Polynome

Polynommultiplikation

Polynome[1] sind relativ einfach zu multiplizieren und dividieren. Dazu vergleichen wir mit der gewöhnlichen Multiplikation und Division natürlicher Zahlen.

Beispiel: $2563 \cdot 45 = 115335$

Schreiben wir das Produkt mittels 10er -Potenzen und multiplizieren die Faktoren, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\left(2\cdot 10^3+5\cdot 10^2+6\cdot 10+3\right)\cdot(4\cdot 10+5) &= 8\cdot 10^4+20\cdot 10^3+24\cdot 10^2+12\cdot 10\\ &\quad\ \underline{\qquad\qquad +10\cdot 10^3+25\cdot 10^2+30\cdot 10+15}\\ &= 8\cdot 10^4+30\cdot 10^3+49\cdot 10^2+42\cdot 10+15.\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis stimmt zunächst nicht, so der Anschein, mit dem Ergebnis 115335 überein. Bei genauer Betrachtung bemerken wir jedoch schnell, dass in $8\cdot 10^4+30\cdot 10^3+49\cdot 10^2+42\cdot 10+15$ alle Überträge noch in den Zahlen $15,\ 42,\ 49,\ 30$ vorhanden sind. Führen wir die Überträge aus, so folgt

$$8\cdot 10^4+30\cdot 10^3+49\cdot 10^2+42\cdot 10+15=1\cdot 10^5+1\cdot 10^4+5\cdot 10^3+3\cdot 10^2+3\cdot 10+5\,.$$

Verifizieren Sie dies.

Ersetzen wir nun die „Basis“ 10 durch X, so erhalten wir

$$\left(2\cdot X^3+5\cdot X^2+6\cdot X+3\right)\cdot(4\cdot X+5)=8\cdot X^4+30\cdot X^3+49\cdot X^2+42\cdot X+15.$$

Die Zahlen als Begleiter der Potenzen von X heißen ***Koeffizienten***, das Berechnen des Produktes die ***Polynommultiplikation***. Wir werden bald beliebige reelle Zahlen zulassen. Natürlich ist $X^0 := 1$ festgelegt und, damit keine unnötigen Fallunterscheidungen nötig sind, sogar $0^0 := 1$.

Merke: Eine ***Polynommultiplikation*** besitzt ***keine Überträge***.

In der Potenzschreibweise in der Unbestimmten X liegt ein gewisser Vorteil klar auf der Hand.

Nehmen wir einmal die Basis 7. Wir substituieren die 7 in X und erhalten

$$\left(2\cdot 7^3+5\cdot 7^2+6\cdot 7+3\right)\cdot(4\cdot 7+5)=8\cdot 7^4+30\cdot 7^3+49\cdot 7^2+42\cdot 7+15.$$

Beachten wir noch die Überträge, so folgt

$$\begin{aligned}\left(2\cdot 7^3+5\cdot 7^2+6\cdot 7+3\right)\cdot(4\cdot 7+5) &= 8\cdot 7^4+30\cdot 7^3+49\cdot 7^2+42\cdot 7+15\\ &= (1\cdot 7+1)\cdot 7^4+(4\cdot 7+2)\cdot 7^3+(7\cdot 7)\cdot 7^2+(6\cdot 7)\cdot 7+(2\cdot 7+1)\\ &= 1\cdot 7^5+6\cdot 7^4+2\cdot 7^3+6\cdot 7^2+2\cdot 7+1\\ &= 162621.\end{aligned}$$

---

[1] *Polynom*: lat. Viele Namen, nicht verwechseln mit *Multinom* $(w+x+y+z)^n$, die Verallgemeinerung des Binoms $(x+y)^n$

Mit anderen Worten: $(2563)_7 \cdot (45)_7 = (162621)_7$. Das Rechnen in einer anderen Basis ist jetzt sehr einfach.

Übung: Interpretiere das Ergebnis in der Basis $16 \to X$, also $\left(2\cdot 16^3 + 5\cdot 16^2 + 6\cdot 16 + 3\right)\cdot(4\cdot 16+5)$.

Polynome besitzen folglich Vorteile. Es gibt noch viele andere Vorteile, auf die ich hier nicht eingehen kann, da sie im Mathematikstudium behandelt werden.
Vielleicht ***ein Beispiel***.
Substituiere in X eine quadratische Matrix! ***Leistungskurs Jahrgang 12 oder 13***.

Wie schon gesagt können als Koeffizienten beliebige reelle Zahlen eingesetzt werden. Betrachten wir daher ein Beispiel in der Untermenge der **Ganzen Zahlen** $\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}\left(2X^3-3X^2-5X+3\right)\cdot\left(7X^2-4X-1\right) &= 14X^5-21X^4-35X^3+21X^2\\ &\quad -8X^4+12X^3+20X^2-12X\\ &\quad -2X^3+3X^2+5X-3\\ \hline &= 14X^5-29X^4-25X^3+44X^2-7X-3.\end{aligned}$$

Polynomdivision

Kommen wir nun zur Division. In der Darstellung der Durchführung kennen ***wir*** im Wesentlichen zwei Formen. Ist $2\,563$ der Divisor, so schreiben wir entweder

$$\begin{array}{l} 115\,335 : 2\,563 = 45.\\ \underline{102\,52}\\ \;\;12\,815\\ \;\;\underline{12\,815}\end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{l} 115\,335 = 2\,563\cdot 45\\ \underline{102\,52}\\ \;\;12\,815\\ \;\;\underline{12\,815}\end{array}$$

Persönlich ziehe ich die zweite Schreibweise vor. Zur Verdeutlichung noch ein ***kleines Beispiel:*** $13 = 5\cdot 2+3 = 5\cdot\left(2+\frac{3}{5}\right)$, wobei natürlich $2+\frac{3}{5} = 2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}(=2{,}6)$. Hier entscheidet jeder für sich!

Erstes Beispiel

In dem Produkt $\left(2\cdot 10^3+5\cdot 10^2+6\cdot 10+3\right)\cdot(4\cdot 10+5) = 8\cdot 10^4+30\cdot 10^3+49\cdot 10^2+42\cdot 10+15$ sei $2\cdot 10^3+5\cdot 10^2+6\cdot 10+3$ der Divisor. Wir erhalten

$$\begin{array}{l} 8\cdot 10^4+30\cdot 10^3+49\cdot 10^2+42\cdot 10+15 = \overbrace{\left(2\cdot 10^3+5\cdot 10^2+6\cdot 10+3\right)}^{\text{Devisor}}\cdot(4\cdot 10+5).\\ \underline{-\left(8\cdot 10^4+20\cdot 10^3+24\cdot 10^2+12\cdot 10\right)}\\ \qquad 10\cdot 10^3+25\cdot 10^2+30\cdot 10+15\\ \qquad \underline{-\left(10\cdot 10^3+25\cdot 10^2+30\cdot 10+15\right)}\end{array}$$

Schreiben wir X statt 10 ohne $\cdot$, so erhalten wir

$$\begin{array}{l} 8X^4+30X^3+49X^2+42X+15 = \overbrace{\left(2X^3+5X^2+6X+3\right)}^{\text{Devisor}}\cdot(4X+5).\\ \underline{-\left(8X^4+20X^3+24X^2+12X\right)}\\ \qquad 10X^3+25X^2+30X+15\\ \qquad \underline{-\left(10X^3+25X^2+30X+15\right)}\end{array}$$

Zweites Beispiel

Wir dividieren $14X^5-29X^4-25X^3+44X^2-7X-3$ durch $7X^2-4X-1$, so erhalten wir

$$
\begin{array}{l}
\quad 14X^5-29X^4-25X^3+44X^2-7X-3=\left(7X^2-4X-1\right)\left(2X^3-3X^2-5X+3\right).\\
-\underline{\left(14X^5-\ \ 8X^4-\ \ 2X^3\right)}\\
\qquad\quad -21X^4-\ 23X^3+44X^2\\
\qquad -\underline{\left(-21X^4+12X^3+\ \ 3X^2\right)}\\
\qquad\qquad\qquad -35X^3+\ 41X^2-7X\\
\qquad\qquad\quad -\underline{\left(-35X^3+20X^2+5X\right)}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 21X^2-12X-3\\
\qquad\qquad\qquad\qquad -\underline{\left(21X^2-12X-3\right)}
\end{array}
$$

Übung

Bilden Sie eigene Produkte. Dividieren Sie das jeweilige Produkt anschließend durch seine Faktoren.

Bemerkung

Eine Frage ist noch offen. Warum sind $2X^3+5X^2+6X+3$ und $4X+5$ keine Divisoren des Polynoms $X^5+X^4\ +5X^3\ +3X^2\ +3X\ +5$, obwohl die Darstellung

$$1\cdot 10^5+1\cdot 10^4+5\cdot 10^3+3\cdot 10^2+3\cdot 10+5=\left(2\cdot 10^3+5\cdot 10^2+6\cdot 10+3\right)\cdot(4\cdot 10+5)$$

des Produkts korrekt angegeben ist.

Natürlich sind beide Polynome keine Divisoren, da sonst auch das Produkt

$$8X^4+30X^3+49X^2+42X+15$$

ein Divisor wäre. Dies ist nicht der Fall. Zeigen Sie dies!

Die Faktorisierung eines Polynoms, falls sie existiert, muss natürlich für ***jedes*** X stimmen. Da außer den Zahlen, genauer den Koeffizienten, nur noch das Symbol X existiert, wird $R[X]$ für die Menge aller Polynome geschrieben, wobei R stellvertretend für $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$, also für die Ganzen, die Rationalen oder die Reellen Zahlen steht. In der Schule betrachten wir nur $\mathbb{R}[X]$. Damit stellt sich die Frage, ob $X^5+X^4\ +5X^3\ +3X^2\ +3X\ +5$ faktorisierbar ist? Die Antwort ist JA! Wie ein Divisor gefunden wird, ist jedoch nicht einfach.

Ansatz für einen linearen Faktor

$$X^5+X^4\ +5X^3\ +3X^2\ +3X\ +5=(aX+b)\left(cX^4+dX^3+eX^2+fX+g\right).$$

Folglich muss wegen

$$
\begin{aligned}
&(aX+b)\left(cX^4+dX^3+eX^2+fX+g\right)=\\
&\qquad acX^5+(ad+bc)X^4+(ae+bd)X^3+(af+be)X^2+(ag+bf)X+bg
\end{aligned}
$$

$ac=1$, $ad+bc=1$, $ae+bd=5$, $af+be=3$, $ag+bf=3$ und $bg=5$ sein.

Zwei Unbekannte lassen sich sofort eliminieren, nämlich $c = \frac{1}{a}$ und $g = \frac{5}{b}$, da $a \neq 0$ sowie $b \neq 0$ sein müssen. Bleiben noch 5 Unbekannte.

Mancher erinnert sich auch an ***Nullstellen***.

Wenn die Faktorisierung für alle reellen Zahlen zutrifft, dann wäre eine Nullstelle eines linearen Faktors auch Nullstelle des Polynoms schlechthin.

Suchen wir deshalb eine Nullstelle des Polynoms $X^5 + X^4 + 5X^3 + 3X^2 + 3X + 5$. Hier fällt sofort auf, dass je zwei Koeffizienten gleich sind. Setzen wir -1 ein, so folgt

$$-1 + 1 + 5 \cdot (-1) + 3 + 3 \cdot (-1) + 5 = 0 .$$

Folglich muss $X + 1$ ein Divisor sein. Setzen wir eine Polynomdivision an. Wir erhalten

$$\begin{array}{l}
X^5 + X^4 \; + 5X^3 + 3X^2 + 3X + 5 = \overbrace{(X+1)}^{\text{Divisor}}(X^4 + 5X^2 - 2X + 5). \\
\underline{-(X^5 + X^4) \qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad 5X^3 + 3X^2 + 3X + 5 \\
\qquad\quad \underline{-(5X^3 + 5X^2) \qquad\quad} \\
\qquad\qquad\qquad -2X^2 + 3X + 5 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-(-2X^2 - 2X) \quad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +5X + 5 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-(+5X + 5)}
\end{array}$$

Setzen wir unsere gefundenen Koeffizienten der Faktorisierung ein, so finden wir in der Tat eine Bestätigung des Gleichungssystems, also $a = b = c = 1$, $d = 0$, $e = g = 5$ sowie $f = -2$.

Versuchen wir unser Glück noch einmal mit $X^4 + 5X^2 - 2X + 5$. Eine Nullstelle, falls sie existiert, sehe ich nicht sofort. Mir muss noch eine weitere Möglichkeit einfallen. Leiten wir dieses Polynom ab, um nach Extremstellen zu suchen. Die Ableitung ist $4X^3 + 10X - 2$ und wir sehen gleich, dass hier eine Nullstelle, also ein mögliches Extremum existiert. Bilden wir daher noch die zweite Ableitung, also $12X^2 + 10$. Die zweite Ableitung ist immer ≥ 10, also positiv. Folglich gibt es im Intervall $[0;0,25]$ einen Tiefpunkt. Diese Nullstelle lautet mit Hilfe des Rechners $x_1 = 0,1992094492$ und wir sehen jetzt, dass der einzige Extremwert ein positives Minimum ist. Damit existieren keine weiteren Nullstellen des Polynoms $X^4 + 5X^2 - 2X + 5$.

Kommen wir daher noch einmal zurück zu unserer Ausgangsfrage nach der Faktorisierbarkeit von $115\,335$. Wir haben eine gefunden. Es gilt auch $115\,335 = 11 \cdot 10\,485$.

Die angegebene Faktorisierung gilt nun in jedem *b*-adischen Zahlensystem. Hierbei ist *b* die Basis des Systems. Ersetze also X durch b. Einen Fall für $b = 7$ haben wir oben schon besprochen.