## *Schneiden, Berühren und Tangieren von Funktionen und Abbildungen*

**Vereinbarung:** Im Folgenden wird zwischen den Begriffen Abbildung und Funktion kein Unterschied gemacht. Sie werden synonym verwendet. Eine Abbildung $\alpha$ ist folglich $\alpha : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ mit $\alpha(x) \in \mathbb{R}^n$, also $\alpha(x) = \big(\alpha_1(x);\ \ldots;\ \alpha_n(x)\big)$ wobei $\alpha_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

**Definition 1:**

Es seien $f$ und $g$ Abbildungen, $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Es sei $a \in D$. Es seien $h$ und $q$ definiert durch $h := f - g$ sowie $q := q_1 \times \cdots \times q_n$. Ferner $\big(q_1(x)(x-a);\ \ldots; q_n(x)(x-a)\big) := h(x)$.

1. Die Funktionen $f$ und $g$ ***schneiden*** genau dann ***transversal*** an der Stelle $a \in D$, in Zeichen $f \pitchfork_a g$, wenn $h(a) = 0$ ***und*** $q(a) \neq 0$.
2. Die Funktionen $f$ und $g$ ***schneiden*** genau dann ***tangential*** an der Stelle $a \in D$, in Zeichen $f \asymp_a g$, wenn $h(a) = 0$ ***und*** $q(a) = 0$.

***Verbal kann kurz gesagt werden:***

$f$ und $g$ ***schneiden*** genau dann ***transversal*** an der Stelle $a \in D$, wenn $f - g$ eine einfache Nullstelle an der Stelle $a \in D$ besitzt.

$f$ und $g$ ***schneiden*** genau dann ***tangential*** an der Stelle $a \in D$, wenn $f - g$ mindestens eine doppelte Nullstelle an der Stelle $a \in D$ besitzt.

Statt ***schneidet tangential*** wird synonym nur ***tangiert*** oder ***berührt*** verwendet.

Im Falle einer Definitionslücke $a \in D$ für $q$ ist diese Definition unbrauchbar. Sind die Funktionen jedoch differenzierbar, so erhalten wir eine Vereinfachung.

**Definition 2:**

Es seien $f$ und $g$ zwei Abbildungen, $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. An der Stelle $a \in D$ seien $f$ und $g$ differenzierbar. Es sei $h := f - g$.

3. Die Funktionen $f$ und $g$ ***schneiden*** genau dann ***transversal*** an der Stelle $a \in D$, in Zeichen $f \pitchfork_a g$, wenn $h(a) = 0$ ***und*** $h'(a) \neq 0$ bzw. $f(a) = g(a)$ ***und*** $f'(a) \neq g'(a)$.
4. Die Funktionen $f$ und $g$ ***schneiden*** genau dann ***tangential*** an der Stelle $a \in D$, in Zeichen $f \asymp_a g$, wenn $h(a) = 0$ ***und*** $h'(a) = 0$ bzw. $f(a) = g(a)$ ***und*** $f'(a) = g'(a)$.

Mit $q$ ist $q(a) = h'(a) = f'(a) - g'(a)$.

**Beispiele**

1. Es seien $f(x) := \left(x; \frac{1}{2}x^2\right)$ und $g(x) := \left(x; \sqrt{x - \frac{3}{4}}\right)$. Zeigen Sie, dass sich $f$ und $g$ an der Stelle $x = 1$ berühren. Zeigen Sie dazu: $f'(x) := (1; x)$ und $g'(x) := \left(1; \frac{1}{\sqrt{4x-3}}\right)$. Ferner

$$f(x)-g(x)=\left(0;\frac{1}{2}\left[x^2-\sqrt{4x-3}\right]\right)=\left(0;\frac{1}{2}(x-1)\left[(x+1)-\frac{4}{\sqrt{4x-3}+1}\right]\right)$$

$$=\left(0;2(x-1)^2\left[\frac{x^2+2x+3}{(x+1)\left(\sqrt{4x-3}-x+3\right)\left(\sqrt{4x-3}+1\right)}\right]\right).$$

**2.** Es seien $f$ und $g$ Abbildungen, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $f(x):=\left(x^2-1;x\left(x^2-1\right)\right)$ und $g:[-\pi;\pi[\to\mathbb{R}^2$, $g(x):=\left(-\cos x;\ -\sin x\right)$. Zeigen Sie die Berührung der Abbildungen in $x=0$ .

**3.** Verallgemeinern Sie das Berühren auf Abbildungen $f:U\subseteq\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ .