}(\vec{a})+pr_{\vec{c}}(\vec{b})$

b) $pr_{\vec{c}}(x\vec{a})=\dfrac{\boldsymbol{\sigma}(x\vec{a};\vec{c})}{\boldsymbol{\sigma}(\vec{c};\vec{c})}\vec{c}=x\dfrac{\boldsymbol{\sigma}(\vec{a};\vec{c})}{\boldsymbol{\sigma}(\vec{c};\vec{c})}\vec{c}=x\,pr_{\vec{c}}(\vec{a})$

Zeigen Sie an einem Beispiel in $\boldsymbol{R}^2$, dass $pr_{\vec{b}+\vec{c}}(\vec{a})\neq pr_{\vec{b}}(\vec{a})+pr_{\vec{c}}(\vec{a})$.

c) Es seien $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Dann ist $\vec{b}+\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$.

Wir erhalten $pr_{\vec{b}+\vec{c}}(\vec{a})=\dfrac{9}{9}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{b}+\vec{c}$ und $pr_{\vec{b}}(\vec{a})+pr_{\vec{c}}(\vec{a})=\dfrac{2}{5}\vec{b}+\dfrac{7}{2}\vec{c}=\dfrac{1}{10}\left(4\vec{b}+35\vec{c}\right)$.

Aufgabe 8:

Es sei $(V,\boldsymbol{\sigma})$ ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit Skalarprodukt $\boldsymbol{\sigma}$. Es sei $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\right\}$ ein Erzeugendensystem für $\boldsymbol{V}$. Dann existiert ein orthogonales Erzeugendensystem $\left\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n\right\}$ mit $\boldsymbol{\sigma}(\vec{g}_i;\vec{g}_j)=0$ für alle $i, j \in \{1,2,\ldots,n\}, i \neq j$.

Beweis durch vollständige Induktion nach $k \leq n$:

Wir setzen $\vec{g}_1 = \vec{a}_1$ und $\vec{g}_i = \vec{a}_i - pr_{\vec{g}_1}(\vec{a}_i) - pr_{\vec{g}_2}(\vec{a}_i) - \cdots - pr_{\vec{g}_{i-1}}(\vec{a}_i)$.

Induktionsverankerung: Für $n=1$ ist die Behauptung offensichtlich.

Induktionsvoraussetzung: Sei also $n \geq 1$ und die Behauptung für $k \leq n$ richtig.

Induktionsschritt: Es sei $\vec{g}_{k+1} = \vec{a}_{k+1} - pr_{\vec{g}_1}(\vec{a}_{k+1}) - pr_{\vec{g}_2}(\vec{a}_{k+1}) - \cdots - pr_{\vec{g}_k}(\vec{a}_{k+1})$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\boldsymbol{\sigma}(\vec{g}_i;\vec{g}_j)=0$ für alle $i, j \in \{1,2,\ldots,k\}, i \neq j$.

Zu zeigen bleibt $\vec{g}_{k+1} = \vec{a}_{k+1} - pr_{\vec{g}_1}(\vec{a}_{k+1}) - pr_{\vec{g}_2}(\vec{a}_{k+1}) - \cdots - pr_{\vec{g}_k}(\vec{a}_{k+1}) \perp \vec{g}_i$ für $i \in \{1,2,\ldots,k\}$.

Wir zerlegen $\vec{g}_{k+1}$. Es gilt $\vec{g}_{k+1} = \vec{a}_{k+1} - pr_{\vec{g}_i}(\vec{a}_{k+1}) \perp \vec{g}_i$ für $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ nach Konstruktion und $pr_{\vec{g}_j}(\vec{a}_{k+1}) \perp \vec{g}_i$ für $i, j \in \{1,2,\ldots,k\}, i \neq j$ nach Induktionsvoraussetzung. Folglich gilt $\vec{g}_{k+1} = \vec{a}_{k+1} - pr_{\vec{g}_1}(\vec{a}_{k+1}) - pr_{\vec{g}_2}(\vec{a}_{k+1}) - \cdots - pr_{\vec{g}_k}(\vec{a}_{k+1}) \perp \vec{g}_i$ für $i \in \{1,2,\ldots,k\}$. Damit ist alles gezeigt.

Bemerkung:

Dieses Verfahren ist konstruktiv und gibt eine Möglichkeit die ursprüngliche Basis zu rekonstruieren. Außerdem ist eine leichte Verallgemeinerung möglich, indem man sich erst auf einen orthogonalen Unterraum beschränkt und daraus eine globale Orthogonalbasis konstruiert.