Differentialgleichungen, die in der Oberstufe behandelt werden können

In der Oberstufe kann die natürliche Exponentialfunktion wie folgt eingeführt werden.

Gesucht ist eine Funktion f mit folgenden Eigenschaften:

1. $f'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$
2. $f(0) = 1$

Die Steigung der Tangente stimmt an jeder Stelle mit dem Funktionswert überein. Und der Graph der Funktion trägt den Punkt $(0|1)$. Wegen

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

nach 1. gilt allgemeiner

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = f^{(n+1)}(x) = \cdots \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

Gesucht ist folglich eine Funktion f mit den Eigenschaften:

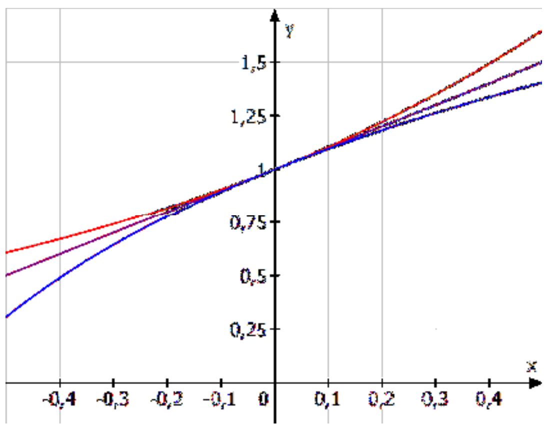
1. $f^{(n)}(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$
2. $f(0) = 1$

Es ist schnell zu zeigen: **Die gesuchte Funktion steigt streng monoton und ist immer positiv.**

Zunächst ist die Steigung der Tangente 1 an der Stelle 0. An dieser Stelle existiert auch kein Wendepunkt, denn sonst wäre $f^{(2n)}(0) = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$, Widerspruch zu $f(0) = 1$. Es existiert aber auch an keiner weiteren Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Wendepunkt. Wäre es so, dann $f^{(2n)}(x_0) = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und damit $f^{(n)}(x_0) = f(x_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach 1. Da $f(x_0 - \varepsilon) \cdot f(x_0 + \varepsilon) < 0$ erhalten wir wieder einen Widerspruch zu 1. Mit gleichen Argumenten existiert auch kein lokales Extremum. Damit steigt die Funktion streng monoton und ist immer positiv sowie keine Ableitung null.

Folglich verläuft der Graph der gesuchten Funktion ganz oberhalb oder ganz unterhalb der Tangente $t(x) = x + 1$. Angenommen, der Graph verliefe unterhalb der Tangente $t(x) = x + 1$. Dann wäre $f'(x_1) < f'(x_0)$ für $x_1 > x_0$, also auch $f(x_1) < f(x_0)$ und damit

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$$



für jedes $x > x_0$, also auch $x_0 = 0$ und damit $f'(0) \leq 0$. Widerspruch! Damit liegt der Graph oberhalb der Tangente $t(x) = x + 1$ und zeigt exponentielles Verhalten.

Ist $\ln(x) := \int_1^x \frac{1}{z} dz$ schon definiert, kann mittels Umkehrfunktion sofort die Exponentialfunktion definiert werden. Dann sind die Eigenschaften 1. und 2. einfach zu verifizieren.

Es bleibt noch die Eindeutigkeit dieser Funktion zu zeigen.

Angenommen, es gibt eine weitere Funktion g mit diesen Eigenschaften. Da $g(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ betrachten wir den Quotienten

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Wir erhalten $h(0) = 1$ und

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g^2(x)} = \frac{0}{g^2(x)} = 0.$$

Folglich ist h konstant und aufgrund $h(0) = 1$ erhalten wir $h(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also $f = g$.

Eine Gleichung $y' = y \Leftrightarrow y' - y = 0$ heißt eine Differentialgleichung erster Ordnung und $f(0) = 1$ die Anfangsbedingung $(0 \mid 1)$ für die „Lösung" der Funktion f, d. h. $f'(x) - f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Ordnung entspricht dabei der höchsten Ableitung. $5y''' - 4y' + 2y = 0$ ist folglich von dritter Ordnung. Die Differentialgleichung $y''' - 0{,}8y' + 0{,}4y = 0$ ist äquivalent zu $5y''' - 4y' + 2y = 0$. Hierzu gilt es nun alle Funktionen zu finden, die diese Gleichung erfüllen.

Definition

Eine Gleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,\ a_i \in \mathbb{R},\ 0 \leq i \leq n-1, i \in \mathbb{N}$$

heißt ***homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten***. Sie heißt ***homogen***, da die rechte Seite null ist.

Punkte $(x_0 \mid y_0)$, $(x_0 \mid y_0')$, …, $\left(x_0 \mid y_0^{(n-1)}\right)$, die von der Lösungsfunktion erfüllt werden müssen, heißen Anfangsbedingungen, kurz AB.

Ist $r(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so heißt

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = r,\ a_i \in \mathbb{R},\ 0 \leq i \leq n-1, i \in \mathbb{N}$$

inhomogen.

Eine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ die dieser Gleichung und Anfangsbedingungen genügt. D. h.: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + a_{n-2} f^{(n-2)}(x) + \cdots + a_2 f''(x) + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0$$

und $f(x_0) = y_0, f'(x_0) = y_0', \ldots, f^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ (Aus allen Kurven wird eine fixiert).

Die Dgl. heißt ***linear***, weil mit den Lösungen f und g auch af für jedes $a \in \mathbb{R}$ und $f+g$ Lösungen sind.

Sind p und q Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung, so ist $p-q$ eine Lösung der homogenen Dgl.

Manche Autoren nennen die Anfangsbedingungen auch ein Problem. Ein solches sehe ich nicht.

Auf dem Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen $\mathcal{D}(I;\mathbb{R})$ führen wir Abbildungen ein.

$$D: \begin{cases} \mathcal{D}(I;\mathbb{R}) \to \mathcal{D}(I;\mathbb{R}) \\ \quad f^{(n)} \quad \mapsto \quad f^{(n+1)} \end{cases}, \qquad \mathbb{1}: \begin{cases} \mathcal{D}(I;\mathbb{R}) \to \mathcal{D}(I;\mathbb{R}) \\ \quad f \quad \mapsto \quad f \end{cases}$$

D ordnet einer Funktion seine nächsthöhere Ableitung zu (***Differentialoperator***). Entsprechend ordnet $\mathbb{1}$ die Funktion sich selbst zu (***Identität***).

Dann kann die Dgl.

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = r,\ a_i \in \mathbb{R},\ 0 \le i \le n-1, i \in \mathbb{N}$$

mit $\mathbb{1}(y) = y$ und $D^m y = y^{(m)}$ bzw. $\left(D^m f\right)(x) = f^{(m)}(x)$ wie folgt geschrieben werden.

$$\left(D^n + a_{n-1} D^{n-1} + a_{n-2} D^{n-2} + \cdots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0 \mathbb{1}\right) y = r,\ a_i \in \mathbb{R},\ 0 \le i \le n-1, i \in \mathbb{N}$$

Bemerkung

In dieser Zusammenstellung sollen Ideen vermittelt werden, Lösungen beliebiger Ordnung zu finden. Es ist nicht beabsichtigt eine Theorie der Differentialgleichungen auch nur ansatzweise zu betrachten. Dazu verweise ich auf die bestens gegebenen Vorlesungen und Bücher, deren Literatur am Schluss erscheint. Wir zeigen: Ist

$$D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0 \mathbb{1}$$
$$= \left(D^{n-1} + \alpha_{n-2} D^{n-2} + \cdots + \alpha_2 D^2 + \alpha_1 D + \alpha_0 \mathbb{1}\right)(D + \alpha \mathbb{1})$$

eine Zerlegung mit Linearfaktor $D + \alpha\mathbb{1}$, so ist, falls f eine Lösung von $y' + \alpha y = 0$ ist, d. h. $\left((D + \alpha\mathbb{1}) f\right)(x) = f'(x) + \alpha f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, auch f eine Lösung von

$$\left(D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0 \mathbb{1}\right) y = 0$$

d. h.

$f^{(n)}(x)+a_{n-1}f^{(n-1)}(x)+\cdots+a_2f''(x)+a_1f'(x)+a_0f(x)=0$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

Ist umgekehrt h eine Lösung der Dgl.

$$\left(D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_2D^2+a_1D+a_0\mathbb{1}\right)y=0\text{, also}$$

$h^{(n)}(x)+a_{n-1}h^{(n-1)}(x)+\cdots+a_2h''(x)+a_1h'(x)+a_0h(x)=0$ für alle $x\in\mathbb{R}$, so ist $g:=\left(D^{n-1}+\alpha_{n-2}D^{n-2}+\cdots+\alpha_2D^2+\alpha_1D+\alpha_0\mathbb{1}\right)h$ eine Lösung der Dgl. $(D+\alpha\mathbb{1})y=0$.

Dies ist eine simple Tatsache und sofort nachvollziehbar, umfassen natürlich nicht alle Möglichkeiten.

Für den Insider haben wir hier eine Zerlegung in Bild und Kern. Der $k[X]$-Modul wird zu einem $k[D]$- Modul. Natürlich wird hier keine Modul-Theorie mit charakteristischen Polynom, Minimalpolynom und Elementarteilern betrieben.

Starten wir mit der ersten Ordnung und zwar immer vom einfachsten zum komplizierteren Fall. Der geometrische Aspekt steht, wenn nötig, selbstverständlich im Vordergrund.

Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, eine homogene lineare Dgl. 1. Ordnung $y'+ay=0,\ a=0$. Gesucht ist folglich eine Funktion f, deren erste Ableitung null ergibt. Dies leistet nur $f(x)=c$, c konstant. Die inhomogene Dgl. kann sofort durch Integration gelöst werden.

$$f'(x)=r(x)\Rightarrow f(x)-y_0=\int_{x_0}^{x}r(z)dz$$

Kommen wir zu dem allgemeinen Fall $y'+ay=0,\ a\in\mathbb{R},\ a\neq0$.

Statt $y'+ay=0$ schreiben wir $(D+a\mathbb{1})y=0$, $a\in\mathbb{R}$ fest.

Sie kann sofort durch Integration gelöst werden. Hier ist die eindeutige Lösung nach obigen Vorbild bekannt und kann sofort angegeben werden: $f(x)=ce^{-ax}$, denn

$$f'(x)=-ace^{-ax}=-af(x)\Leftrightarrow f'(x)+af(x)=0.$$

Mit der Anfangsbedingung $(x_0\mid y_0)$ ist $y_0=f(x_0)=ce^{-ax_0}$, d. h. $c=y_0e^{ax_0}$. Also

$$f(x)=y_0e^{ax_0}e^{-ax}=y_0e^{-a(x-x_0)}\text{ für alle }x\in\mathbb{R}.$$

Damit sind schon die Lösungen der homogenen linearen Dgl. 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten bekannt.

Ist $(D+a\mathbb{1})y=0$, $a\in\mathbb{R}$ fest mit der Anfangsbedingung $(x_0\mid y_0)$, so ist $f(x)=y_0e^{-a(x-x_0)}$ für alle $x\in\mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen Dgl.

Für eine inhomogene Dgl. $(D+a\mathbb{1})y=r$ benötigen wir eine spezielle Lösung. Wie sie gefunden wird ist völlig egal. Sie darf auch geraten werden. In vielen Fällen wird der Ansatz „Variation der Konstanten" gewählt. Ist $f(x)=ce^{-a(x-x_0)}$ eine Lösung der homogenen Dgl., so wählen wir

$$g(x)=c(x)e^{-a(x-x_0)}$$

für die Suche nach einer speziellen Lösung. Es folgt

$$g'(x)=c'(x)e^{-a(x-x_0)}-ac(x)e^{-a(x-x_0)} \Leftrightarrow g'(x)+ag(x)=c'(x)e^{-a(x-x_0)}$$

und damit

$$c'(x)e^{-a(x-x_0)}=r(x)\Leftrightarrow$$
$$c'(x)=r(x)e^{a(x-x_0)}.$$

Mit der partikulären Lösung $c(x):=\int_{x_0}^{x} r(\lambda)e^{a(\lambda-x_0)}d\lambda$, z. B. r ist stetig, lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.

$$h(x)=f(x)+g(x)=(c+c(x))e^{-a(x-x_0)}.$$

Die Anfangsbedingung ist noch zu lösen. Mit $y_0=h(x_0)=c+c(x_0)=c \Leftrightarrow c=y_0$ folgt

$$h(x)=\left(y_0+\int_{x_0}^{x} r(\lambda)e^{a(\lambda-x_0)}d\lambda\right)e^{-a(x-x_0)}.$$

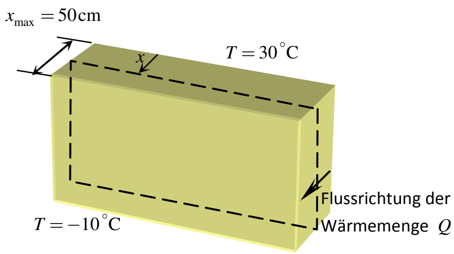
Der Spezialfall $a=0$ ist hier enthalten.

Die Differentialgleichung $(D+a\mathbb{1})y=r$, $a\in\mathbb{R}$ fest, mit der Anfangsbedingung $(x_0 \mid y_0)$, hat die allgemeine Lösung

(1) $h(x)=\left(y_0+\int_{x_0}^{x} r(\lambda)e^{a(\lambda-x_0)}d\lambda\right)e^{-a(x-x_0)}$, für alle $x\in\mathbb{R}$.

Beispiele

1. Temperaturgefälle durch eine homogene isotrope Wand



Bestimmen Sie die Differentialgleichung des Temperaturgefälles durch die unbegrenzte Wand der Dicke $50\,\text{cm}$ in Abhängigkeit der Wärmemenge Q, wenn $\lambda=0{,}0025\frac{\text{W}}{\text{mK}}$ die Wärme-leitfähigkeit (Wärmeleitzahl) der Wand darstellt. Das

Temperaturgefälle ist durch den Wärmefluss senkrecht zur Wandfläche A gegeben.

Welche Wärme (Energie) strömt in einer Stunde durch eine Fläche von $1\,\mathrm{m}^2$?

Dabei gehen wir davon aus, dass es sich um einen stationären Vorgang handelt, d. h., die Daten ändern sich nicht.

Lösung

Mit x bezeichnen wir den senkrechten Abstand von der Innenwandoberfläche mit der Anfangsbedingung $\left(x_0 = 0\,\mathrm{cm} \mid T(x_0) = 30^\circ\mathrm{C}\right)$. Das Temperaturgefälle wird durch $\frac{dT}{dx}(x) := T'(x)$ beschrieben (eindimensionaler Fall). Aufgrund der Wandbeschaffenheit herrscht an jeder Stelle in der zur Innenwand parallelen Fläche $A_{\|}(x)$ gleiche Temperatur. Aufgrund der Isotropie ist das Temperaturgefälle in der Wand linear, also

$$T(x) = \frac{dT}{dx}(x - x_0) + T(x_0) = \frac{T(x_{\max}) - T(x_0)}{x_{\max} - x_0}(x - x_0) + T(x_0).$$

Mit fallender Außentemperatur steigt die nach außen strömende Wärmemenge. Es gilt daher: Die Wärmemenge ist proportional zur Fläche und zum negativen Temperaturgefälle

$$Q = -\lambda A \frac{dT}{dx} \Leftrightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{Q}{\lambda A}, \text{ also } Dy = -\frac{Q}{\lambda A}.$$

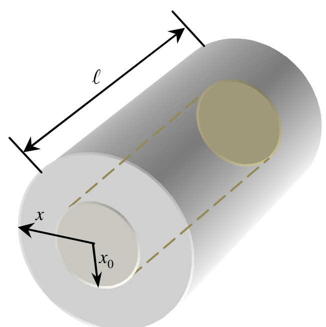
Die Lösung der Dgl. kann sofort durch Integration von $T'(x) = -\frac{Q}{\lambda A}$ gewonnen werden. Die allgemeine Lösung ist wie erwartet

$$T(x) - T(x_0) = -\frac{Q}{\lambda A}(x - x_0).$$

Mit $A = 1\,\mathrm{m}^2$, $\lambda = 0{,}0025\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{mK}}$ und $\frac{T(x_{\max}) - T(x_0)}{x_{\max} - x_0} = \frac{-10^\circ\mathrm{C} - 30^\circ\mathrm{C}}{50\,\mathrm{cm}} = -80\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}$ folgt $Q = 0{,}2\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$.

Damit errechnet sich die durch die Wandfläche von $A = 1\,\mathrm{m}^2$ geströmte Energie zu $E_Q = 3600 \cdot 0{,}2\,\mathrm{J} = 720\,\mathrm{J}$.

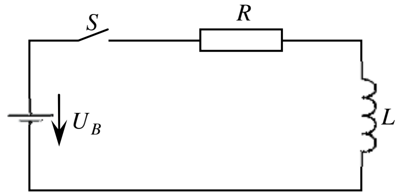
Zylinder

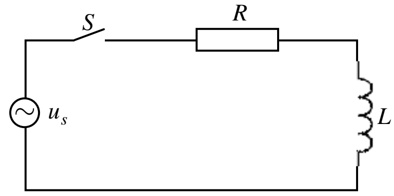


Wird die Wand durch ein von einer Substanz durchströmten Rohr ersetzt, das eine zylindrische Ummantelung besitzt, so ist im Abstand x vom Zentrum des Rohres der Flächeninhalt der Durchströmung $A = 2\pi x\ell$, $x \ge x_0$, ℓ fest. Die Dgl. lautet nun $Dy = -\frac{Q}{2\pi x\ell\lambda}$ und kann sofort durch Integration gelöst werden.

$$T(x) - T(x_0) = -\frac{Q}{2\pi\ell\lambda}\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) \Leftrightarrow T(x) = y_0 - \frac{Q}{2\pi\ell\lambda}\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

Elektromagnetische Vorgänge





2. Spule und Widerstand[1]

In einem Stromkreis liegen ein Widerstand $R = 20\,\Omega$, eine Spule $L = 2\,\mathrm{H}$ ($1\,\mathrm{H} = 1\,\Omega\mathrm{s}$) und

a) eine Batterie $U_0 = 4\,\mathrm{V}$ durch einen Schalter getrennt,

b) ein Sinusgenerator mit $u_s = 100\sin(\omega t)\,\mathrm{V}$, $\omega = 100\pi\frac{1}{\mathrm{s}}$

in Reihe.

Gesucht ist die Stromstärke nach Schließen des Schalters mittels einer Funktion.

Lösung

Der Stromfluss i durch den Widerstand R liefert einen Spannungsabfall von $u_R = Ri$, durch die Spule L einen Spannungsabfall $u_L = L\frac{di}{dt}$. Mit $u_L + u_R = U_0$ folgt die inhomogene lineare Dgl. 1. Ordnung

$$L\frac{di}{dt} + Ri = U_0 \Leftrightarrow \left(D + \frac{R}{L}\mathbb{1}\right)i = \frac{R}{L}I_0 .$$

Die Lösung der homogenen Dgl. lautet $i(t) = ce^{-\frac{R}{L}t} = ce^{-\frac{t}{\tau}}$.

Zu a) Für eine spezielle Lösung finden wir mit der AB $(0\,\mathrm{s}\,|\,0\,\mathrm{A})$ bzw. $i(0\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{A}$ und $i(t) = i_s(t)e^{-\frac{R}{L}t}$ durch Integration $i_s(t) = \frac{R}{L}I_0\int\limits_0^t e^{\frac{R}{L}\lambda}d\lambda = I_0\left(e^{\frac{R}{L}t} - 1\right)$ die Lösung der inhomogenen Dgl.

$$i(t) = I_0\left(e^{\frac{R}{L}t} - 1\right)e^{-\frac{R}{L}t} = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Im Augenblick des Einschaltens wird durch den eingeprägten Strom der Spannungsquelle in der Spule ein Magnetfeld aufgebaut, welches einen Induktionsstrom erzeugt. Da dieser dem angelegten Strom entgegenwirkt, steigt der Stromfluss langsam stetig an. Da in R der gesamte Widerstand des Kreises vereint ist, erreicht die Stromstärke maximal $I_0 = \frac{U_0}{R} = \frac{4\,\mathrm{V}}{20\,\Omega} = 0{,}2\,\mathrm{A}$. $\tau = \frac{L}{R} = \frac{2\,\mathrm{H}}{20\,\Omega} = 0{,}1\mathrm{s}$ ist eine Zeitkonstante. Der Anstieg der Stromstärke im Augenblick des Einschaltens beträgt $i'(0) = \frac{I_0}{\tau} = \frac{0{,}2\,\mathrm{A}}{0{,}1\mathrm{s}} = 2\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}}$. Wäre $U_0 = 0$, so auch $i(t) \equiv 0$.

Zu b) Wir integrieren $i_s(t) = 0{,}5\,\mathrm{A}\int\limits_0^t \sin(\omega\lambda)e^{a\lambda}d\lambda$, $a = \frac{R}{L} = 10\frac{1}{\mathrm{s}}$, $\omega = 100\pi\frac{1}{\mathrm{s}}$.

[1] http://www.dr-gert-hillebrandt.de/pdf/schule/Physik%20Schule/Laden%20und%20Entladen%20einer%20Spule.pdf

Eine Stammfunktion von $\sin(\omega t)e^{at}$ ist $C(t)=\frac{a}{a^2+\omega^2}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{a}\cos\omega t\right)e^{at}$, denn

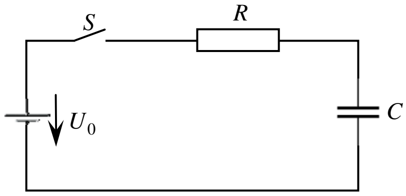
$C'(t)=\frac{a}{a^2+\omega^2}\left(\omega\cos\omega t+a\sin\omega t+\frac{\omega^2}{a}\sin\omega t-a\frac{\omega}{a}\cos\omega t\right)e^{at}=\sin\omega t e^{at}$. Folglich ist

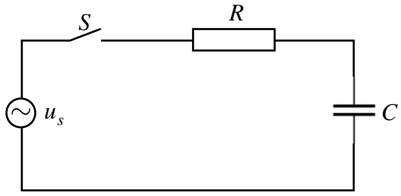
$$
\begin{aligned}
i_s(t)&=0{,}5\,\mathrm{A}\int_0^t \sin(\omega\lambda)e^{a\lambda}d\lambda=0{,}5\,\mathrm{A}\frac{a}{a^2+\omega^2}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{a}\cos\omega t\right)e^{at}+0{,}5\,\mathrm{A}\frac{\omega}{a^2+\omega^2}\\
&=5{,}06093\cdot10^{-5}\left(\sin\left(100\pi\tfrac{1}{\mathrm{s}}t\right)-10\pi\cos\left(100\pi\tfrac{1}{\mathrm{s}}t\right)\right)e^{10\frac{1}{\mathrm{s}}\cdot t}\,\mathrm{A}+5{,}06093\pi\cdot10^{-4}\,\mathrm{A}
\end{aligned}
.
$$

Die Lösung der inhomogenen Dgl. zu der Anfangsbedingung $(0\,\mathrm{s}\,|\,0\,\mathrm{A})$ lautet

$$i(t)=5{,}06093\cdot10^{-5}\left(\sin\left(100\pi\tfrac{1}{\mathrm{s}}t\right)-10\pi\cos\left(100\pi\tfrac{1}{\mathrm{s}}t\right)\right)\mathrm{A}+5{,}06093\pi\cdot10^{-4}\,\mathrm{A}\,e^{-10\frac{1}{\mathrm{s}}\cdot t}.$$

3. Kondensator und Widerstand[2]





In einem Stromkreis liegen ein Widerstand $R=20\,\Omega$, ein Kondensator $C=5\,\mathrm{mF}$ ($1\,\mathrm{F}=1\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}}$) und

a) eine Batterie $U_0=4\,\mathrm{V}$ durch einen Schalter getrennt,

b) ein Sinusgenerator $u_s=100\sin(\omega t)\,\mathrm{V},\ \omega=100\pi\frac{1}{\mathrm{s}}$

in Reihe.

Gesucht ist der Ladungsfluss nach Schließen des Schalters in Abhängigkeit der Zeit.

Lösung

Hier wird via Ladungen argumentiert. Der Kondensator ist ungeladen. In dem Augenblick des Einschaltens fließen gewaltig viele Ladungen – wenn man der Physik vertraut ☺ – auf den Kondensator. Der Kondensator kann als kurzgeschlossen betrachtet werden, damit maximale Ladungen strömen können. Der maximale Einschaltstrom beträgt $I_0=\frac{U_0}{R}$ (AB: $(t=0\,\mathrm{s}\,|\,I_0=0{,}2\,\mathrm{A})$). Wegen $u_R+u_C=U_0$ folgt mit $i_C=C\frac{du_C}{dt}$ und $i_C=\frac{dQ}{dt}$ zunächst $Cu_C=Q$ und Kirchhoff liefert die lineare Dgl. 1. Ordnung

$$Ri+\frac{Q}{C}=U_0\Leftrightarrow\frac{di}{dt}+\frac{1}{RC}i=0\Leftrightarrow\left(D+\frac{1}{RC}\mathbb{1}\right)i=0$$

Mit der AB $i(0\,\mathrm{s})=I_0$ lautet die Lösung der homogenen Dgl. $i(t)=I_0e^{-\frac{t}{\tau}}$, $\tau:=RC$.

[2] http://www.dr-gert-hillebrandt.de/pdf/schule/Physik%20Schule/Laden%20und%20Entladen%20eines%20Kondensators.pdf

Daraus erhalten wir unsere Spannungen am Widerstand $u_R(t) = i(t)R = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ und am Kondensator $u_C(t) = U_0 - u_R(t) = U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.

Konkret ergeben sich für die vorgelegten Daten: Als maximale Stromstärke berechnen wir $I_0 = \frac{U_0}{R} = \frac{4\,\mathrm{V}}{20\,\Omega} = 0{,}2\,\mathrm{A}$. Für die Zeitkonstante finden wir $\tau = RC = 20\,\Omega \cdot 5\,\mathrm{mF} = 100\,\mathrm{ms}$ und der Anstieg der Stromstärke im Augenblick des Einschaltens $i'(0) = \frac{I_0}{\tau} = \frac{200\,\mathrm{mA}}{100\,\mathrm{ms}} = 2\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}}$.

Damit sind $i(t) = 0{,}2 e^{-\frac{t}{100\,\mathrm{ms}}}\,\mathrm{A}$, $u_R(t) = 4 e^{-\frac{t}{100\,\mathrm{ms}}}\,\mathrm{V}$ und $u_C(t) = 4\left(1 - e^{-\frac{t}{100\,\mathrm{ms}}}\right)\mathrm{V}$.

Möchte man den Ladungsfluss als Ergebnis sehen, so lösen wir

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC}Q = I_0 \Leftrightarrow \left(D + \frac{1}{RC}\mathbb{1}\right)Q = I_0,\ Q_0 = RCI_0 = \tau I_0 = 20\,\mathrm{mAs}.$$

Die Lösung der homogenen Dgl. lautet $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Zur Lösung der inhomogenen Dgl. variieren wir die Konstante.

Mit $Q(t) = q_s(t) e^{-\frac{t}{\tau}}$ folgt $q_s'(t) e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0 \Leftrightarrow q_s'(t) = I_0 e^{\frac{t}{\tau}} \Leftrightarrow q_s(t) = I_0 \int\limits_0^t e^{\frac{\lambda}{\tau}} d\lambda$. Wir erhalten $q_s(t) = \tau I_0 e^{\frac{t}{\tau}} - \tau I_0 = Q_0\left(e^{\frac{t}{\tau}} - 1\right)$.

Die allgemeine Lösung lautet folglich

$$Q(t) = Q_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),\ Q_0 = 2\,\mathrm{mAs},\ \tau = 100\,\mathrm{ms}.$$

Zu b) Nur die Inhomogenität der Dgl. ändert sich.

$$\left(D + \frac{1}{RC}\mathbb{1}\right)Q = i \text{ mit } i = \frac{u}{R} = 5\sin(\omega t)\,\mathrm{A},\ \omega = 100\pi\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

Mit

$$q_s(t) = 5\,\mathrm{A}\int\limits_0^t \sin(\omega\lambda) e^{a\lambda} d\lambda,\ a = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC} = 10\,\frac{1}{\mathrm{s}}\ \ Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Erhalten wir die Lösung

$$\begin{aligned} Q(t) &= q_s(t) e^{-10\frac{1}{\mathrm{s}}\cdot t} = 5\,\mathrm{A}\int\limits_0^t \sin(\omega\lambda) e^{10\frac{1}{\mathrm{s}}\cdot\lambda} d\lambda\, e^{-10\frac{1}{\mathrm{s}}\cdot t} \\ &= \left(5\,\mathrm{A}\frac{a}{a^2+\omega^2}\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{a}\cos\omega t\right) e^{10\frac{1}{\mathrm{s}}\cdot t} e^{at} + 5\,\mathrm{A}\frac{\omega}{a^2+\omega^2}\right) e^{-10\frac{1}{\mathrm{s}}\cdot t} \\ &= 5{,}06093\cdot 10^{-4}\left(\sin\left(100\pi\tfrac{1}{\mathrm{s}}t\right) - 10\pi\cos\left(100\pi\tfrac{1}{\mathrm{s}}t\right)\right)\mathrm{As} + 5{,}06093\pi\cdot 10^{-3} e^{-10\frac{1}{\mathrm{s}}\cdot t}\,\mathrm{As}. \end{aligned}$$

Differentialgleichungen 2. Ordnung

Eine *homogene* Dgl. 2. Ordnung lautet

$$\left(D^2+a_1D+a_0\mathbb{1}\right)y=0\,,\ a_1,a_0\in\mathbb{R}\ \text{fest,}$$

mit den Anfangsbedingungen: $\left(x_0\,|\,y_0\right)$, $\left(x_0\,|\,y_0'\right)$.

Existiert eine Zerlegung

$$D^2+a_1D+a_0\mathbb{1}=D^2+(a+b)D+ab\mathbb{1}=(D+a\mathbb{1})(D+b\mathbb{1}),\ a\neq b\,,$$

so sind $f(x)=y_0e^{-a(x-x_0)}$ und $g(x)=y_0e^{-b(x-x_0)}$ mit $x\in\mathbb{R}$ Lösungen von $(D+a\mathbb{1})y=0$ bzw. $(D+b\mathbb{1})y=0$, wie wir schon gezeigt haben. Diese sind auch Lösungen von

$$D^2+a_1D+a_0\mathbb{1}=D^2+(a+b)D+ab\mathbb{1}=0\,,$$

wie man im Kopf nachrechnet, da $a^2-a(a+b)+ab=0$ und $b^2-b(a+b)+ab=0$.

Die allgemeine Lösung ist folglich

$$h(x)=\frac{1}{b-a}\left(\left(y_0'+by_0\right)e^{-a(x-x_0)}-\left(y_0'+ay_0\right)e^{-b(x-x_0)}\right),\ x\in\mathbb{R}\,.$$

Gibt es weitere Lösungen?

Ist k eine Lösung der Dgl. $D^2+a_1D+a_0\mathbb{1}=D^2+(a+b)D+ab\mathbb{1}=0$, so sind $(D+a\mathbb{1})k$ eine Lösung von $(D+b\mathbb{1})y=0$ und $(D+b\mathbb{1})k$ eine Lösung von $(D+a\mathbb{1})y=0$.

Sei $p(x)=k'(x)+bk(x)$, dann ist $p'(x)=k''(x)+bk'(x)$, also

$$p'(x)+ap(x)=k''(x)+bk'(x)+a\left(k'(x)+bk(x)\right)=k''(x)+(a+b)k'(x)+abk(x)=0\,.$$

Entsprechend gilt dies für $q(x)=k'(x)+ak(x)$. Da es jedoch genau eine Lösung des AB gibt, folgt mit $p(x)=c\,f(x)$ und $q(x)=d\,g(x)$: $p(x)=\frac{p(x_0)}{y_0}f(x)$ und $q(x)=\frac{q(x_0)}{y_0}g(x)$.

Zeige: $h'(x)+bh(x)=\left(y_0'+by_0\right)e^{-a(x-x_0)}$ und $h'(x)+ah(x)=\left(y_0'+ay_0\right)e^{-b(x-x_0)}$.

Zwei enthaltene Spezialfälle

$b=a_0=0,\ a=a_1\neq 0$

Ist $b=a_0=0,\ a=a_1\neq 0$, also $\left(D^2+a_1D\right)y=0$, so ist $f(x)=y_0e^{-a_1(x-x_0)}$ die Lösung von $(D+a_1\mathbb{1})y=0$ und $g(x)=y_0$ die Lösung von $Dy=0$. Folglich ist

$$h(x)=-\frac{1}{a_1y_0}\left(y_0'f(x)-\left(y_0'+a_1y_0\right)g(x)\right)=-\frac{y_0'}{a_1}e^{-a_1(x-x_0)}+\frac{y_0'+a_1y_0}{a_1}$$

die allgemeine Lösung der homogenen Dgl. zu den Anfangsbedingungen $(x_0 \mid y_0)$, $(x_0 \mid y_0')$.

$a_1 = 0,\ a_0^2 = -a^2$

Die Dgl. $\left(D^2 + a_0 \mathbb{1}\right) y = (D + a\mathbb{1})(D - a\mathbb{1})\, y,\ a \neq 0$, also $a_0 = -a^2$ hat $f(x) = y_0 e^{-a(x-x_0)}$ als Lösung von $(D + a\mathbb{1})\, y = 0$ und $g(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$ als Lösung von $(D - a\mathbb{1})\, y = 0$. Folglich ist

$$h(x) = -\frac{1}{2ay_0}\left(\left(y_0' - ay_0\right) f(x) - \left(y_0' + ay_0\right) g(x)\right) = \frac{ay_0 - y_0'}{2a} e^{-a(x-x_0)} + \frac{ay_0 + y_0'}{2a} e^{a(x-x_0)}$$

die allgemeine Lösung der Anfangsbedingungen $(x_0 \mid y_0)$, $(x_0 \mid y_0')$. Die Funktion h kann auch wie folgt geschrieben werden.

$$h(x) = y_0 \cosh\left(a(x - x_0)\right) + \frac{y_0'}{a} \sinh\left(a(x - x_0)\right)$$ [3]

Kommen wir zu den nicht involvierten Fällen

1. Fall

Die Dgl. $\left(D^2 + a_1 D + a_0 \mathbb{1}\right) y = 0,\ a_0 \neq 0,\ a_1^2 = 4a_0$ **hat genau eine reelle Nullstellen.**

$$D^2 + 2aD + a^2 \mathbb{1} = (D + a\mathbb{1})^2 = (D + a\mathbb{1})(D + a\mathbb{1}).$$

Die beiden Lösungen $f(x) = y_0 e^{-a(x-x_0)}$ und $g(x) = y_0 e^{-b(x-x_0)}$ sind nicht mehr linear unabhängig, da $a = b$. Mit $h(x) = l(x) e^{-a(x-x_0)}$ - Variation der Konstanten – finden wir die allgemeine Lösung.

$$\begin{aligned} h(x) &= l(x) e^{-a(x-x_0)} \\ &\Rightarrow h'(x) = l'(x) e^{-a(x-x_0)} - al(x) e^{-a(x-x_0)} \\ &\Rightarrow h'(x) + ah(x) = l'(x) e^{-a(x-x_0)} \\ &\Rightarrow h''(x) + ah'(x) = l''(x) e^{-a(x-x_0)} - al'(x) e^{-a(x-x_0)} \\ &\Rightarrow h''(x) + 2ah'(x) + a^2 h(x) = l''(x) e^{-a(x-x_0)} \end{aligned}$$

Folglich muss $l''(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ sein. Dies liefert $l(x) = \alpha(x - x_0) + \beta$ und aus den Anfangsbedingungen $(x_0 \mid y_0)$, $(x_0 \mid y_0')$ folgt mit $h(x_0) = y_0$ schon $\beta = y_0$, ferner aus $y_0' = h'(x_0) = l'(x_0) - al(x_0) = \alpha - ay_0$ noch $\alpha = y_0' + ay_0$.

Damit ist $h(x) = \left(\left(y_0' + ay_0\right)(x - x_0) + y_0\right) e^{-a(x-x_0)}$ die allgemeine Lösung der Dgl.

Die Lösung $f(x) = y_0 e^{-a(x-x_0)}$ ist in h enthalten.

---

[3] $\sinh(x) := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh(x) := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Für $a=0$, also $D^2 y=0$, ergibt sich die allgemeine Lösung $h(x)=(y_0'+ay_0)(x-x_0)+y_0$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

Natürlich ist hier die Frage erlaubt, ob f und $h-f$ alle Lösungen sind.

Sei k eine Lösung der Dgl. $(D+a\mathbb{1})^2 y=0$, jedoch $k'+ak\neq 0$. Der Ansatz $g=k'+ak$ erfüllt natürlich $(D+a\mathbb{1})g=0$. Folglich ist $g(x_0)=k'(x_0)+ak(x_0)=y_0'+ay_0$ und damit $g(x)=(y_0'+ay_0)e^{-a(x-x_0)}$. Da k die inhomogene Dgl. $((D+a\mathbb{1})k)(x)=(y_0'+ay_0)e^{-a(x-x_0)}$ mit $r(x):=(y_0'+ay_0)e^{-a(x-x_0)}$ erfüllt, liefert die Variation der Konstanten, vgl.

$$h(x)=\left(y_0+\int_{x_0}^{x} r(\lambda)e^{a(\lambda-x_0)}d\lambda\right)e^{-a(x-x_0)}\text{, für alle } x\in\mathbb{R}.$$

Also $k(x)=(y_0+(y_0'+ay_0)(x-x_0))e^{-a(x-x_0)}$, mit der „partikulären" Lösung

$$k_p(x)=(y_0'+ay_0)(x-x_0)e^{-a(x-x_0)}.$$

Damit ist alles gezeigt.

Bemerkung:

Räume mit Lösungen $x^m e^{ax}$ heißen auch *zyklisch*, da

$$(D+a\mathbb{1})\left(x^m e^{-ax}\right)=x^{m-1}e^{-ax} \text{ und } (D+a\mathbb{1})^{m+1}\left(x^m e^{-ax}\right)=0.$$

2. Fall $a_1^2-4a_0<0,\ a_0\neq 0$

Die Dgl. $\left(D^2+a_1D+a_0\mathbb{1}\right)y=0$ hat keine reellen Nullstellen.

Quadratische Gleichungen haben manchmal keine reellen Nullstellen. Beispiel: $X^2+1=0$.

Führen wir magische oder imaginäre Nullstellen ein: $m^2=-1$ oder $m=\sqrt{-1}$.

$$D^2+a_1D+a_0\mathbb{1}=(D+(a+mb)\mathbb{1})(D+(a-mb)\mathbb{1}),\ b\neq 0$$

liefert $2a=a_1$ und $a^2-m^2b^2=a_0 \Leftrightarrow a^2+b^2=a_0 \Leftrightarrow b^2=a_0-\frac{1}{4}a_1^2$.

Wir erhalten „unsere" Lösungen $f(x)=ce^{-(a+mb)x}$ und $g(x)=de^{-(a-mb)x}$. Mit der AB $(x_0 \mid y_0)$ erhalten wir $f(x)=y_0e^{-(a+mb)(x-x_0)}$ und $g(x)=y_0e^{-(a-mb)(x-x_0)}$.

Diese können geschrieben werden (Potenz- oder Exponentialgesetze) als

$$f(x)=y_0e^{-mb(x-x_0)}e^{-a(x-x_0)} \text{ und } g(x)=y_0e^{mb(x-x_0)}e^{-a(x-x_0)}.$$

Was sind $e^{-mb(x-x_0)}$ und $e^{mb(x-x_0)}$?

Wie schon gehabt, untersuchen wir den Ansatz $h(x)=f(bx)e^{-a(x-x_0)}$. Er liefert

$$\begin{aligned} h'(x) &= bf'(bx)e^{-a(x-x_0)} - af(bx)e^{-a(x-x_0)} \\ &\Leftrightarrow h'(x)+ah(x)=bf'(bx)e^{-a(x-x_0)} \\ h''(x)+ah'(x) &= b^2 f''(bx)e^{-a(x-x_0)} - abf'(bx)e^{-a(x-x_0)} \\ &\Leftrightarrow h''(x)+2ah'(x)+a^2h(x)=b^2 f''(bx)e^{-a(x-x_0)}. \end{aligned}$$

Nach Addition von $b^2h(x)$ auf beiden Seiten wegen $a^2+b^2=a_0$:

$$h''(x)+2ah'(x)+\left(a^2+b^2\right)h(x)=b^2 f''(bx)e^{-a(x-x_0)}+b^2 f(bx)e^{-a(x-x_0)}$$

$$h''(x)+a_1h'(x)+a_0h(x)=\left(f''(bx)+f(bx)\right)b^2e^{-a(x-x_0)}$$

Damit die homogene Dgl. entsteht, muss $f''(bx)+f(bx)=0$ sein.

Gesucht sind daher Funktionen g mit $g''(x)+g(x)=0$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

Zwei Funktionen sind uns bekannt: $s(x)=\sin(x)$ und $c(x)=\cos(x)$.

Damit können wir zwei unabhängige Lösungen der Dgl. $\left(D^2+a_1D+a_0\mathbb{1}\right)y=0$ angeben.

$f(x)=y_0\sin\left(b(x-x_0)\right)e^{-a(x-x_0)}$ und $g(x)=y_0\cos\left(b(x-x_0)\right)e^{-a(x-x_0)}$, wobei $a=\frac{1}{2}a_1$ und $b=\sqrt{a_0-\frac{1}{4}a_1^2}$.

Anfangsbedingungen: $(x_0 \mid y_0)$, $(x_0 \mid y_0')$

Mit $h(x):=\alpha f(x)+\beta g(x)$ erhalten wir $y_0=h(x_0)=\alpha f(x_0)+\beta g(x_0)=\beta y_0 \Rightarrow \beta=1$ und mit $y_0'=h'(x_0)=\alpha f'(x_0)+g'(x_0)=\alpha b y_0-ay_0 \Rightarrow \alpha=\frac{y_0'+ay_0}{by_0}$.

Die allgemeine Lösung zu den Anfangsbedingungen $(x_0 \mid y_0)$, $(x_0 \mid y_0')$ lautet

$$h(x)=\frac{y_0'+ay_0}{by_0}f(x)+g(x).$$

Natürlich kann auch die Darstellung $e^{-mb(x-x_0)}=\cos\left(b(x-x_0)\right)-m\sin\left(b(x-x_0)\right)$[4] verwendet werden.

---

[4] *Euler:* $\sin(x):=\frac{e^{mx}-e^{-mx}}{2m}$, $\cos(x):=\frac{e^{mx}+e^{-mx}}{2}$

Zusammenfassung

Gegeben sei eine homogene Dgl. 2. Ordnung

$$\left(D^2 + a_1 D + a_0 \mathbb{1}\right) y = 0 ,\ a_1, a_0 \in \mathbb{R} \text{ fest,}$$

mit den Anfangsbedingungen $(x_0 \mid y_0)$, $(x_0 \mid y_0')$.

1. Gibt es eine Zerlegung

$$D^2 + (a+b) D + ab\mathbb{1} = (D + a\mathbb{1})(D + b\mathbb{1}),\ a \neq b,$$

so ist die Lösung durch

$$h(x) = \frac{1}{y_0(b-a)}\left(\left(y_0' + y_0 b\right) f(x) - \left(y_0' + y_0 a\right) g(x)\right)$$

mit $f(x) = y_0 e^{-a(x-x_0)}$ und $g(x) = y_0 e^{-b(x-x_0)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Hierbei sind $a = \frac{1}{2}a_1 - \sqrt{\frac{1}{4}a_1^2 - a_0}$ und $b = \frac{1}{2}a_1 + \sqrt{\frac{1}{4}a_1^2 - a_0}$.

2. Gibt es eine Zerlegung

$$D^2 + 2aD + a^2\mathbb{1} = (D + a\mathbb{1})^2,\ a \in \mathbb{R},$$

so ist die Lösung durch

$$h(x) = \left(\left(y_0' + a y_0\right)(x - x_0) + y_0\right) e^{-a(x-x_0)}$$

gegeben. Hier sind $a = \frac{1}{2}a_1$ und $a^2 = a_0 = \frac{1}{4}a_1^2$ sowie $f(x) = y_0 e^{-a(x-x_0)}$ und $(h-f)(x) = \left(y_0' + a y_0\right)(x - x_0) e^{-a(x-x_0)}$ unabhängige Lösungen.

3. Es sei $m = \sqrt{-1}$. Gibt es eine Zerlegung

$$D^2 + 2aD + \left(a^2 + b^2\right)\mathbb{1} = \left(D + (a+mb)\mathbb{1}\right)\left(D + (a-mb)\mathbb{1}\right),\ b \neq 0,$$

so ist die allgemeine Lösung durch

$$h(x) = \frac{y_0' + a y_0}{b y_0} f(x) + g(x)$$

gegeben, wobei

$f(x) = y_0 \sin\left(b(x - x_0)\right) e^{-a(x-x_0)}$ und $g(x) = y_0 \cos\left(b(x - x_0)\right) e^{-a(x-x_0)}$ sind. Hierbei sind $a = \frac{1}{2}a_1$ und $b = \sqrt{a_0 - \frac{1}{4}a_1^2}$.

Eine *inhomogene* Dgl. 2. Ordnung lautet

$$\left(D^2 + a_1 D + a_0 \mathbb{1}\right) y = r\,,\ a_1, a_0 \in \mathbb{R} \text{ fest, } r \text{ stetig}$$

mit den Anfangsbedingungen: $(x_0 \mid y_0)$, $(x_0 \mid y_0')$.

Da alle homogenen Lösungen bekannt sind, geht es hier darum, *eine* partikuläre Lösung zu finden. Es ist völlig egal, wie ich diese erhalte.

Jedoch sollte man sich immer fragen, ob es nicht doch einen einfacheren Weg gibt?

Eine Möglichkeit haben wir schon bei der Differentialgleichung 1. Ordnung kennengelernt.

Variation der Konstanten

Dabei gehen wir wieder von einer Zerlegung

$$\left(D^2 + a_1 D + a_0 \mathbb{1}\right) y = (D + \alpha \mathbb{1})(D + \beta \mathbb{1}) y = r$$

aus, wobei eine der drei Zerlegungen der Zusammenfassung möglich ist. Der Fall $\alpha = \beta = 0$ ist durch direkte zweimalige Integration zu lösen. Siehe auch Möglichkeit 1.

Eine Lösung kennen wir bereits.

$$R_{-\alpha}(x) = e^{-\alpha(x-x_0)} \int_{x_0}^{x} r(\lambda) e^{\alpha(\lambda - x_0)} d\lambda$$ [5]

$R_{-\alpha}$ ist eine Lösung der Dgl. $R'_{-\alpha}(x) + \alpha R_{-\alpha}(x) = r(x)$. Folgt aus

$$R'_{-\alpha}(x) = -\alpha e^{-\alpha(x-x_0)} \int_{x_0}^{x} r(\lambda) e^{\alpha(\lambda - x_0)} d\lambda + r(x)$$

Entsprechend ist $R_{-\beta}(x) = e^{-\beta(x-x_0)} \int_{x_0}^{x} r(\lambda) e^{\beta(\lambda - x_0)} d\lambda$ eine Lösung von $(D + \beta \mathbb{1}) y = r$.

1. Möglichkeit

Wir wissen, dass $R_{-\alpha}(x) = e^{-\alpha(x-x_0)} \int_{x_0}^{x} r(\lambda) e^{\alpha(\lambda - x_0)} d\lambda$ eine spezielle Lösung von $(D + \alpha \mathbb{1}) y = r$ ist. Es gilt folglich $R'_{-\alpha}(x) + \alpha R_{-\alpha}(x) = r(x)$. Entsprechend ist $k_{-\beta}(x) = e^{-\beta(x-x_0)} \int_{x_0}^{x} R_{-\alpha}(\lambda) e^{\beta(\lambda - x_0)} d\lambda$ eine Lösung von $(D + \beta \mathbb{1}) y = R_{-\alpha}$. Wegen

$$(D + \alpha \mathbb{1})(D + \beta \mathbb{1}) k_{-\beta} = (D + \alpha \mathbb{1}) R_{-\alpha} = r$$

ist damit $k_{-\beta}$ eine partikuläre Lösung der Dgl. $\left(D^2 + a_1 D + a_0 \mathbb{1}\right) y = r$.

---

[5] Vgl. Seite 5

2. Möglichkeit

Da die Summe der homogenen Lösungen die allgemeine Lösung der homogenen Dgl. darstellt, setzen wir $k_p(x) = aR_{-\alpha}(x) + bR_{-\beta}(x)$ für die allgemeine partikuläre Lösung, wobei $\alpha \neq \beta$ sowie $R_{-\alpha}(x) = e^{-\alpha(x-x_0)} \int\limits_{x_0}^{x} r(\lambda) e^{\alpha(\lambda - x_0)} d\lambda$ eine Lösung von $(D + \alpha \mathbb{1}) y = r$ und $R_{-\beta}(x) = e^{-\beta(x-x_0)} \int\limits_{x_0}^{x} r(\lambda) e^{\beta(\lambda - x_0)} d\lambda$ eine Lösung von $(D + \beta \mathbb{1}) y = r$ ist.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} r(x) &= \left((D+\alpha\mathbb{1})(D+\beta\mathbb{1}) k_p \right)(x) \\ &= \left((D+\alpha\mathbb{1})(D+\beta\mathbb{1}) aR_{-\alpha} \right)(x) + \left((D+\alpha\mathbb{1})(D+\beta\mathbb{1}) bR_{-\beta} \right)(x) \\ &= a\left((D+\beta\mathbb{1})(D+\alpha\mathbb{1}) R_{-\alpha} \right)(x) + b\left((D+\alpha\mathbb{1})(D+\beta\mathbb{1}) R_{-\beta} \right)(x) \\ &= a\left((D+\beta\mathbb{1}) r \right)(x) + b\left((D+\alpha\mathbb{1}) r \right)(x) \\ &= a\left(r' + \beta r \right)(x) + b\left(r' + \alpha r \right)(x) \\ &= (a+b) r'(x) + (a\beta + b\alpha) r(x), \end{aligned}$$

also $a + b = 0$ und $a\beta + b\alpha = 1 \;\Leftrightarrow\; a = -\frac{1}{\alpha - \beta}$ und $b = \frac{1}{\alpha - \beta}$. Wir erhalten auch hier mit

$$k_p(x) = -\frac{1}{\alpha - \beta} R_{-\alpha}(x) + \frac{1}{\alpha - \beta} R_{-\beta}(x)$$

eine partikuläre Lösung von $\left(D^2 + a_1 D + a_0 \mathbb{1} \right) y = r$.

3. Möglichkeit

Es seien f und g die unabhängigen Lösungen der homogenen Dgl. $\left(D^2 + a_1 D + a_0 \mathbb{1} \right) y = 0$.

Sei $h(x) = k_1(x) f(x) + k_2(x) g(x)$. Leiten wir ab, so „sehen“ wir welche Terme verschwinden müssen und welcher Term mit r übereinstimmen muss, da nur eine besondere Lösung benötigt wird. Die Gleichungen dürfen nur die erste Ableitung der Konstanten enthalten. Wir setzen daher $k_1'(x) f(x) + k_2'(x) g(x) = 0$ und $k_1'(x) f'(x) + k_2'(x) g'(x) = r(x)$. Damit sollte das „Setzen“ für höhere Ordnungen klar sein.

Dann sind

$$\begin{aligned} h'(x) &= k_1'(x) f(x) + k_1(x) f'(x) + k_2'(x) g(x) + k_2(x) g'(x) \\ &= k_1(x) f'(x) + k_2(x) g'(x) \\ h''(x) &= k_1'(x) f'(x) + k_1(x) f''(x) + k_2'(x) g'(x) + k_2(x) g''(x) \\ &= k_1(x) f''(x) + k_2(x) g''(x) + r(x) \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} h''(x)+a_1h'(x)+a_0h(x) &= k_1(x)\left[f''(x)+a_1f'(x)+a_0f(x)\right]+k_2(x)\left[g''(x)+a_1g'(x)+a_0g(x)\right] \\ &\quad +k_1'(x)f'(x)+k_2'(x)g'(x) \\ &= r(x). \end{aligned}$$

Somit ist das Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{r} k_1'(x)f(x)+k_2'(x)g(x)=\ \ 0 \\ k_1'(x)f'(x)+k_2'(x)g'(x)=r(x) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1'(x) \\ k_2'(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix}$$

zu lösen. Mit $\alpha \neq \beta$ sowie $f'(x)=-\alpha f(x)$ und $g'(x)=-\beta g(x)$ erhalten wir

$$k_1'(x)=-\frac{r(x)g(x)}{f(x)g'(x)-g(x)f'(x)} \text{ und } k_2'(x)=\frac{r(x)f(x)}{f(x)g'(x)-g(x)f'(x)}$$

$$k_1'(x)=-\frac{1}{\alpha-\beta}\frac{r(x)}{f(x)} \text{ und } k_2'(x)=\frac{1}{\alpha-\beta}\frac{r(x)}{g(x)}.$$

Diese sind zu integrieren. Hierbei kann man sich auf $f(x)=e^{-\alpha x}$ und $g(x)=e^{-\beta x}$ beschränken, da die Konstante in $f(x)=\xi e^{-\alpha x}$ keinen Einfluss auf das Integrieren hat.

$$k_1'(x)=-\frac{1}{\alpha-\beta}\frac{r(x)}{\xi e^{-\alpha x}}=-\frac{1}{\xi}\frac{1}{\alpha-\beta}r(x)e^{\alpha x} \text{ und } k_2'(x)=\frac{1}{\alpha-\beta}\frac{r(x)}{\zeta e^{-\beta x}}=-\frac{1}{\zeta}\frac{1}{\alpha-\beta}r(x)e^{\beta x}$$

$$\Rightarrow h_p(x)=k_1(x)f(x)+k_2(x)g(x)=\xi e^{-\alpha x}\int_{x_0}^{x}-\frac{1}{\xi}\frac{1}{\alpha-\beta}r(\lambda)e^{\alpha\lambda}d\lambda+\zeta e^{-\beta x}\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\zeta}\frac{1}{\alpha-\beta}r(\lambda)e^{\beta\lambda}d\lambda$$

Bemerkung

Für eine Dgl. 3. Ordnung erhielten wir das System

$$\left.\begin{array}{ccccccc} k_1'(x)f(x) & + & k_2'(x)g(x) & + & k_3'(x)h(x) & = & 0 \\ k_1'(x)f'(x) & + & k_2'(x)g'(x) & + & k_3'(x)h'(x) & = & 0 \\ k_1'(x)f''(x) & + & k_2'(x)g''(x) & + & k_3'(x)h''(x) & = & r(x) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1'(x) \\ k_2'(x) \\ k_3'(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r(x) \end{pmatrix},$$

das zu lösen ist.

4. Möglichkeit

In vielen praktischen Fällen gelingt es durch Erfahrung und geschicktes Hinschauen einen Lösungsansatz zu erraten und durch Differenzieren zu bestimmen.

Hier sollte jeder für sich entscheiden, ob sich der Aufwand lohnt eine Lösung zu finden.

Beispiel

$\left(D^2+D-2\mathbb{1}\right)y=x^3-x+1$ liefert $(D+2\mathbb{1})(D-\mathbb{1})y=x^3-x+1$. Also die linear unabhängigen Lösungen sind $f(x)=\xi e^{-2(x-x_0)}$ und $k(x)=\zeta e^{x-x_0}$. Die allgemeine Lösung der homogenen Dgl. mit AB $(x_0 \mid y_0)$, $(x_0 \mid y_0')$ lautet mit $\xi+\zeta=y_0$ und $-2\xi+\zeta=y_0'$ folglich:

$$h(x)=\tfrac{1}{3}\left(y_0'+2y_0\right)e^{x-x_0}-\tfrac{1}{3}\left(y_0'-y_0\right)e^{-2(x-x_0)}.$$

Eine partikuläre Lösung der Dgl. 1. Ordnung $(D+2\mathbb{1})y=x^3-x+1$ ist

$$\begin{aligned}
R_{-2}(x)&=e^{-2x}\int_{x_0}^{x}\left(\lambda^3-\lambda+1\right)e^{2\lambda}d\lambda\\
&=\left(\left(\tfrac{1}{2}x^3-\tfrac{3}{4}x^2+\tfrac{1}{4}x+\tfrac{3}{8}\right)e^{2x}-\left(\tfrac{1}{2}x_0^3-\tfrac{3}{4}x_0^2+\tfrac{1}{4}x_0+\tfrac{3}{8}\right)e^{2x_0}\right)e^{-2x}\\
&=\left(\tfrac{1}{2}x^3-\tfrac{3}{4}x^2+\tfrac{1}{4}x+\tfrac{3}{8}\right)-\left(\tfrac{1}{2}x_0^3-\tfrac{3}{4}x_0^2+\tfrac{1}{4}x_0+\tfrac{3}{8}\right)e^{-2(x-x_0)}
\end{aligned}$$

Für die Dgl. $(D-\mathbb{1})y=x^3-x+1$ finden wir als partikuläre Lösung

$$\begin{aligned}
R_1(x)&=e^{x}\int_{x_0}^{x}\left(\lambda^3-\lambda+1\right)e^{-\lambda}d\lambda\\
&=\left(\left(-x^3-3x^2-5x-6\right)e^{-x}-\left(-x_0^3-3x_0^2-5x_0-6\right)e^{-x_0}\right)e^{x}\\
&=\left(-x^3-3x^2-5x-6\right)+\left(x_0^3+3x_0^2+5x_0+6\right)e^{x-x_0}.
\end{aligned}$$

Partikuläre Lösungen

Ad 1. Möglichkeit

Aus

$$R_{-2}(x)=\left(\tfrac{1}{2}x^3-\tfrac{3}{4}x^2+\tfrac{1}{4}x+\tfrac{3}{8}\right)-\left(\tfrac{1}{2}x_0^3-\tfrac{3}{4}x_0^2+\tfrac{1}{4}x_0+\tfrac{3}{8}\right)e^{-2(x-x_0)}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
k_1(x)&=e^{x}\int_{x_0}^{x}\left(\left(\tfrac{1}{2}\lambda^3-\tfrac{3}{4}\lambda^2+\tfrac{1}{4}\lambda+\tfrac{3}{8}\right)-\left(\tfrac{1}{2}x_0^3-\tfrac{3}{4}x_0^2+\tfrac{1}{4}x_0+\tfrac{3}{8}\right)e^{-2(\lambda-x_0)}\right)e^{-\lambda}d\lambda\\
&=e^{x}\int_{x_0}^{x}\left(\left(\tfrac{1}{2}\lambda^3-\tfrac{3}{4}\lambda^2+\tfrac{1}{4}\lambda+\tfrac{3}{8}\right)e^{-\lambda}-\left(\tfrac{1}{2}x_0^3-\tfrac{3}{4}x_0^2+\tfrac{1}{4}x_0+\tfrac{3}{8}\right)e^{-3\lambda}e^{2x_0}\right)d\lambda
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
k_1(x) &= e^x \int_{x_0}^{x} \left(\left(\tfrac{1}{2}\lambda^3 - \tfrac{3}{4}\lambda^2 + \tfrac{1}{4}\lambda + \tfrac{3}{8} \right) e^{-\lambda} \right) d\lambda + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}x_0^3 - \tfrac{3}{4}x_0^2 + \tfrac{1}{4}x_0 + \tfrac{3}{8} \right) e^x e^{-3x} e^{2x_0} \\
&\qquad - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}x_0^3 - \tfrac{3}{4}x_0^2 + \tfrac{1}{4}x_0 + \tfrac{3}{8} \right) e^x e^{-3x_0} e^{2x_0} \\
&= e^x \left(\left(-\tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{3}{4}x^2 - \tfrac{7}{4}x - \tfrac{17}{8} \right) e^{-x} - \left(-\tfrac{1}{2}x_0^3 - \tfrac{3}{4}x_0^2 - \tfrac{7}{4}x_0 - \tfrac{17}{8} \right) e^{-x_0} \right) \\
&\qquad + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}x_0^3 - \tfrac{3}{4}x_0^2 + \tfrac{1}{4}x_0 + \tfrac{3}{8} \right) e^{-2(x-x_0)} - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}x_0^3 - \tfrac{3}{4}x_0^2 + \tfrac{1}{4}x_0 + \tfrac{3}{8} \right) e^{x-x_0} \\
&= \left(-\tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{3}{4}x^2 - \tfrac{7}{4}x - \tfrac{17}{8} \right) \\
&\qquad + \left(\tfrac{1}{3}x_0^3 + x_0^2 + \tfrac{5}{3}x_0 + 2 \right) e^{x-x_0} + \left(\tfrac{1}{6}x_0^3 - \tfrac{1}{4}x_0^2 + \tfrac{1}{12}x_0 + \tfrac{1}{8} \right) e^{-2(x-x_0)}
\end{aligned}
$$

Damit lautet die allgemeine Lösung

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \tfrac{1}{3}\left(y_0' + 2y_0 \right) e^{x-x_0} - \tfrac{1}{3}\left(y_0' - y_0 \right) e^{-2(x-x_0)} \\
&\quad - \left(\tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{3}{4}x^2 + \tfrac{7}{4}x + \tfrac{17}{8} \right) + \left(\tfrac{1}{3}x_0^3 + x_0^2 + \tfrac{5}{3}x_0 + 2 \right) e^{x-x_0} + \left(\tfrac{1}{6}x_0^3 - \tfrac{1}{4}x_0^2 + \tfrac{1}{12}x_0 + \tfrac{1}{8} \right) e^{-2(x-x_0)}
\end{aligned}
$$

Ad 2. Möglichkeit

Mit den partikulären Lösungen der Dgl. 1. Ordnung

$$
\begin{aligned}
R_{-2}(x) &= \left(\tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{3}{4}x^2 + \tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{8} \right) - \left(\tfrac{1}{2}x_0^3 - \tfrac{3}{4}x_0^2 + \tfrac{1}{4}x_0 + \tfrac{3}{8} \right) e^{-2(x-x_0)} \\
R_1(x) &= \left(-x^3 - 3x^2 - 5x - 6 \right) + \left(x_0^3 + 3x_0^2 + 5x_0 + 6 \right) e^{x-x_0}
\end{aligned}
$$

finden wir mit $k_p(x) = -\frac{1}{\alpha-\beta} R_{-\alpha}(x) + \frac{1}{\alpha-\beta} R_{-\beta}(x)$ also $k_p(x) = \frac{1}{3} R_1(x) - \frac{1}{3} R_{-2}(x)$:

$$
\begin{aligned}
k_p(x) &= \tfrac{1}{3}\left(-x^3 - 3x^2 - 5x - 6 \right) + \tfrac{1}{3}\left(x_0^3 + 3x_0^2 + 5x_0 + 6 \right) e^{x-x_0} \\
&\quad - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{3}{4}x^2 + \tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{8} \right) + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}x_0^3 - \tfrac{3}{4}x_0^2 + \tfrac{1}{4}x_0 + \tfrac{3}{8} \right) e^{-2(x-x_0)} \\
&= -\left(\tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{3}{4}x^2 + \tfrac{7}{4}x + \tfrac{17}{8} \right) \\
&\quad + \tfrac{1}{3}\left(x_0^3 + 3x_0^2 + 5x_0 + 6 \right) e^{x-x_0} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}x_0^3 - \tfrac{3}{4}x_0^2 + \tfrac{1}{4}x_0 + \tfrac{3}{8} \right) e^{-2(x-x_0)}
\end{aligned}
$$

Die partikuläre Lösung wird also bestätigt.

Ad 3. Möglichkeit

Mit den homogenen Lösungen $f(x) = \xi e^{-2(x-x_0)}$ und $g(x) = \zeta e^{x-x_0}$ sind

$$
k_1'(x) = -\frac{1}{\alpha-\beta} \frac{r(x)}{f(x)} \text{ und } k_2'(x) = \frac{1}{\alpha-\beta} \frac{r(x)}{g(x)}
$$

zu integrieren. Dabei setzen wir $\xi=\zeta=1$.

$$k_1'(x)=-\tfrac{1}{3}\left(x^3-x+1\right)e^{2(x-x_0)} \text{ und } k_2'(x)=\tfrac{1}{3}\left(x^3-x+1\right)e^{-(x-x_0)}$$

Vergleichen wir mit

$$R_{-2}(x)=e^{-2x}\int_{x_0}^{x}\left(\lambda^3-\lambda+1\right)e^{2\lambda}d\lambda \text{ und } R_1(x)=e^{x}\int_{x_0}^{x}\left(\lambda^3-\lambda+1\right)e^{-\lambda}d\lambda,$$

so sind uns diese schon bekannt.

$$k_1(x)=-\tfrac{1}{3}R_{-2}(x)e^{2(x-x_0)}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{3}{8}\right)e^{2(x-x_0)}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x_0^3-\frac{3}{4}x_0^2+\frac{1}{4}x_0+\frac{3}{8}\right)$$
$$k_2(x)=\frac{1}{3}R_1(x)e^{-(x-x_0)}=\frac{1}{3}\left(-x^3-3x^2-5x-6\right)e^{-(x-x_0)}+\frac{1}{3}\left(x_0^3+3x_0^2+5x_0+6\right)$$

In die allgemeine Lösung eingesetzt liefert dies

$$\begin{aligned}
h(x)&=-\tfrac{1}{3}\left(y_0'-y_0\right)e^{-2(x-x_0)}+k_1(x)e^{-2(x-x_0)}+\tfrac{1}{3}\left(y_0'+2y_0\right)e^{x-x_0}+k_2(x)e^{x-x_0}\\
&=\tfrac{1}{3}\left(y_0'+2y_0\right)e^{x-x_0}-\tfrac{1}{3}\left(y_0'-y_0\right)e^{-2(x-x_0)}\\
&\quad-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{3}{8}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x_0^3-\frac{3}{4}x_0^2+\frac{1}{4}x_0+\frac{3}{8}\right)e^{-2(x-x_0)}\\
&\quad+\frac{1}{3}\left(-x^3-3x^2-5x-6\right)+\frac{1}{3}\left(x_0^3+3x_0^2+5x_0+6\right)e^{x-x_0}\\
&=\tfrac{1}{3}\left(y_0'+2y_0\right)e^{x-x_0}-\tfrac{1}{3}\left(y_0'-y_0\right)e^{-2(x-x_0)}-\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{7}{4}x+\frac{17}{8}\right)\\
&\quad+\frac{1}{3}\left(x_0^3+3x_0^2+5x_0+6\right)e^{x-x_0}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x_0^3-\frac{3}{4}x_0^2+\frac{1}{4}x_0+\frac{3}{8}\right)e^{-2(x-x_0)}.
\end{aligned}$$

Ad 3. Möglichkeit

Ein Blick auf die Dgl. $(D+2\mathbb{1})(D-\mathbb{1})y=x^3-x+1$ sagt uns sofort, dass nur ein Polynom als partikuläre Lösung möglich ist. Sei also $P(x)$ eine partikuläre Lösung. Also gilt

$$P''(x)+P'(x)-2P(x)=x^3-x+1.$$

Die Darstellung offenbart sofort, dass der Grad des Polynoms höchstens 3 sein kann, denn der Grad von P' ist um eins und der Grad von P'' um zwei gegenüber P erniedrigt.

Folglich muss $P(x)=-\tfrac{1}{2}x^3+Q(x)$, $\operatorname{grad}(Q)=2$ sein. Eingesetzt erkennen wir

$$-3x+Q''(x)-\tfrac{3}{2}x^2+Q'(x)-2Q(x)=-x+1\Leftrightarrow Q''(x)+Q'(x)-2Q(x)=\tfrac{3}{2}x^2+2x+1.$$

Wir sehen nun $Q(x)=-\tfrac{3}{4}x^2+S(x)$, $\operatorname{grad}(S)=1$, also $S''(x)=0$. Eingesetzt

$$-\tfrac{3}{2}-\tfrac{3}{2}x+S'(x)-2S(x)=2x+1\Leftrightarrow S'(x)-2S(x)=\tfrac{7}{2}x+\tfrac{5}{2}.$$

Nun $S(x)=-\frac{7}{4}x+T(x)$, $\operatorname{grad}(T)=0$ also $-\frac{7}{4}-2T(x)=\frac{5}{2}\Leftrightarrow T(x)=-\frac{17}{8}$. Damit ist P gefunden und lautet

$$P(x)=-\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2-\frac{7}{4}x-\frac{17}{8}\,.$$

Die Anfangsbedingung muss noch erfüllt sein.

$$h(x)=\xi e^{-2(x-x_0)}+\zeta e^{x-x_0}+P(x)$$

liefert

$$y_0=h(x_0)=\xi+\zeta+P(x_0) \text{ und } y_0'=h'(x_0)=-2\xi+\zeta+P'(x_0).$$

Wir eliminieren ξ und ζ.

$$\left.\begin{aligned}\xi+\zeta&=y_0-P(x_0)\\ -2\xi+\zeta&=y_0'-P'(x_0)\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned}3\zeta&=y_0'+2y_0-2P(x_0)-P'(x_0)\\ -3\xi&=y_0'-y_0+P(x_0)-P'(x_0)\end{aligned}\right.$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$\begin{aligned}h(x)=&\frac{1}{3}(y_0'+2y_0)e^{x-x_0}-\frac{1}{3}(y_0'-y_0)e^{-2(x-x_0)}+P(x)\\ &-\frac{1}{3}\big(2P(x_0)+P'(x_0)\big)e^{x-x_0}-\frac{1}{3}\big(P(x_0)-P'(x_0)\big)e^{-2(x-x_0)}\\ &\frac{1}{3}(y_0'+2y_0)e^{x-x_0}-\frac{1}{3}(y_0'-y_0)e^{-2(x-x_0)}-\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{7}{4}x+\frac{17}{8}\right)\\ &+\frac{1}{3}\left(x_0^3+3x_0^2+5x_0+6\right)e^{x-x_0}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x_0^3-\frac{3}{4}x_0^2+\frac{1}{4}x_0+\frac{3}{8}\right)e^{-2(x-x_0)}.\end{aligned}$$

Praktische Beispiele folgen.