

# Die Quaternionen

Hamilton entwickelte 1843 in Analogie zu den Komplexen Zahlen die Quaternionen, um algebraische Transformationen von Vektoren im Raum zu studieren. Wir wollen diesen Weg nicht nachvollziehen, da ihm und auch anderen am Anfang nicht klar war, dass es sich hier um einen nichtkommutativen Körper handelt.

Gehen wir von den komplexen Zahlen aus und suchen einen weiteren Körper, der  $\mathbb{C}$  echt enthält.

Zunächst wird folgender Ansatz versucht. Die neuen Zahlen sollen nun  $h := a + ib + jc$  mit  $a, b, c \in \mathbb{R}$  sein, so dass der dreidimensionale Raum repräsentiert wird. Wir erklären eine Addition wie bei den komplexen Zahlen. Dazu seien  $h_1 := a_1 + ib_1 + jc_1$  und  $h_2 := a_2 + ib_2 + jc_2$  gegeben. Also

$$h_1 + h_2 := (a_1 + ib_1 + jc_1) + (a_2 + ib_2 + jc_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + ib_2) + j(c_1 + c_2).$$

Die Gesetze der Kommutativität und der Assoziativität der Addition sind selbstverständlich erfüllt, da sie von  $\mathbb{R}$  übertragen werden. Auch besitzt jede Zahl  $a + ib + jc$  eine inverse Zahl, nämlich  $-a + i(-b) + j(-c)$ , da  $0 := 0 + i0 + j0$  die neutrale Zahl ist. Also bleibt die Multiplikation festzulegen. Hierbei soll dies so geschehen, dass  $z = a + ib + jc$  immer eine komplexe Zahl ist. Dazu müssen die Multiplikationen  $ii, jj, ij$  und  $ji$  festgelegt werden, wenn  $aib = iab, ajc = jac$  sein soll.  $a$  stellt somit den reellen Teil der neuen Zahl dar.

Nehmen wir z.B.  $i^2 = j, j^2 = i$  und  $ij = ji = -1$  an, so finden wir nach kurzer Rechnung, dass

$$\iota: \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{H} \\ \sqrt{-1} & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{7}}(1 - 2i - 2j) \end{cases}$$

eine Einbettung sein kann. Folglich wäre  $\iota(a + b\sqrt{-1}) = a + \frac{b}{\sqrt{7}}(1 - 2i - 2j)$ . Die Zahl  $1 + i0 + j0$  muss nun das neutrale Element der Multiplikation sein. Bleibt die Frage zu beantworten, was denn die inverse Zahl einer gegebenen Zahl ist?

Wieder rechnen wir nach.

Der Ansatz  $(a + ib + jc)(d + ie + jf) = (1 + i0 + j0)$  liefert das folgende Gleichungssystem.

$$ad - bf - ce = 1 \quad ae + bd + cf = 0 \quad af + be + cd = 0$$

Nach längerer Rechnung finden wir die Lösungen

$$d = \frac{c(a^2 - bc)}{(a^2 - bc)(b^2 + ac) - (c^2 - ab)^2}; e = \frac{c(c^2 - ab)}{(a^2 - bc)(b^2 + ac) - (c^2 - ab)^2}; f = \frac{c(b^2 - ac)}{(a^2 - bc)(b^2 + ac) - (c^2 - ab)^2},$$

$$d = \frac{a^2 - bc}{a^3 - b^3 - c^3 + ab}; e = \frac{c^2 - ab}{a^3 - b^3 - c^3 + ab}; f = \frac{b^2 - ac}{a^3 - b^3 - c^3 + ab}.$$

Nun sind wir doch zufrieden und glücklich einen neuen Körper gefunden zu haben, da sich die Gesetze von  $\mathbb{R}$  übertragen.

**Sind wir das wirklich?** Lange Rede, kurzer Sinn. Natürlich nicht, **denn**  $1 + i1 + j1$  **besitzt kein eindeutiges Inverses!**  $d = \frac{1}{2}$  und  $e + f = -\frac{1}{2}$  erfüllen immer die Bedingungen. Der Ansatz muss folglich fallen gelassen werden.

Versuchen wir  $i^2 = -1, j^2 = -1$  und  $ij = ji$  oder  $ij = -ji$ , so finden wir immer einen Widerspruch, egal was wir versuchen. In drei Dimensionen gibt es folglich keinen Körper, der  $\mathbb{C}$  enthält.

## Der Hamiltonsche Schiefkörper

Starten wir nun mit  $la + ib + jc + kd$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  und fordern

$$l \cdot i = i, l \cdot j = j, l \cdot k = k \text{ sowie } l \cdot l = l \text{ und } i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Damit liegt die Antikommutativität fest. Es gilt

$$ij = -ji, jk = -kj; ki = -ik \quad \text{und} \quad ij = k, jk = i; ki = j.$$

Für die Addition fordern wir wieder

$$(la_1 + ib_1 + jc_1 + kd_1) \oplus (la_2 + ib_2 + jc_2 + kd_2) := l(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) + j(c_1 + c_2) + k(d_1 + d_2).$$

Für die Multiplikation erhalten wir

$$\begin{aligned} (la_1 + ib_1 + jc_1 + kd_1) \odot (la_2 + ib_2 + jc_2 + kd_2) &= l(a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) \\ &\quad + i(a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2) \\ &\quad + j(a_1c_2 + c_1a_2 + d_1b_2 - b_1d_2) \\ &\quad + k(a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2). \end{aligned} \quad (*)$$

Mit  $r_1 = ib_1 + jc_1 + kd_1$  und  $r_2 = ib_2 + jc_2 + kd_2$  können wir auch schreiben:

$$(la_p + r_p) \odot (la_q + r_q) = p \odot q = \underbrace{la_1a_2 + \frac{1}{2}(r_1r_2 + r_2r_1)}_{p * q} + \underbrace{\frac{1}{2}(r_1r_2 - r_2r_1)}_{p \wedge q} + a_p r_q + r_p a_q \quad (**)$$

wobei die Produkte  $p * q$  (Sternprodukt) und  $p \wedge q$  (Keilprodukt) noch getrennt definiert werden.

Das zu  $la + ib + jc + kd$  inverse Element ist  $\frac{la - ib - jc - kd}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ , was sofort mit (\*) oder (\*\*) verifiziert werden kann. Der Rest ist trivial. Es gilt folglich:

$$(H, \oplus, \odot)$$

**ist ein nichtkommutativer Körper. Statt nichtkommutativer Körper sagt man Schiefkörper.**

Wegen  $H = l\mathbb{R} + i\mathbb{R} + j\mathbb{R} + k\mathbb{R}$  gilt  $\dim_{\mathbb{R}} H = 4$ .

Im Folgenden schreiben wir zur Vereinfachung nur  $+$  statt  $\oplus$  und  $\cdot$  statt  $\odot$ . Ferner  $a + ib + jc + kd$  statt  $la + ib + jc + kd$ .

Die Einbettung der komplexen Zahlen erfolgt wie folgt.

$$l: \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow & H \\ a + ib & \mapsto & a + ib + j0 + k0 \end{cases}$$

Die zu  $q = a + ib + jc + kd$  **konjugierte Quaternione** ist  $\bar{q} = a - ib - jc - kd$ . Die **Länge** der  $q$ -Quaternione ist  $\|q\| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ . Die Summe  $ib + jc + kd$  heißt **reine Quaternione** oder **Imaginärteil**.  $a = \text{Re}(p)$  der **Realteil**.

Der Raum der Quaternionen  $H$  bildet einen 4-dimensionalen Vektorraum über den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ . Die Multiplikation wäre wie folgt zu definieren.

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) \odot (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2, a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2, a_1c_2 + c_1a_2 + d_1b_2 - b_1d_2, a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2)$$

Daher werden die Quaternionen auch als „Ortsvektoren“ betrachtet. Sie heißen **Zeiger**, da sie auf den Punkt im Koordinatensystem zeigen:  $q = a + ib + jc + kd$  **zeigt** auf den **Punkt**  $(a, b, c, d)$ .

Schreiben wir die Quaternionen um, so erhalten wir  $q = a + bi + cj + dk = (a + bi) + (c + di)j$ . Dies entspricht  $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{H} = 2$ .

$$\begin{aligned} ((a_1 + bi) + (c_1 + di)j)((a_2 + bi) + (c_2 + di)j) &= (a_1 + bi)(a_2 + bi) + (a_1 + bi)(c_2 + di)j \\ &\quad + (c_1 + di)j(a_2 + bi) + (c_1 + di)j(c_2 + di)j \\ &= (a_1 + bi)(a_2 + bi) - (c_1 + di)(c_2 - di) \\ &\quad + ((a_1 + bi)(c_2 + di) + (c_1 + di)(a_2 - bi))j \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i \\ &\quad + ((a_1c_2 + c_1a_2 + d_1b_2 - b_1d_2) + (a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2)i)j \end{aligned}$$

### Bemerkungen zum geometrischen Verhalten

Soll ein Zusammenhang zu einigen Produkten der Vektorrechnung hergestellt werden, so ist dies wie folgt möglich. Historisch war es selbstverständlich umgekehrt. Dazu seien  $p = a_p + r$  und  $q = a_q + s$  mit  $r = ir_i + jr_j + kr_k$  und  $s = is_i + js_j + ks_k$  gegeben.

#### 1. Das Produkt

$$\langle p, q \rangle := a_p a_q - \frac{1}{2}(rs + sr)$$

heißt kanonisches **Skalarprodukt** der Quaternionen  $p$  und  $q$ .

a) Zeigen Sie  $\langle p, q \rangle = a_p a_q + r_i s_i + r_j s_j + r_k s_k$ . Das Skalarprodukt ist kommutativ.

$rs + sr = -2(r_i s_i + r_j s_j + r_k s_k)$  stellt in Analogie das  $-2$ -fache des kanonischen Skalarprodukts im dreidimensionalen Raum dar.

b) Zeigen Sie, auch  $\langle p, q \rangle = \frac{1}{2}(p\bar{q} + \bar{p}q + rs - sr)$  stellt das Skalarprodukt dar. Es gilt folglich

$$\langle p, p \rangle = p\bar{p}.$$

#### 2. Das Produkt

$$p * q := a_p a_q + \frac{1}{2}(rs + sr)$$

heißt **Sternprodukt** der Quaternionen  $p$  und  $q$ . Das Sternprodukt ist kommutativ.

#### 3. Das Produkt

$$p \wedge q := \frac{1}{2}(pq - qp)$$

heißt **Graßmannprodukt**<sup>1</sup> der Quaternionen  $p$  und  $q$ , auch **Keilprodukt** genannt. **Graßmann** schrieb  $[p, q] := p \wedge q$ . **Gipps**<sup>2</sup> später  $p \times q$  auf reine Quaternionen.

<sup>1</sup> Graßmann, Hermann

<sup>2</sup> Gibbs, Josiah Willard

Das Graßmannprodukt ist antikommutativ.

Die Multiplikation der Quaternionen  $p = a_p + r$  und  $q = a_q + s$  kann nun wie folgt geschrieben werden.

$$pq = p * q + p \wedge q + a_p r + s a_q$$

Seien  $p, q, r$  Quaternionen, so gilt  $p \wedge q = -q \wedge p$ , **jedoch**  $(p \wedge q) \wedge r \neq p \wedge (q \wedge r)$ .

Zeigen Sie folgende Aussagen:  $p * (p \wedge q) = (p \wedge q) * p = 0$  und  $q * (p \wedge q) = (p \wedge q) * q = 0$

a) Zeigen Sie  $p \wedge q = \frac{1}{2}(rs - sr) = i(r_j s_k - r_k s_j) + j(r_k s_i - r_i s_k) + k(r_i s_j - r_j s_i)$ .

Mit anderen Worten wirkt  $\wedge$  nur auf reine Quaternionen und kann daher wie folgt berechnet werden. Auf gleichen Quaternionen ist das Keilprodukt null:  $p \wedge p = 0$ , also  $i \wedge i = j \wedge j = k \wedge k = 0$ . Ferner gelten die üblichen Regeln:  $i \wedge j = k, j \wedge k = i, k \wedge i = j$  (zyklisch) sowie  $p \wedge q = -q \wedge p$ , also  $i \wedge j = -j \wedge i, j \wedge k = -k \wedge j, k \wedge i = -i \wedge k$ .

b) Zeigen Sie:  $(p \wedge q) \wedge r = \langle p, r \rangle q - \langle q, r \rangle p$ ,  $p \wedge (q \wedge r) = \langle p, r \rangle q - \langle p, q \rangle r$  und damit  $(p \wedge q) \wedge r - p \wedge (q \wedge r) = \langle p, q \rangle r - \langle q, r \rangle p$ .

c)  $(p \wedge q) \wedge r + (r \wedge p) \wedge q + (q \wedge r) \wedge p = 0$  (Jakobi)

d) Folgern Sie aus  $p \wedge p = 0$  die Aussage  $p \wedge (a \cdot p) = 0$  für alle  $a \in \mathbb{R}$ .

e) Ist umgekehrt  $p \wedge q = 0$ ,  $p \neq 0$ ,  $q \neq 0$ , so gibt es ein  $a \in \mathbb{R}$  mit  $q = ap$ . Z.B.  $a = \frac{s_k}{r_k}$ .

f)  $p \wedge q = r \wedge s$  steht senkrecht auf  $r$  sowie  $s$  und repräsentiert den Flächeninhalt des von  $r$  und  $s$  als Zeiger aufgespannten Parallelogramms. D.h.  $\langle r \wedge s, r \rangle = \langle r \wedge s, s \rangle = 0$ . Ferner ist die Länge der Quaternion  $r \wedge s$  der Flächeninhalt des Parallelogramms. D.h.  $A(r, s) = \sqrt{(r \wedge s)(\overline{r \wedge s})}$ . Die Klammer darf auch fehlen, da  $\wedge$  stärker bindet.

g)  $i(r_j s_k - r_k s_j)$ ,  $j(r_k s_i - r_i s_k)$ ,  $k(r_i s_j - r_j s_i)$  stellen die Flächeninhalte der Parallelepipede in der  $j-k$ -,  $k-i$ - bzw.  $i-j$ -Ebene dar. Der Rest ist Pythagoras.

h) Ist  $r = ap + bq$ , so ist  $\langle p \wedge q, r \rangle = 0$ .

i) Zeigen Sie für reine Quaternionen:  $(p \wedge q)p + p(p \wedge q) = 0$  und  $(p \wedge q)q + q(p \wedge q) = 0$ .

j) Zeigen Sie: Sind  $p, q$  und  $r$  (reine) Quaternionen, so ist der Betrag des Skalarprodukts  $\langle p \wedge q, r \rangle$  das Volumen des von  $p, q$  und  $r$  aufgespannten Parallelepipeds.

Formal gilt als **Merkregel**: Ist  $p \wedge q \wedge r = \underbrace{vi \wedge j \wedge k}_{=0} + \text{Rest}$ , so ist  $|v|$  das Volumen.

### Bemerkung

Aus dem Keilprodukt von Graßmann entwickelte sich erst viel später die eigenständige (antikommutative:  $p \wedge q = -q \wedge p$  und assoziative:  $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$ ) Graßmann-Algebra über  $\mathbb{R}$ , in der die Produkte in Keilform stehenblieben. Hier lassen sich Aussagen a) bis h) einfacher beweisen. Eigenschaften des hamiltonschen Schiefkörpers gehen dabei jedoch verloren. Natürlich ist es möglich die Graßmann-Algebra auch über  $\mathbb{H}$  zu betrachten. Sind  $i, j$  und  $k$  die Basiselemente

des dreidimensionalen Raumes, so ist  $p \wedge q \wedge r = v i \wedge j \wedge k$ .  $|v|$  ist das von  $p$ ,  $q$  und  $r$  aufgespannte Volumen.

4. Mit  $\eta_p(q) := \frac{\langle q, p \rangle}{\|p\|^2} p =: p^{\parallel}(q)$  wird die Projektion der Quaternionen  $q$  auf  $p$  berechnet.

Folglich ist  $p^{\perp}(q) := q - \frac{\langle q, p \rangle}{\|p\|^2} p$  senkrecht zu  $p$ . Mithin ist  $q = p^{\perp}(q) + p^{\parallel}(q)$  eine Zerlegung von  $q$  in eine senkrechte und parallele Quaternionen.

Zeigen Sie dies mit Hilfe des Keil- und Skalarproduktes.

5. Weisen Sie mit 4. die Aussage 3d nach. Sind  $p$  und  $q$  reine Quaternionen, so bildet  $\{1, p, q, p \wedge q\}$  ein Koordinatensystem und  $\{1, p, p^{\perp}(q), p \wedge q\}$  sogar ein orthogonales Koordinatensystem der Quaternionen, falls  $p \wedge q \neq 0$ . Zeigen Sie dies. Sei  $t = 1t_1 + it_i + jt_j + kt_k$  eine Quaternion, dann gibt es  $a, b, c, d$  mit  $t = 1a + bp + cp^{\perp}(q) + dp \wedge q$ . **Tipp:** Skalarprodukt ( $\langle t, 1 \rangle = a \langle 1, 1 \rangle \Leftrightarrow t_1 = a$ )

6. Zeigen Sie  $\overline{p+q} = \bar{p} + \bar{q}$  und mit  $(1a_p + r)(1a_q + s) = 1a_p a_q + a_p r + sa_q + rs$  die Gleichheit  $\overline{pq} = \bar{p}\bar{q}$ .

7. Mit  $q = 1a + ib + jc + kd$  ist  $q^{*2} := q * q = a^2 - b^2 - c^2 - d^2$ .

*Nach Aufgabe 5. zeigt sich hier die Minkowski<sup>3</sup>-Metrik (ca. 1900 – 1920). :-) Er hat sie folglich nicht erfunden, sondern in konsequenter Weise verwendet.*

*Darüber hinaus ist noch zu bemerken, dass es keinen dreidimensionalen Körper gibt, obwohl wir angeblich in einem dreidimensionalen Raum leben.*

*Oder ist die vierte Dimension für uns verborgen?*

In Analogie zu der komplexen Zahlenebene, in der ein Kreis geometrisch durch komplexe Zahlen beschrieben werden kann, stellt sich die Frage, ob mittels Quaternionen eine Kugel im dreidimensionalen Raum – reine Quaternionen – beschrieben werden kann?

Die Antwort ist Ja!

<sup>3</sup> Das Relativitätsprinzip. The Report to Mathematics society in Göttingen of 5th November, 1907. Erschienen in Jahresbericht der Deutschen Mathematischen Vereinigung, 1915, Band 24, S. 372; Annalen der Physik, 1915, Band 47, S. 927; Die Grundgleichungen für Elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. – Göttinger Nachrichten, 1908, S. 53; Mathematischen Annalen, 1910, v. 68, S. 472, und auch: Leipzig, 1911; Raum und Zeit. The Report, Read to Naturalists' Society in Kologne on 21st September, 1908, erschienen in Physikalische Zeitschrift, 1909, Band 10, S. 104,

## **Drehungen im Raum**

Die Additionstheoreme folgen leicht mit dem Satz von de Moivre<sup>4</sup>.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \text{und} \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

Setzen wir  $\alpha = \beta = \frac{\xi}{2}$ , so erhalten wir mit  $\sin^2 \frac{\xi}{2} + \cos^2 \frac{\xi}{2} = 1$ :

$$\cos(\xi) = \cos^2 \frac{\xi}{2} - \sin^2 \frac{\xi}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\xi}{2} = -1 + 2 \cos^2 \frac{\xi}{2} \quad \text{und} \quad \sin(\xi) = 2 \sin \frac{\xi}{2} \cos \frac{\xi}{2}.$$

Zunächst kann eine beliebige Drehachse vorgegeben werden. Sei diese durch die reine Quaternion  $d := id_1 + jd_2 + kd_3$  mit  $\|d\|=1$ , also  $\bar{d} = -d$  dargestellt.  $d$  zeigt folglich auf den „Punkt“  $D(d_1, d_2, d_3)$ . Jetzt soll der ganze Raum (KOS) um  $d$ , genauer um die Gerade durch 0 und  $D$ , um einen Winkel  $\xi$  in Gegenuhrzeigersinn gedreht werden. Hierbei muss selbstverständlich die Drehachse  $d$  fest bleiben. Beachten Sie die drei unterschiedlichen gedanklichen Deutungen von  $d$ .

Es sei

$$e = \cos \frac{\xi}{2} + d \sin \frac{\xi}{2}.$$

Wegen

$$e\bar{e} = \left( \cos \frac{\xi}{2} + d \sin \frac{\xi}{2} \right) \left( \cos \frac{\xi}{2} - d \sin \frac{\xi}{2} \right) = \cos^2 \frac{\xi}{2} + d\bar{d} \sin^2 \frac{\xi}{2} = \cos^2 \frac{\xi}{2} + \sin^2 \frac{\xi}{2} = 1$$

gilt  $\bar{e} = e^{-1}$ . Folglich ist  $e$  eine Quaternione der Länge 1. Wir zeigen zunächst  $ed\bar{e} = d$  bzw.  $ed = de$ .

$$ed = \left( \cos \frac{\xi}{2} + d \sin \frac{\xi}{2} \right) d = \left( d \cos \frac{\xi}{2} + dd \sin \frac{\xi}{2} \right) = d \left( \cos \frac{\xi}{2} + d \sin \frac{\xi}{2} \right) = de$$

Wie wir sehen, bleibt die Achse fest. Schauen wir uns zunächst sehr einfache Beispiele an. Eine reine Quaternion darf immer als verallgemeinerter dreidimensionaler Vektor dargestellt werden. Wie bei den komplexen Zahlen wird der Punkt  $P$  in dem gedrehten KOS beschreiben.

### **Drehung eines Kreisrandes**

Zunächst beschreiben wir den Kreisrand in der komplexen Ebene  $a + kb$ :  $r(\cos \varphi + k \sin \varphi)$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$  fest,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . In einer zweiten Ebene betrachten wir den Kreisrand  $r(i \cos \vartheta + k \sin \vartheta)$ . Dieser wird um die Achse  $k$  mit dem Winkel  $\varphi$  gedreht. Folglich ist mit  $r = 1$ :

$$\begin{aligned} \left( \cos \frac{\varphi}{2} + k \sin \frac{\varphi}{2} \right) (i \cos \vartheta + k \sin \vartheta) \left( \cos \frac{\varphi}{2} - k \sin \frac{\varphi}{2} \right) &= \cos^2 \frac{\varphi}{2} (i \cos \vartheta + k \sin \vartheta) + \sin^2 \frac{\varphi}{2} (-i \cos \vartheta + k \sin \vartheta) \\ &\quad + \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} (+j \cos \vartheta + \sin \vartheta) + \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} (+j \cos \vartheta - \sin \vartheta) \\ &= \left[ i \left( \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) + j 2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \right] \cos \vartheta + k \sin \vartheta \\ &= (i \cos \varphi + j \sin \varphi) \cos \vartheta + k \sin \vartheta \end{aligned}$$

bei festem  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , falls  $-\pi \leq \vartheta < \pi$ . Wir sehen, dass wir uns auf den halben Kreisrand beschränken können, wenn er um  $2\pi$  gedreht wird. Der Rand der Vollkugel wird dabei vollständig

---

<sup>4</sup> Vgl. Komplexe Zahlen, Seite 5

überstrichen. Wird  $r$  variiert, also  $0 \leq r \leq R$ ,  $R \in \mathbb{R}$ , so erhalten wir die Vollkugel. Zusammenfassend beschreibt daher

$$\left(\cos \frac{\varphi}{2} + k \sin \frac{\varphi}{2}\right)(ir \cos \vartheta + kr \sin \vartheta) \left(\cos \frac{\varphi}{2} - k \sin \frac{\varphi}{2}\right) = r[(i \cos \varphi + j \sin \varphi) \cos \vartheta + k \sin \vartheta]$$

mit  $r \in \mathbb{R}^+$  fest und  $0 \leq \varphi < 2\pi$  sowie  $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq +\frac{\pi}{2}$  eine Drehung auf der Kugeloberfläche mit Radius  $r$ , denn

$$r[(i \cos \varphi + j \sin \varphi) \cos \vartheta + k \sin \vartheta] \cdot r[(-i \cos \varphi - j \sin \varphi) \cos \vartheta - k \sin \vartheta] = r^2.$$

Die Bewegung des Punktes (Zeigers)

$$p := i \cos \vartheta + k \sin \vartheta \quad \text{in den Punkt (Zeiger)} \quad q = (i \cos \varphi + j \sin \varphi) \cos \vartheta + k \sin \vartheta$$

ist wie folgt gegeben.

$$p \cos \psi + \frac{q - \langle q, p \rangle p}{\|q - \langle q, p \rangle p\|} \sin \psi$$

Beachten Sie  $\|p\| = \|q\| = 1$  und  $q - \langle q, p \rangle p \perp p$  sowie  $\varphi = \cos^{-1}(\langle q, p \rangle) = \sin^{-1}(\|q - \langle q, p \rangle p\|)$ .

Überprüfen Sie Anfang  $\psi = 0$  und Ende  $\psi = \varphi$  dieser Drehung.

**8.** Zeigen Sie: Für jede Quaternion  $p$  definiert  $\Delta_{(\alpha, i)} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  mit

$$\Delta_{(\alpha, i)}(p) := \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}\right) p \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}\right)^{-1} = \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}\right) p \left(\cos \frac{\alpha}{2} - i \sin \frac{\alpha}{2}\right)$$

eine Drehung mit  $i$  als Drehachse um den Winkel  $\alpha$ .  $\Delta_{(\alpha, -i)}$  definiert die inverse Drehung.

Entsprechend sind  $\Delta_{(\alpha, j)}$  und  $\Delta_{(\alpha, k)}$  Drehungen und  $\Delta_{(\alpha, -j)}$ ,  $\Delta_{(\alpha, -k)}$  ihre inversen Drehungen.

Nützliche Identitäten:

$$ipi = p - 2(p - p_i i) = -p + 2p_i i, \quad j pj = p - 2(p - p_j j), \quad kpk = p - 2(p - p_k k)$$

$$ip - pi = 2(p_j k - p_k j), \quad jp - pj = 2(p_k i - p_i k), \quad kp - pk = 2(p_i j - p_j i)$$

### Weitere Beispiele für geometrische Objekte.

**9.** Beschreiben Sie auf diese Weise den flachen Torus (Rettungsring) im dreidimensionalen Raum.

**10.** Beschreiben Sie den Torus  $S^1 \times S^1$  im vierdimensionalen Raum.

**11.** Das Möbiusband.

## Beispiel

$$\begin{aligned}\Delta_{(\alpha,i)}(p) &= \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}\right) p \left(\cos \frac{\alpha}{2} - i \sin \frac{\alpha}{2}\right) \\ &= p \cos^2 \frac{\alpha}{2} + (ip - pi) \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - ipi \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ &= p \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2(p_j k - p_k j) \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - (-p_l l - p_i i + p_j j + p_k k) \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ &= p \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) + 2(p_j k - p_k j) \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - 2(p_j j + p_k k) \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ &= p + (p_j k - p_k j) \sin \alpha - (p_j j + p_k k)(1 - \cos \alpha) \\ &= p_l l + p_i i + (p_j j + p_k k) \cos \alpha + (p_j k - p_k j) \sin \alpha\end{aligned}$$

## Weitere Beispiele

1. Es sei  $d := i$  die Drehachse, also  $e = \cos \frac{\xi}{2} + i \sin \frac{\xi}{2}$ . Der zu drehende „Punkt“ sei  $q := j$ , also  $Q(0; 1; 0)$  als Punkt. Zu berechnen ist  $eq\bar{e} = ej\bar{e}$ . Folglich ist mit  $iji = j$  und  $ij - ji = 2k$

$$ej\bar{e} = \left(\cos \frac{\xi}{2} + i \sin \frac{\xi}{2}\right) j \left(\cos \frac{\xi}{2} - i \sin \frac{\xi}{2}\right) = j \left(\cos^2 \frac{\xi}{2} - \sin^2 \frac{\xi}{2}\right) + k 2 \cos \frac{\xi}{2} \sin \frac{\xi}{2} = j \cos \xi + k \sin \xi.$$

Es liegt also eine Drehung um den Winkel  $\xi$  vor (Einheitskreis). Der Punkt im gedrehten KOS lautet  $Q'(0; \cos \xi; \sin \xi)$ .

2. Es sei wieder  $d := i$  die Drehachse und als nächstes sei  $q := i + j + k$  bzw.  $P(1; 1; 1)$ . Dann gilt mit  $e = \cos \frac{\xi}{2} + i \sin \frac{\xi}{2}$  die Drehung  $eq\bar{e} = ei\bar{e} + ej\bar{e} + ek\bar{e}$ . Es folgt  $ei\bar{e} = i$ . Entsprechend erhalten wir:

$$ej\bar{e} = \left(j \cos \frac{\xi}{2} + k \sin \frac{\xi}{2}\right) \left(\cos \frac{\xi}{2} - i \sin \frac{\xi}{2}\right) = j \left(\cos^2 \frac{\xi}{2} - \sin^2 \frac{\xi}{2}\right) + k 2 \cos \frac{\xi}{2} \sin \frac{\xi}{2} = j \cos \xi + k \sin \xi,$$

$$ek\bar{e} = \left(k \cos \frac{\xi}{2} - j \sin \frac{\xi}{2}\right) \left(\cos \frac{\xi}{2} - i \sin \frac{\xi}{2}\right) = k \left(\cos^2 \frac{\xi}{2} - \sin^2 \frac{\xi}{2}\right) - j 2 \sin \frac{\xi}{2} \cos \frac{\xi}{2} = k \cos \xi - j \sin \xi.$$

$$\text{Also ist } eq\bar{e} = i + j \cos \xi + k \sin \xi + k \cos \xi - j \sin \xi = i + j(\cos \xi - \sin \xi) + k(\sin \xi + \cos \xi).$$

Der Punkt im gedrehten KOS lautet  $P'(1; \cos \xi - \sin \xi; \sin \xi + \cos \xi)$ .

3. Zeigen Sie für  $e = \cos \frac{\xi}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k) \sin \frac{\xi}{2}$ , also  $d := \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$ , dass für  $\xi = \frac{2\pi}{3}$  die Achsen des Koordinatensystems zyklisch vertauscht werden.
4. Geben Sie eine Transformation  $e$  an, die um eine Koordinatenachse dreht, ohne diese selbst zu verwenden. (Tipp: Benutzen Sie die anderen Achsen.)

## Zur Steuerung eines Roboterarms sind folgende Antworten von Bedeutung.

Wie wird die Drehung um die eigene Achse, Zentralachse genannt, beschreiben? Im Abstand  $d$  von der Drehachse befindet sich ein Arm der Länge  $a$ , der um beinahe  $2\pi = 360^\circ$  im Gelenk drehbar ist. Gleichzeitig kann der Arm den Winkel  $-\pi - \varepsilon$  bis  $\pi + \varepsilon$  überstreichen, ohne das Gelenk zu drehen. Am Arm ist der Unterarm der Länge  $u$  befestigt, wieder mit einem Dreh- und einem Winkelgelenk.



Das Winkelgelenk ist von der gestreckten Verlängerung des Armes im Winkel  $\pi$  bis zurück zum Winkel  $\frac{\pi}{4}$  beweglich. Näherungsweise beschreibt das Ende des Arms bzw. Unterarms eine Kugeloberfläche. Eine Drehung um die Zentralachse ist jederzeit möglich.

**Die Koordination verschiedener Punkte innerhalb des maximalen Bereichs ist effizient zu beschreiben.**

Beginnen wir mit dem einfachsten Fall: Zwei verschiedene Punkte  $p, q$  sind auf einer Kugel vom Radius  $r$  gegeben. Im Punkt  $p$  befindet sich das Ende des Arms, der Punkt  $q$  ist anzusteuern. Der Arm ist im Mittelpunkt der Kugel drehbar.

1. Gib eine direkte Bewegung von  $p$  nach  $q$  an.
2. Bestimme alle Transformationen  $e$  mit  $ep\bar{e} = q$ .

**Tipp:** Zuerst normieren, also mit  $\frac{p}{\|p\|}, \frac{q}{\|q\|}$  rechnen.  $\frac{p \wedge q}{\|p \wedge q\|}$  ist eine mögliche Drehachse. Der Winkel

$$\varphi := \sphericalangle(p, q) \text{ zwischen } p, q \text{ beträgt } \varphi := \cos^{-1} \left( \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\| \cdot \|q\|} \right), \varphi = \sin^{-1} \frac{\|p \wedge q\|}{\|p\| \cdot \|q\|} \text{ oder } \varphi = \sin^{-1} \frac{\|q - \eta_p(q)\|}{\|q\|}.$$

**Ad 1.** Mit der Projektion  $\eta_p(q) := \frac{\langle q, p \rangle}{\|p\|^2} p$  der Quaternion  $q$  auf  $p$ , ist  $q - \frac{\langle q, p \rangle}{\|p\|^2} p$  orthogonal zu  $p$ . Die Beschreibung des Einheitskreises lautet

$$\frac{p}{\|p\|} \cos \psi + \frac{q - \eta_p(q)}{\|q - \eta_p(q)\|} \sin \psi \text{ mit } 0 \leq \psi \leq \varphi.$$

Damit ist 1. schon beantwortet.

**Zur Kontrolle:**

$$\begin{aligned} \frac{p}{\|p\|} \cos 0 + \frac{q - \eta_p(q)}{\|q - \eta_p(q)\|} \sin 0 &= \frac{p}{\|p\|} \text{ und } \frac{p}{\|p\|} \cos \varphi + \frac{q - \eta_p(q)}{\|q - \eta_p(q)\|} \sin \varphi = \frac{p}{\|p\|} \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\| \cdot \|q\|} + \frac{q - \eta_p(q)}{\|q - \eta_p(q)\|} \frac{\|q - \eta_p(q)\|}{\|q\|} \\ &= \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\|^2 \cdot \|q\|} p + \frac{q - \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\|^2} p}{\|q\|} \\ &= \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\|^2 \cdot \|q\|} p + \frac{q}{\|q\|} - \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\|^2 \cdot \|q\|} p \\ &= \frac{q}{\|q\|} \end{aligned}$$

Rechnen wir ohne Normierung, so erscheint nach der Drehung der Zeiger  $\frac{\|p\|}{\|q\|} q$ .

Wir rechnen die Zerlegung nach.

$$p \wedge q = p \wedge p^\perp(q) + p \wedge p^\parallel(q) = p \wedge \left( q - \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\|^2} p \right) + p \wedge \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\|^2} p = p \wedge \left( q - \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\|^2} p \right), \text{ da } p \wedge \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\|^2} p = 0$$

und

$$\langle p, q \rangle = \langle p, p^\perp(q) \rangle + \langle p, p^\parallel(q) \rangle = \left\langle p, q - \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\|^2} p \right\rangle + \left\langle p, \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\|^2} p \right\rangle = \left\langle p, \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\|^2} p \right\rangle,$$

da

$$\left\langle p, q - \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\|^2} p \right\rangle = \langle p, q \rangle - \left\langle p, \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\|^2} p \right\rangle = \langle p, q \rangle - \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\|^2} \langle p, p \rangle = \langle p, q \rangle - \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\|^2} \|p\|^2 = 0.$$

**Ad 2.:** Seien  $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ ,  $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$  und  $e = e_0 + e_1 i + e_2 j + e_3 k$ . Dann ist  $\bar{e} = e_0 - e_1 i - e_2 j - e_3 k$ .

Der Ansatz  $ep\bar{e} = q$  mit  $e\bar{e} = 1$  führt auf das zu lösenden Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2)p_1 - 2(e_0e_3 + e_1e_2)p_2 + 2(e_0e_2 + e_1e_3)p_3 &= q_1 \\ (e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2)p_2 - 2(e_0e_1 + e_2e_3)p_3 + 2(e_0e_3 + e_1e_2)p_1 &= q_2 \\ (e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2)p_3 - 2(e_0e_2 + e_1e_3)p_1 + 2(e_0e_1 + e_2e_3)p_2 &= q_3 \end{aligned}$$

Hier ist schon zu erkennen, dass alle Lösungen zu finden nicht so einfach ist. Es ist auch völlig unnötig, wie wir später zeigen werden.

Betrachten wir zunächst ein Beispiel. Beachte die Drehachse  $p \wedge q$ . Wir finden für  $0 \leq \psi \leq \varphi$ , wobei

$$\varphi = \sin^{-1} \left( \frac{\|p \wedge q\|}{\|p\| \|q\|} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\| \|q\|} \right) \text{ ist.}$$

$$\begin{aligned} \left( \cos \frac{\psi}{2} + \frac{p \wedge q}{\|p \wedge q\|} \sin \frac{\psi}{2} \right) \frac{p}{\|p\|} \left( \cos \frac{\psi}{2} - \frac{p \wedge q}{\|p \wedge q\|} \sin \frac{\psi}{2} \right) &= \frac{p}{\|p\|} \cos^2 \frac{\psi}{2} - \frac{1}{\|p \wedge q\|^2} (p \wedge q) \frac{p}{\|p\|} (p \wedge q) \sin^2 \frac{\psi}{2} \\ &\quad + \frac{1}{\|p \wedge q\|} \left[ (p \wedge q) \frac{p}{\|p\|} - \frac{p}{\|p\|} (p \wedge q) \right] \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2}. \end{aligned}$$

Wir wollen die Rechnungen vereinfachen.

Mit  $p * (p \wedge q) = q * (p \wedge q) = 0$  und  $(p \wedge q) \wedge p = \langle p, p \rangle q - \langle q, p \rangle p$  gelten folgende Aussagen.

- a)  $(p \wedge q) p (p \wedge q) = \|p \wedge q\|^2 p$
- b)  $(p \wedge q) p - p (p \wedge q) = 2(p \wedge q) \wedge p = 2(\langle p, p \rangle q - \langle q, p \rangle p)$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \left( \cos \frac{\psi}{2} + \frac{p \wedge q}{\|p \wedge q\|} \sin \frac{\psi}{2} \right) \frac{p}{\|p\|} \left( \cos \frac{\psi}{2} - \frac{p \wedge q}{\|p \wedge q\|} \sin \frac{\psi}{2} \right) &= \frac{p}{\|p\|} \left( \cos^2 \frac{\psi}{2} - \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\|p \wedge q\|} \frac{1}{\|p\|} (\langle p, p \rangle q - \langle q, p \rangle p) 2 \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \\ &= \frac{p}{\|p\|} \cos \psi + \frac{1}{\|p \wedge q\|} \frac{1}{\|p\|} (\langle p, p \rangle q - \langle q, p \rangle p) \sin \psi. \end{aligned}$$

Wir halten fest.

$$\left( \cos \frac{\psi}{2} + \frac{p \wedge q}{\|p \wedge q\|} \sin \frac{\psi}{2} \right) \frac{p}{\|p\|} \left( \cos \frac{\psi}{2} - \frac{p \wedge q}{\|p \wedge q\|} \sin \frac{\psi}{2} \right) = \frac{p}{\|p\|} \cos \psi + \frac{1}{\|p \wedge q\|} \frac{1}{\|p\|} (\langle p, p \rangle q - \langle q, p \rangle p) \sin \psi$$

und  $\psi = \varphi \Rightarrow \psi = \sin^{-1} \left( \frac{\|p \wedge q\|}{\|p\| \|q\|} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\| \|q\|} \right)$ . Für  $\psi = 0$  ist nichts zu zeigen.

Wir wollen nun ein kleines Beispiel durchrechnen, um den Rechenaufwand zu zeigen, wenn keine Vereinfachung durchgeführt wird.

### Beispiel

Gegeben seien die Zeiger  $p = i + 2j - k$ ,  $q = 2i - j + 3k$ . Ihre Längen sind folglich  $\|p\| = \sqrt{6}$  und  $\|q\| = \sqrt{14}$ , ihre Lage zueinander beträgt  $\langle p, q \rangle = 2 - 2 - 3 = -3$ .

Die Flächeninhalte des in die Koordinatenebenen projizierten Parallelogramms betragen

$$p \wedge q = (6-1)i + (-2-3)j + (-1-4)k = 5i - 5j - 5k$$

also 5, 5 und 5, nach Pythagoras beträgt der Flächeninhalt des Parallelogramms  $\|p \wedge q\| = 5\sqrt{3}$ .

Wir berechnen die benötigten Produkte

$$(p \wedge q) p (p \wedge q) = 75(i + 2j - k) = 75p,$$

$$(p \wedge q) p - p(p \wedge q) = 2 \cdot 5(i - j - k) \wedge (i + 2j - k) = 10(3i + 3k) = 30(i + k).$$

Diese setzen wir ein.

$$\begin{aligned} \left( \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{p \wedge q}{\|p \wedge q\|} \sin \frac{\varphi}{2} \right) \frac{p}{\|p\|} \left( \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{p \wedge q}{\|p \wedge q\|} \sin \frac{\varphi}{2} \right) &= \frac{p}{\|p\|} \cos^2 \frac{\varphi}{2} + 30 \frac{1}{5\sqrt{3}} (i + k) \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{75} 75 \frac{p}{\|p\|} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \\ &= \frac{p}{\|p\|} \left( \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) + \sqrt{3} (i + k) 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \\ &= \frac{p}{\|p\|} \cos \varphi + \sqrt{3} (i + k) \sin \varphi \end{aligned}$$

Für  $\varphi = 0$  ist  $\left( \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{p \wedge q}{\|p \wedge q\|} \sin \frac{\varphi}{2} \right) \frac{p}{\|p\|} \left( \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{p \wedge q}{\|p \wedge q\|} \sin \frac{\varphi}{2} \right)_{\varphi=0} = \frac{p}{\|p\|}$  und für  $\varphi = \sin^{-1} \left( \frac{\|p \wedge q\|}{\|p\| \|q\|} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\| \|q\|} \right)$

folgt

$$\begin{aligned} \left( \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{p \wedge q}{\|p \wedge q\|} \sin \frac{\varphi}{2} \right) \frac{p}{\|p\|} \left( \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{p \wedge q}{\|p \wedge q\|} \sin \frac{\varphi}{2} \right)_{\varphi = \sin^{-1} \left( \frac{\|p \wedge q\|}{\|p\| \|q\|} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\| \|q\|} \right)} &= \frac{p}{\|p\|} \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\| \|q\|} + \sqrt{3} (i + k) \frac{\|p \wedge q\|}{\|p\| \|q\|} \\ &= \frac{1}{\|p\|^2 \|q\|} [\langle p, q \rangle p + \sqrt{3} (i + k) \|p \wedge q\|] \\ &= \frac{1}{6 \|q\|} [-3p + \sqrt{3} (i + k) 5\sqrt{3}] \\ &= \frac{3}{6 \|q\|} [-p + 5(i + k)] \\ &= \frac{1}{\|q\|} [2i - j + 3k] \\ &= \frac{q}{\|q\|} \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt.

Mit der Vereinfachung geht es wie folgt.

$$\left( \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{p \wedge q}{\|p \wedge q\|} \sin \frac{\varphi}{2} \right) \frac{p}{\|p\|} \left( \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{p \wedge q}{\|p \wedge q\|} \sin \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{p}{\|p\|} \cos \varphi + \frac{1}{\|p \wedge q\|} \frac{1}{\|p\|} (\langle p, p \rangle q - \langle q, p \rangle p) \sin \varphi.$$

Für  $\varphi = 0$  ist  $\left( \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{p \wedge q}{\|p \wedge q\|} \sin \frac{\varphi}{2} \right) \frac{p}{\|p\|} \left( \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{p \wedge q}{\|p \wedge q\|} \sin \frac{\varphi}{2} \right)_{\varphi=0} = \frac{p}{\|p\|}$ . Hier bleibt es wie gehabt.

Für  $\varphi = \sin^{-1} \left( \frac{\|p \wedge q\|}{\|p\| \|q\|} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\| \|q\|} \right)$  folgt

$$\begin{aligned} \left( \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{p \wedge q}{\|p \wedge q\|} \sin \frac{\varphi}{2} \right) \frac{p}{\|p\|} \left( \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{p \wedge q}{\|p \wedge q\|} \sin \frac{\varphi}{2} \right)_{\varphi = \sin^{-1} \left( \frac{\|p \wedge q\|}{\|p\| \|q\|} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\| \|q\|} \right)} \\ = \frac{p}{\|p\|} \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\| \|q\|} + \frac{1}{\|p \wedge q\|} \frac{1}{\|p\|} (\langle p, p \rangle q - \langle q, p \rangle p) \frac{\|p \wedge q\|}{\|p\| \|q\|} \\ = \frac{\langle p, p \rangle}{\|p\| \|p\|} \frac{q}{\|q\|} \\ = \frac{q}{\|q\|}. \end{aligned}$$

## Das Ziel ist erreicht!

Halten wir fest.

Es sei  $0 \leq \psi \leq \varphi$ , wobei  $\varphi := \angle(p, q)$  der Winkel zwischen den Zeigern  $p, q$  ist. Dann wird die Drehung des Zeigers  $p$  in  $q$

- durch die Transformation mit der Drehachse  $\frac{p \wedge q}{\|p \wedge q\|}$  und den Winkel

$$\varphi = \cos^{-1} \left( \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\| \|q\|} \right) = \sin^{-1} \left( \frac{\|p \wedge q\|}{\|p\| \|q\|} \right) \text{ beschrieben durch:}$$

$$\left( \cos \frac{\psi}{2} + \frac{p \wedge q}{\|p \wedge q\|} \sin \frac{\psi}{2} \right) \frac{p}{\|p\|} \left( \cos \frac{\psi}{2} - \frac{p \wedge q}{\|p \wedge q\|} \sin \frac{\psi}{2} \right) = \frac{p}{\|p\|} \cos \psi + \frac{1}{\|p \wedge q\|} \frac{1}{\|p\|} (\langle p, p \rangle q - \langle q, p \rangle p) \sin \psi.$$

- in der  $p - q$  -Ebene durch den Einheitskreis beschrieben.

$$\frac{p}{\|p\|} \cos \psi + \frac{q - \eta_p(q)}{\|q - \eta_p(q)\|} \sin \psi$$

Hier ist  $\varphi := \cos^{-1} \left( \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\| \|q\|} \right) = \sin^{-1} \frac{\|q - \eta_p(q)\|}{\|q\|}$  mit der Projektion  $\eta_p(q) := \frac{\langle q, p \rangle}{\|p\|^2} p$ .

Manchmal ist es einfacher statt des direkten Weges mit einer Transformation zwei oder drei Transformationen hintereinander zu schalten, wenn das „Ziel“  $q$  unbekannt ist. Da wir drei orthonormale Achsen haben, gibt es auch drei ausgewählte Transformationen und deren Umkehrungen. (Vgl. 8.) Jede Transformation ist mittels dieser drei durch Hintereinanderausführen

darstellbar. Eine Transformation stellt einen inneren Automorphismus der multiplikativen Gruppe der reinen Quaternionen dar.

Eine mögliche Anwendung ist das Ausgleichen des Gleichgewichts eines Roboters.

Dies wäre auch zu umgehen, wenn ein kleiner Torus mit Quecksilber als Kreisel, auch als kardanischer Kreisel fungiert – heute eher elektronisch – obwohl manchmal eine mechanische Lösung besser ist. Durch das flüssige Quecksilber ist die Richtung des Ausgleichens offensichtlich bestimmt.

Die Unsinnigkeit des Hintereinanderausführens mehrerer Transformationen um einen Zeiger in einen anderen Zeiger zu überführen soll folgende Ausführung zeigen.

Dazu sind zwei zu den Koordinatenebenen parallele Ebenen zu betrachten, die sich in einer Geraden schneiden. Diese Ebenen „schneiden“ Kreisscheiben aus der Kugel, deren Ränder sich in zwei Punkten auf der Schnittgeraden treffen. Wählen wir einen der beiden aus. Sei  $s$  die Quaternion des Schnittpunktes. Dann liegen  $p$  und  $s$  auf einem Kegel mit dem ersten Kreisrand und  $s$  und  $q$  auf einem zweiten Kegel mit dem zweiten Kreisrand. Es verbleiben die beiden Drehwinkel zu bestimmen. Dazu muss  $s$  bekannt und somit folglich berechnet sein. Eine überflüssige Angelegenheit.

Die Schwierigkeit die Quaternionen zu finden, war für Hamilton unter den damals gegebenen Bedingungen nicht so einfach, da für ihn die Transformationen im Vordergrund standen. Die Einsicht eines nichtkommutativen Körpers erfolgte viel später. Heute rechnen wir einfach nach. Die Quaternionen wurden in der Mechanik und Elektrodynamik (Maxwell) verwendet. Heute finden sie wieder Anerkennung in der Robotik<sup>5</sup>.

Der Vergissfaktor der Multiplikation von Quaternionen lieferte die Vektorraumstruktur als abelsche Gruppe, die mit der Skalarmultiplikation (verlängern, kürzen und spiegeln von Vektoren) die heutige Struktur des Vektorraumes gebt. Dazu kam das antikommutative graßmannsche Keilprodukt, was von Kronecker lange bekämpft wurde. Statt antikommutativ wird auch schiefssymmetrisch gesagt.

In einem nächsten Schritt soll die Beschreibung in einer bewegten Ebene, z. B. am Ende eines Roboterarmes erfolgen.

## **Rotation um einen beliebigen Punkt**

*In diesem Abschnitt betrachten wir nur reine Quaternionen.*

In einer ersten Anwendung soll in bewegten Ebenen etwas geometrisch beschrieben werden. Da es relativ einfach ist, soll zunächst ein Kreis in einer sich zur Bewegungsrichtung bewegenden Ebene beschrieben werden. Dies in Anlehnung an einen Roboter mit Ober- und Unterarm. Ein Zeiger des Raumes wird in die Summe zweier Zeiger (Ober- und Unterarm) zerlegt. Wir gehen dabei von der Bekanntheit der Punkte aus. Start- und Zielzeiger sind folglich bekannt, wobei Start und Ziel nur durch eine Bewegung des „Unterarms“ allein nicht verbunden werden können. Das Ende des Oberarms beschreibt einen Weg im Raum.

Der Focus liegt hier auf einer möglichst einfachen Beschreibung.

Es sei  $w(t) := w_i(t)i + w_j(t)j + w_k(t)k$  ein Weg im hamiltonschen Raum der reinen Quaternionen in Richtung  $w'(t) := w'_i(t)i + w'_j(t)j + w'_k(t)k$ . Es seien  $p \neq q$  zwei von null

---

<sup>5</sup> <https://ni.www.techfak.uni-bielefeld.de/files/ManipulativeRoboticsScript.pdf>

verschiedene Zeiger.  $p$  und  $q$  spannen eine Ebene durch den Ursprung auf. Diese wird zu einer bewegten Ebene durch die „Verschiebung“ mit  $w(t)$ .

$$w(t) + p \text{ und } w(t) + q$$

Jeder Punkt dieser Ebene auf dem ein Zeiger weist ist von der Form  $w(t) + u$ . Für die Ebene schreiben wir

$$E(t) = w(t) + \text{Sp}(p, q).$$

Für die Kreisbeschreibung benötigen wir orthonormale Zeiger. Wir ersetzen daher den Zeiger  $q$  durch den auf  $p$  senkrecht stehenden Zeiger  $q - \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\|^2} p$ .

$$\text{Seien nun } n_1 = \frac{p}{\|p\|} \text{ und } n_2 := \frac{q - \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\|^2} p}{\left\| q - \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\|^2} p \right\|}.$$

Der Kreis  $k$  mit Radius  $r$  um den Punkt  $w(t)$  in der Ebene wird wie folgt beschrieben.

$$k(t, s) := w(t) + n_1 r \cdot \cos(\varphi) + n_2 r \cdot \sin(\varphi)$$

Umkehrung

Zur Unterscheidung bezeichnen wir die Zeiger mit kleinen Buchstaben, die Punkte mit großen Buchstaben. Mit O-Arm und U-Arm wird der Oberarm bzw. Unterarm des Roboters bezeichnet. Generell bewegt sich das (Kugel-)Gelenk im Idealfall auf einer Kugeloberfläche, wenn sich der Roboter nicht um seine Zentralachse dreht. Entsprechend gilt dies auch für den U-Arm, wenn nur er sich bewegt.

Gegeben seien die Punkte  $A$  und  $B$  im Bereich der „Arme“. Von  $A$  soll ein Objekt in  $B$  transportiert werden. Es seien  $l_o$  und  $l_u$  die Längen des O-Arms und U-Arms. Es sei  $U$  der Punkt, in dem sich das Ende des O-Arms befindet. Auf  $U$  weist der Zeiger  $u(t)$  zum Zeitpunkt  $t=0$ . Das Unterarmende befindet sich im Punkt  $S$ . Ist  $\|a - u(0)\| = \|b - u(0)\| = l_u$ , so sind  $A$  und  $B$  ohne eine Bewegung des O-Arms zu erreichen. Der Zeiger  $v := s - u(0)$  wird nun in den Zeiger  $p := a - u(0)$  durch den U-Arm in  $A$  gefahren und von dort weiter in  $q := b - u(0)$  bzw.  $B$ . Diesen Fall haben wir gerade besprochen. Es handelt sich um ein verschobenes Koordinatensystem.

$$k(t) := u(t) + n_1 r \cdot \cos(\psi) + n_2 r \cdot \sin(\psi)$$

Statt des Winkels  $\psi$  wird gerne  $\xi(s)$  in Bogenmaß mit Parameter  $s \in \mathbb{R}$  genommen.  $s$  fungiert als Zeitparameter. Bei konstanter Winkelgeschwindigkeit wäre  $\xi(s) = \omega s$ .

## **Das begleitende Dreibein**

Das Gelenk zwischen O- und U-Arm, kurz OU-Gelenk, kann als Koordinatenursprung eines verschobenen Koordinatensystems betrachtet werden. Der sich bewegende U-Arm überstreicht eine infinitesimale Fläche und definiert einen auf dieser Fläche orthogonalen

Zeiger via Dachprodukt. Wir erhalten mit  $R(s)$  als bewegten Zeiger des U-Arms  $R(s) \wedge R'(s)$ , wobei  $R'(s)$  die Ableitung nach dem Parameter  $s$  bedeutet. Ein Dreibein wäre

$$R(s), R'(s) \text{ und } R(s) \wedge R'(s).$$

Bewegt sich auch der O-Arm als Zeiger  $r(t)$ , so beschreibt  $r(t) + R(s)$  den Endpunkt  $S$ .

Soll der Roboterarm mit O- und U-Arm mit den Endpunkt in einen Punkt gesteuert werden, so bietet sich an, O- und U-Arm als Ebene zu betrachten. Es bleibt die Neigung der Ebene mittels Richtungscosinus einzustellen, wenn die „Höhe“ durch den U- oder O-Arm eingestellt vorab eingestellt wurde. Dann kann der Arm einfach durch Drehung an die Position gefahren werden.

## Beliebige Drehung um eine ausgezeichnete Achse

Es sei nun  $q := xi + yj + zk$  eine beliebige Quaternion, die auf den Punkt  $P(x; y; z)$  zeigt und  $e = \cos \frac{\xi}{2} + d \sin \frac{\xi}{2}$  die Drehung um die Drehachse  $d = d_1i + d_2j + d_3k$  mit  $d\bar{d} = 1$ . Wir berechnen

$$e(xi + yj + zk)\bar{e} = xe\bar{e} + yej\bar{e} + zek\bar{e},$$

indem wir die Quaternionen  $ei\bar{e}$ ,  $ej\bar{e}$  und  $ek\bar{e}$  berechnen. Dafür setzen wir  $\alpha := \cos \frac{\xi}{2}$  und  $\rho := d \sin \frac{\xi}{2}$ , dann ist  $ei\bar{e} = (\alpha + \rho)i(\alpha - \rho) = \alpha^2i + \alpha(\rho i - i\rho) - \rho i\rho$  zu berechnen.

$$\rho i - i\rho = ((-d_1 + d_3j - d_2k) - (-d_1 - d_3j + d_2k)) \sin \frac{\xi}{2} = 2(d_3j - d_2k) \sin \frac{\xi}{2}$$

$$\begin{aligned} \rho i\rho &= (-d_1 + d_3j - d_2k)(d_1i + d_2j + d_3k) \sin^2 \frac{\xi}{2} \\ &= \left( (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)i - 2d_1(d_1i + d_2j + d_3k) \right) \sin^2 \frac{\xi}{2} \\ &= (i - 2d_1d) \sin^2 \frac{\xi}{2} \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} ei\bar{e} &= \cos^2 \frac{\xi}{2} i - (i - 2d_1d) \sin^2 \frac{\xi}{2} + 2(d_3j - d_2k) \sin \frac{\xi}{2} \cos \frac{\xi}{2} \\ &= \left( \cos^2 \frac{\xi}{2} - \sin^2 \frac{\xi}{2} \right) i + 2d_1d \sin^2 \frac{\xi}{2} + (d_3j - d_2k) \sin \xi \\ &= \cos \xi i + d_1d(1 - \cos \xi) + (d_3j - d_2k) \sin \xi. \end{aligned}$$

Entsprechend sind

$$ej\bar{e} = \cos \xi j + d_2d(1 - \cos \xi) + (d_1k - d_3i) \sin \xi$$

und

$$ek\bar{e} = \cos \xi k + d_3d(1 - \cos \xi) + (d_2i - d_1j) \sin \xi.$$

Zusammengefasst ergibt sich

$$\begin{aligned} eq\bar{e} &= xe\bar{e} + yej\bar{e} + zek\bar{e} \\ &= x(\cos \xi i + d_1d(1 - \cos \xi) + (d_3j - d_2k) \sin \xi) \\ &\quad + y(\cos \xi j + d_2d(1 - \cos \xi) + (d_1k - d_3i) \sin \xi) \\ &\quad + z(\cos \xi k + d_3d(1 - \cos \xi) + (d_2i - d_1j) \sin \xi) \\ &= (xi \cos \xi + xd_1d(1 - \cos \xi) + x(d_3j - d_2k) \sin \xi) \\ &\quad + (yj \cos \xi + yd_2d(1 - \cos \xi) + y(d_1k - d_3i) \sin \xi) \\ &\quad + (zk \cos \xi + zd_3d(1 - \cos \xi) + z(d_2i - d_1j) \sin \xi) \\ &= q \cos \xi + \langle q, d \rangle d(1 - \cos \xi) - [q, d] \sin \xi. \end{aligned}$$

Oder direkt als Quaternion mit Koordinaten

$$\begin{aligned} eq\bar{e} &= [x \cos \xi + d_1(xd_1 + yd_2 + zd_3)(1 - \cos \xi) + (zd_2 - yd_3) \sin \xi] i \\ &\quad + [y \cos \xi + d_2(xd_1 + yd_2 + zd_3)(1 - \cos \xi) + (xd_3 - zd_1) \sin \xi] j \\ &\quad + [z \cos \xi + d_3(xd_1 + yd_2 + zd_3)(1 - \cos \xi) + (yd_1 - xd_2) \sin \xi] k \end{aligned}$$



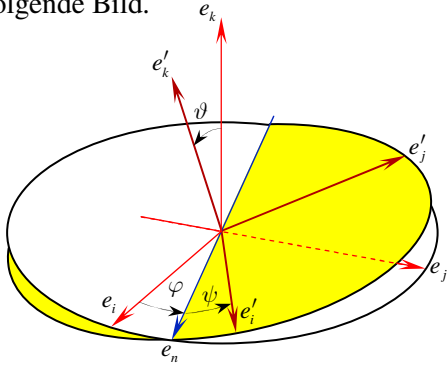
Der gedrehte Punkt  $P'$  im KOS lautet

$$\begin{aligned} P' & \left( x \cos \xi + d_1 (x d_1 + y d_2 + z d_3) (1 - \cos \xi) + (z d_2 - y d_3) \sin \xi; \right. \\ & \quad y \cos \xi + d_2 (x d_1 + y d_2 + z d_3) (1 - \cos \xi) + (x d_3 - z d_1) \sin \xi; \\ & \quad \left. z \cos \xi + d_3 (x d_1 + y d_2 + z d_3) (1 - \cos \xi) + (y d_1 - x d_2) \sin \xi \right). \end{aligned}$$

**Überprüfen Sie die Ergebnisse zu den Beispielen 1. bis 4.**

## Euler Rotation

In der Physik (lagrangesche Mechanik) kommt es bei der Kreiselrotation vor, dass eine gekippte Achse auch Rotationsachse ist. In diesem Fall ändert sich die lagrangesche Funktion nicht und es existiert nach E. Noether ein erstes Integral. Es ist daher wichtig das transformierte KOS zu kennen. Die dabei auftretenden Winkel sind nach Euler benannt und heißen Euler-Winkel. Betrachten wir das folgende Bild.



Das ungestrichene System ist ruhend. In der Achse  $e'_k$  rotiert ein Kreisel. Die Achse  $e_n$  ist eine Hilfsachse, um  $e_k$  in  $e'_k$  zu überführen, also  $e_n := [e_k, e'_k]$ .

Beschreiben wir die Transformationen.

1. Die Rotation um  $e_k$  dreht die Achse  $e_i$  um den Winkel  $\varphi$  in die Achse  $e_n$ . Dies leistet die Transformation  $e_1 = \cos \frac{\varphi}{2} + k \sin \frac{\varphi}{2}$ . Mit  $e_1 \bar{e}_1$  folgt:

$$\left( \cos \frac{\varphi}{2} + k \sin \frac{\varphi}{2} \right) i \left( \cos \frac{\varphi}{2} - k \sin \frac{\varphi}{2} \right) = i \left( \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) + j \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = i \cos \varphi + j \sin \varphi.$$

Die Achse  $e_n$  wird folglich durch  $i \cos \varphi + j \sin \varphi$  repräsentiert.

2. Nun ist die Drehachse  $e_n$  und damit  $e_2 = \cos \frac{\vartheta}{2} + (i \cos \varphi + j \sin \varphi) \sin \frac{\vartheta}{2}$  die Transformation.

$\left( \cos \frac{\vartheta}{2} + (i \cos \varphi + j \sin \varphi) \sin \frac{\vartheta}{2} \right) k \left( \cos \frac{\vartheta}{2} - (i \cos \varphi + j \sin \varphi) \sin \frac{\vartheta}{2} \right)$  ist zu berechnen.

$$\begin{aligned} e_2 k \bar{e}_2 &= \left( k \cos \frac{\vartheta}{2} - (j \cos \varphi - i \sin \varphi) \sin \frac{\vartheta}{2} \right) \left( \cos \frac{\vartheta}{2} - (i \cos \varphi + j \sin \varphi) \sin \frac{\vartheta}{2} \right) \\ &= k \left( \cos^2 \frac{\vartheta}{2} - \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) - (j \cos \varphi - i \sin \varphi) 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \\ &= k \cos \vartheta + (i \sin \varphi - j \cos \varphi) \sin \vartheta \end{aligned}$$

Damit ist  $e_k$  in  $e'_k$  zu überführt und  $i \sin \varphi \sin \vartheta - j \cos \varphi \sin \vartheta + k \cos \vartheta$  repräsentiert  $e'_k$ .

3. Im letzten Schritt wird um  $e'_k$  rotiert, also um die Drehachse  $k \cos \vartheta + (i \sin \varphi - j \cos \varphi) \sin \vartheta$ , damit

$e_n$  in  $e'_i$  übergeht. Mit  $e_3 := \cos \frac{\psi}{2} + (k \cos \vartheta + (i \sin \varphi - j \cos \varphi) \sin \vartheta) \sin \frac{\psi}{2}$  folgt:

$$e_3 (i \cos \varphi + j \sin \varphi) \bar{e}_3 = (i \cos \varphi + j \sin \varphi) \cos \psi + [(j \cos \varphi - i \sin \varphi) \cos \vartheta + k \sin \vartheta] \sin \psi.$$

Die Quaternionen

$$i (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta) + j (\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta) + k \sin \vartheta \sin \psi$$

repräsentiert folglich die Achse  $e'_i$ .

Wird fortgesetzt!