Die Komplexen Zahlen

Bis heute haben wir etliche Zahlen kennen gelernt. Es begann mit den Natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, erweitert auf die Ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bis hin zu den Rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Diese sind alle abzählbar, also alle gleich mächtig. Nicht mehr abzählbar waren die Reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Da jede darauffolgende Zahlenmenge eine Erweiterung der vorherigen Zahlen darstellt, ergibt sich folgende Inklusionskette.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Nun gibt es jedoch immer noch Gleichungen, die durch keine reelle Zahl gelöst wird, z. B. $X^2 + 1 = 0$. Das Quadrat müsste ja negativ sein.
Es ist folglich der Wunsch vorhanden, für jede positive reelle Zahl a^2 die Gleichung $X^2 + a^2 = 0$ zu lösen. Zunächst führen wir dazu ein neues Zahlensymbol i ein. Diese „neue Zahl" hat die Eigenschaft, dass ihr Quadrat -1 ergibt. i ist also keine reelle Zahl. Von dieser Zahl i verlangen wir noch, dass sie mit jeder reellen Zahl kommutiert. Es soll folglich gelten:

$$ia = ai \text{ für alle } a \in \mathbb{R}.$$

Mithin gilt:

$$(ia)^2 = iaia = iiaa = i^2 a^2 = -a^2 \;.$$

Die Zahl ia löst somit die Gleichung $X^2 + a^2 = 0$ für jede beliebige reelle Zahl a.
Durch ein neues Symbol erhalten wir somit phantastische Möglichkeiten. Die Zahlen $i\mathbb{R} := \{ ia \mid a \in \mathbb{R} \}$ heißen ***Imaginäre Zahlen***. Zwei imaginäre Zahlen ia und ib lassen sich natürlich addieren, wenn i das Distributivgesetz erfüllt. Es gilt dann:

$$ia + ib = i(a+b).$$

Also verlangen wir das Distributivgesetz für i.
Wie aber verhält sich die Multiplikation? Es gilt:

$$(ia)\cdot(ib) = iaib = iiab = i^2 ab = -ab \;.$$

Die Multiplikation liefert folglich im Allgemeinen keine imaginäre Zahl, da $-ab \in \mathbb{R}$.

Jedoch Vorsicht!

$$-1 = i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 \neq \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

Erweitern wir die Imaginären Zahlen, indem wir zulassen, dass auch reelle Zahlen addiert werden dürfen.

Forderung: $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ sollen die „Neuen Zahlen" sein. ***Wir definieren:***

Die Menge aller Zahlen der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ heißen ***Komplexe Zahlen***. Es gilt somit: Die Menge

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} + i\mathbb{R} := \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

ist ein komplexer kommutativer Zahlenkörper. Für die Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ gelten die gleichen Gesetze wie in $\mathbb{R}$.

PD Dr. rer. nat. habil. Gert Hillebrandt

$\mathbb{C}$ *heißt Körper der komplexen Zahlen.*

Statt $\mathbb{R}+i\mathbb{R}$ schreiben wir auch kurz $\mathbb{R}[i]$; gelesen $\mathbb{R}$ ***adjungiert*** i.

Wir sind hier naiv vorgegangen, um diesen Körper zu finden. Mathematisch geht es anders.

Definieren wir *das Produkt zweier Mengen*.

Der Einfachheit halber betrachten wir Zahlenmengen.

Es sei $\mathbb{Z}$ die Menge der Ganzen Zahlen und $\mathbb{R}$ die Menge der Reellen Zahlen. Die Menge

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{R}:=\{(z;r)\ |\ z\in\mathbb{Z} \text{ und } r\in\mathbb{R}\}$$

heißt (***Mengen-***)***Produkt*** der ganzen Zahlen und der reellen Zahlen. Auf dieser Menge definieren wir jetzt eine neue Addition $\oplus$. Es sei

$$(z_1;r_1)\oplus(z_2;r_2):=(z_1+z_2;r_1+r_2),$$

wobei z_1+z_2 bzw. r_1+r_2 die gewöhnliche Addition in $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{R}$ ist.

Das Nullelement ist folglich $(0;0)$. Zu jeder „Zahl“ $(z_1;r_1)$ gibt es eine inverse „Zahl“ $(-z_1;-r_1)$, da

$$(z_1;r_1)\oplus(-z_1;-r_1):=(0;0).$$

Das Assoziativ- und Kommutativgesetz ist automatisch durch $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{R}$ erfüllt. Ersetzen wir nun $\mathbb{Z}$ durch $\mathbb{R}$ und definieren wir eine Multiplikation $\odot$ auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
Wir definieren für $a,b,c,d\in\mathbb{R}$

$$(a;b)\odot(c;d):=(ac-bd;\ ad+bc).$$

Wegen $ac-bd\in\mathbb{R}$ und $ad+bc\in\mathbb{R}$ ist $(a;b)\odot(c;d)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Insbesondere ist $\odot$ kommutativ, wenn die Gesetze der reellen Zahlen beachtet werden.
Gesucht ist nun das neutrale Element der Multiplikation. Dazu berechnen wir die Lösung von

$$(a;\ b)\odot(c;\ d):=(a;\ b).$$

Also $ac-bd=a$ und $ad+bc=b$. Ist $a=0,\ b\neq 0$ bzw. $a\neq 0,\ b=0$, so folgt sofort $(c;\ d)=(1;\ 0)$. Seien nun $a\neq 0,\ b\neq 0$. Wir erhalten $a(c-1)-bd=0$ und $ad+b(c-1)=0$.

Multiplizieren wir mit b bzw. a, so folgt $ab(c-1)-b^2d=0$ und $a^2d+ab(c-1)=0$. Subtraktion der ersten von der zweiten Gleichung liefert $(a^2+b^2)d=0$. Hieraus folgt $d=0$. Setzen wir die Lösung ein, so folgt noch $c=1$. Das neutrale Element der Multiplikation ist somit $(1;\ 0)$, wie schon vermutet.

Wegen $(0;\ 1)\odot(0;\ 1):=(-1;\ 0)$, ist $(0;\ 1)$ eine Lösung von $X^2+(1;\ 0)=(0;\ 0)$. Hierbei ist $X^2:=X\odot X$. Auch dieser Körper löst jede quadratische Gleichung.

Das Assoziativgesetz ist einfach nachzurechnen, wenn die Gesetze der reellen Zahlen berücksichtigt werden. Rechnen wir das Distributivgesetz nach. Es seien $(a;\, b),\ (c;\, d),\ (e;\, f) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Unter Beachtung der Gesetze der reellen Zahlen finden wir

$$\begin{aligned}(a;\, b)\odot\big((c;\, d)\oplus(e;\, f)\big) &= (a;\, b)\odot(c+e;\, d+f)\\ &= \big(a(c+e)-b(d+f);\, a(d+f)+b(c+e)\big)\\ &= (ac-bd+ae-bf;\, ad+bc+af+be)\\ &= (ac-bd;\, ad+bc)\oplus(ae-bf;\, af+be)\\ &= \big((a;\, b)\odot(c;\, d)\big)\oplus\big((a;\, b)\odot(e;\, f)\big)\\ &= (a;\, b)\odot(c;\, d)\oplus(a;\, b)\odot(e;\, f).\end{aligned}$$

Wir setzen natürlich „Punkt“ vor „Strich“ voraus.

Berechnen wir noch das inverse Element von $(a;\, b)$, wobei $a\neq 0$ oder $b\neq 0$. Der Ansatz $(a;\, b)\odot(c;\, d)=(1;\, 0)$ liefert

$$\begin{aligned}ac-bd&=1,\\ ad+bc&=0.\end{aligned}$$

Wieder finden wir wie bei der Bestimmung des neutralen Elementes das inverse Element.

$$\left.\begin{aligned}axc-xbd&=x\\ ayd+ybc&=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned}a^2c-abd+abd+b^2c&=a\\ a^2d+abc-abc+b^2d&=-b\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned}(a^2+b^2)c&=a\\ (a^2+b^2)d&=-b\end{aligned}\right.$$

Das inverse Element ist folglich

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2};-\frac{b}{a^2+b^2}\right).$$

Auch diese Konstruktion liefert Komplexen Zahlen.

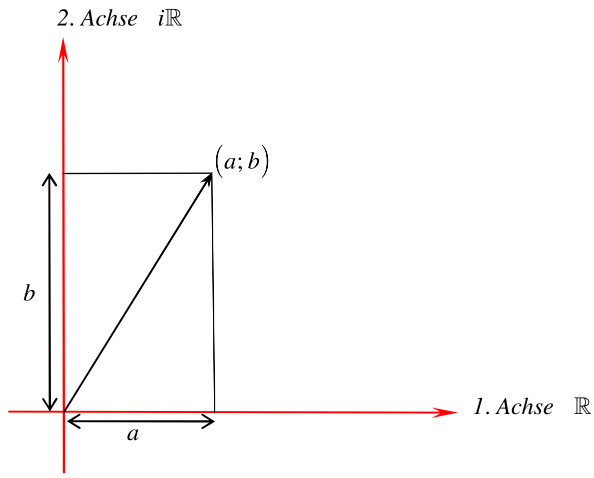
Wir zeigen nun, dass beide Konstruktionen im Wesentlichen gleich sind.

Dazu betrachten wir die Menge $\mathbb{R}[i]=\left\{a+ib \;\middle|\; a,b\in\mathbb{R} \text{ und } i^2=-1\right\}$. Wir identifizieren $a\equiv(a;\, 0)$ und $bi\equiv(0;\, b)$. Genauer sind die Körper $(\mathbb{R}\times\mathbb{R};\oplus;\odot)$ und $(\mathbb{R}[i];+;\cdot)$ isomorph. Welche Darstellung der komplexen Zahl gewählt wird, ist folglich egal. Dies ist uns auch bei den rationalen Zahlen bekannt. da z.B. $\frac{1}{3}=0,\overline{3}$.

Graphische Darstellung der komplexen Zahlen

Die reellen Zahlen lassen sich auf dem Zahlenstrahl darstellen. Dabei legen zwei unterschiedliche Zahlen alle anderen Zahlen fest. Dies ist deshalb richtig, weil jede Zahl durch den Abstand der Zahl von null festgelegt ist. Jede Zahl wird also durch eine Länge bzw. Spiegelung an null dargestellt. Deshalb genügt null und eine weitere reelle Zahl festzulegen.

Da der Zahlenstrahl vollständig durch die reellen Zahlen besetzt ist, können die komplexen Zahlen nicht auf einem Strahl dargestellt werden. Dies ist aber auch klar, wenn wir das Produkt $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ betrachten und jeder „Punkt“ einer komplexen Zahl entspricht. Deshalb wählen wir das rechtwinklige Koordinatensystem. Jeder Punkt entspricht jetzt einer komplexen Zahl. Der Betrag einer komplexen Zahl wird durch den Abstand zum Ursprung, also zur $(0;\,0)$ festgelegt. Es gilt folglich



$$\|(a;\,b)\| := \sqrt{a^2+b^2}\,.$$

Kleine Übung: Zeige, dass $\|(a;\,b)\odot(c;\,d)\| = \|(a;\,b)\|\cdot\|(c;\,d)\|$ gilt. Es darf auch die Darstellung $a+bi$ benutzt werden.

Tipp: Zeige zuerst $\|(a;\,b)\odot(c;\,d)\|^2 = \|(a;\,b)\|^2\cdot\|(c;\,d)\|^2$ und rechne rückwärts.

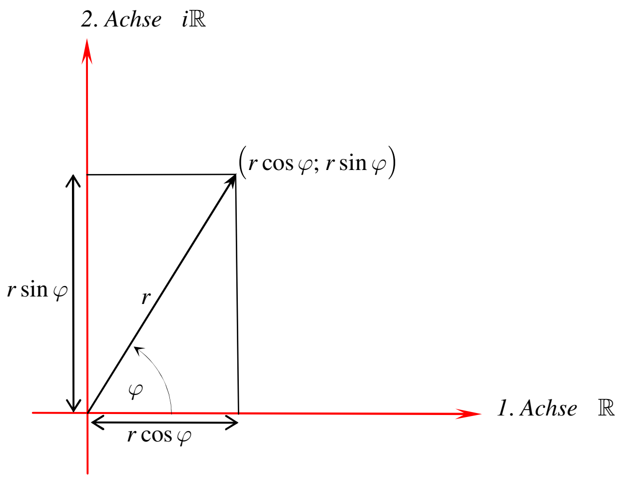
Die Polarform der komplexen Zahlen

Setzen wir $r := \sqrt{a^2+b^2}$ für den Abstand der komplexen Zahl $(a;\,b)$ vom Ursprung $(0;\,0)$ des Koordinatensystems, so kann mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen sin und cos die komplexe Zahl auch wie folgt dargestellt werden.

$$(a;\,b) = (r\cos\varphi;\; r\sin\varphi),\ \text{bzw.}$$

$$a+ib = r\cos\varphi + i\,r\sin\varphi\,,\ \text{wobei}\ 0\le\varphi<2\pi$$

Der Winkel ist hier beschränkt, da wir sonst später eine Mehrdeutigkeit bekämen, die nur durch eine „Riemannsche Fläche“ gelöst werden kann.



Eine weitere Darstellung liefert uns Euler.

Die Formel von Euler für komplexe Zahlen

Es gilt $$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,.$$

Ein möglicher Beweis setzt die Reihenentwicklung der drei Funktionen voraus. Wir zeigen später, dass die Lösung der Differentialgleichung

$$ig(\varphi) - g'(\varphi) = 0,\ g(0) = 1$$

eindeutig bestimmt ist. Da $g(\varphi)=e^{i\varphi}$ und $h(\varphi)=\cos\varphi+i\sin\varphi$ die Gleichung für alle $0\le\varphi<2\pi$ erfüllen, folgt aus der Eindeutigkeit $g=h$ und damit die Formel von Euler.

Der Satz von de Moivre

Es sei $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ und $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$. Dann gilt

$$z_1z_2=r_1r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right).$$

Beweis:

Mit $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)=r_1e^{i\varphi_1}$ und $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=r_2e^{i\varphi_2}$ folgt

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2}=r_1r_2e^{i\varphi_1+i\varphi_2}=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}=r_1r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right).$$

Korollar:

$$z_1z_2\cdots z_n=r_1r_2\cdots r_n\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)\right)$$

$$z^q=\left[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right]^q=\left[re^{i\varphi}\right]^q=r^qe^{iq\varphi}=r^q\left(\cos(q\varphi)+i\sin(q\varphi)\right) \text{ für alle } q\in\mathbb{Q}.$$

Der Beweis des ersten Teils erfolgt durch vollständige Induktion nach *n*. Der zweite Teil folgt aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion. Schreibe dazu $q=\frac{s}{t}$, wobei s und t teilerfremd sind.

Übung

Zeigen Sie:

a) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

b) $\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta$

c) $\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$

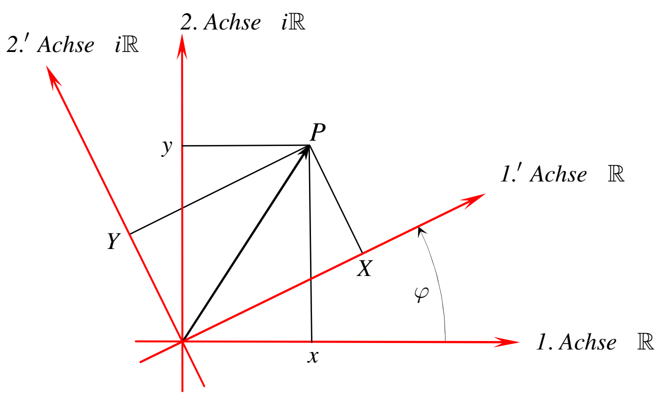
d) $\sin(3\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

e) $\cos(3\alpha)=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

f) $\cos(4\alpha)=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$

Drehung eines ebenen Koordinatensystems und Kräfte

Eine sehr schöne Anwendung ist die Drehung eines ebenen Koordinatensystems. Dazu sei $P(x;y)$ ein Punkt der Ebene mit seinen Koordinaten x und y. Diesen Punkt fassen wir als ein Punkt der komplexen Ebene auf. Wir setzen $z:=x+iy$. Eine Drehung um den Winkel φ liefert die „neuen Koordinaten“ $(X;Y)$ des Punktes *P*.



Auch hier schreiben wir $Z := X + iY$. Natürlich gilt $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Wir erhalten $Z = ze^{-i\varphi}$, also

$$(X + iY) = (x + iy)(\cos\varphi - i\sin\varphi) = (x\cos\varphi + y\sin\varphi) + i(-x\sin\varphi + y\cos\varphi).$$

Die Drehung wird folglich beschrieben durch

$$X = x\cos\varphi + y\sin\varphi \text{ und } Y = -x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

Bemerkungen

1. In Koordinaten kann die Drehung mittels Matrix wie folgt beschrieben werden.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   Es können auch halbe Winkel zur Beschreibung herangezogen werden, da

$$\left(\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2 = \cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2} - i2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

2. Für den Beobachter im unbewegten System geschieht nichts. Für den Beobachter im mitbewegten System bewegt sich der Punkt auf einer Kreisbahn.

Kräfte in dem sich drehenden Koordinatensystem

Wir setzen jetzt die Differenzierbarkeit voraus. An dem Punkt $P(x_1; x_2)$ befinde sich nun eine Masse *m*. Auf *m* wirke die Kraft $\boldsymbol{F}_z(t)$ im Koordinatensystem $(x_1; x_2)$, die wir komplex betrachten, also $\boldsymbol{F}_z(t) = F_{x_1}(t) + iF_{x_2}(t)$ bzw. $F_{x_1}(t) = m\ddot{x}_1(t)$ und $F_{x_2}(t) = m\ddot{x}_2(t)$. Wie lautet die Kraftgleichung in dem sich gleichmäßig drehenden Koordinatensystem? Beachten Sie: $\boldsymbol{F}_Z(t) = \boldsymbol{F}_z(t)e^{-i\omega t}$, wobei $\boldsymbol{F}_Z(t)$ die im Koordinatensystem $(X_1; X_2)$ gemessene Kraft ist! Wir schreiben $\varphi = \omega t$. Dann ist $Z(t) = z(t)e^{-i\omega t}$. Differenzieren wir!

$$\dot{Z}(t) = [\dot{z}(t) - iz(t)\omega]e^{-i\omega t} \text{ und } \ddot{Z}(t) = [\ddot{z}(t) - 2i\dot{z}(t)\omega - z(t)\omega^2]e^{-i\omega t}.$$

Eliminieren wir z durch rückwärtiges Einsetzen, so finden wir

$$\ddot{Z}(t) = \left[\ddot{z}(t) - 2i\left(\dot{Z}(t)e^{i\omega t} + iZ(t)\omega e^{i\omega t}\right)\omega - Z(t)\omega^2 e^{i\omega t}\right]e^{-i\omega t} = \ddot{z}(t)e^{-i\omega t} - 2i\dot{Z}(t)\omega + Z(t)\omega^2.$$

Multiplizieren wir mit der Masse *m* und beachten $\boldsymbol{F}_Z(t) = \boldsymbol{F}_z(t)e^{-i\omega t}$, so erhalten wir

$$m\ddot{Z}(t) = m\ddot{z}(t)e^{-i\omega t} - 2im\dot{Z}(t)\omega + mZ(t)\omega^2 = \boldsymbol{F}_Z(t) - 2im\dot{Z}(t)\omega + mZ(t)\omega^2,$$

also

$$m\ddot{Z}(t) = \boldsymbol{F}_Z(t) - i2m\dot{Z}(t)\omega + mZ(t)\omega^2.$$

In Koordinaten lauten die Kräfte

$$m\ddot{X}_1(t) = F_{X_1}(t) + 2m\dot{X}_2(t)\omega + mX_1(t)\omega^2 \quad \text{und} \quad m\ddot{X}_2(t) = F_{X_2}(t) - 2m\dot{X}_1(t)\omega + mX_2(t)\omega^2.$$

Die Kraft $m\omega^2\left(X_1(t);X_2(t)\right)$ ist die Zentrifugalkraft und $-2m\omega\left(-\dot{X}_2(t);\dot{X}_1(t)\right)$ die Corioliskraft. Ist $\boldsymbol{\omega}$ in die 3. Achse gelegt, so kann die Corioliskraft durch $-2m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{X}}(t)=-2m\left[\boldsymbol{\omega},\dot{\boldsymbol{X}}(t)\right]$ und die Zentrifugalkraft durch $-m\left[\boldsymbol{\omega}\left[\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{X}(t)\right]\right]$ beschrieben werden. Hier sind $\boldsymbol{\omega}=(0;0;\omega)$, $\boldsymbol{X}(t)=\left(X_1(t);X_2(t);0\right)$ und $\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\left(\dot{X}_1(t);\dot{X}_2(t);0\right)$.

Zeigen Sie: Mit der Winkelbeschleunigung $\ddot{\boldsymbol{\omega}}(t)$ gilt im Allgemeinen:

$$m\ddot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{X}}(t)-m\left[\dot{\boldsymbol{\omega}}(t)\left[\dot{\boldsymbol{\omega}}(t),\boldsymbol{X}(t)\right]\right]-2m\left[\dot{\boldsymbol{\omega}}(t),\dot{\boldsymbol{X}}(t)\right]-m\left[\ddot{\boldsymbol{\omega}}(t),\boldsymbol{X}(t)\right].$$

Eine sehr schöne und allgemeine Ableitung für den dreidimensionalen Raum findet man in Arnold.[1]

Wurzeln und Einheitswurzeln

Es sei $n\in\mathbb{N}$. Eine komplexe Zahl w heißt n-te Wurzel der komplexen Zahl z, wenn $w^n=z$. Wir schreiben $w=z^{\frac{1}{n}}$. Mit de Moivre folgt mit $z=re^{i\varphi}$:

$$w_k=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\varphi+k2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+k2\pi}{n}\right)\right),\ \mathrm{k}\in\{0,1,\ldots,n-1\}$$

sind n verschiedene Wurzeln der Gleichung X^n-z.

Ist $z=1$ und gilt $w^n=1$, so heißt w eine n-te Einheitswurzel. Alle n Einheitswurzeln sind folglich durch

$$w_k=\cos\left(2\pi\tfrac{k}{n}\right)+i\sin\left(2\pi\tfrac{k}{n}\right),\ \mathrm{k}\in\{0,1,\ldots,n-1\}$$

gegeben.

Geometrisch bilden die Einheitswurzeln die Ecken eines n-Ecks in der komplexen Zahlenebene. Sie liegen auf dem komplexen Einheitskreis $\|z\|=1$.

Übung

Zeigen Sie, dass $w_k^{n-1}+w_k^{n-2}+\cdots+w_k+1=0$ für alle n-tcn Einheitswurzeln, $n\geq 2$ mit $k\neq 0$. Folgern Sie $w_{n-1}+w_{n-2}+\cdots+w_1+w_0=0$. Erstelle Aussagen für sin und cos.

[1] Arnold, V. I.: Mathematical Methods of Classical Mechanics; Springer Verlag; 1978; p. 130ff

Konjugieren komplexer Zahlen

Aufgrund der Eigenschaft $(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2\in\mathbb{R}$ heißen die Zahlen $a+ib$ und $a-ib$ konjugiert komplexe Zahlen. Genauer definieren wir eine Abbildung

$$\bar{\ }:\begin{cases}\mathbb{C} & \to & \mathbb{C}\\ a+ib & \mapsto & \overline{a+ib}:=a-ib\end{cases}$$

Es gilt also $\overline{a+ib}=a-ib$. Wegen $\overline{a-ib}=\overline{a+i(-b)}=a-i(-b)=a+ib$ ist die Abbildung involutorisch. Wir schreiben daher kurz $\overline{z}$.

Die Zahl $\overline{z}$ heißt die zu z ***konjugiert komplexe Zahl***.

Es gilt folglich

$$\overline{\overline{z}}=z \text{ und } z\overline{z}=\overline{z}z=\|z\|^2$$

Übung

Zeigen Sie! **a)** $\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$ **b)** $\overline{z_1z_2}=\overline{z}_1\overline{z}_2$ **c)** $z=\frac{1}{2}(z+\overline{z})+i\left(\frac{1}{2i}(z-\overline{z})\right)$ **d)** $\|z\|=\sqrt{z\overline{z}}$ ist die Länge des Zeigers z.

Korollar:

Ist w eine n-te Einheitswurzel, so auch $\overline{w}$.

Beweis:

Aus $w^n=1$ folgt $\overline{w}^n=\overline{w^n}=\overline{1}=1$.

Zeiger als verallgemeinerte Vektoren

Die komplexen Zahlen bilden einen zweidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum. Da komplexe Zahlen auch multipliziert werden können, bezeichnet man die Vektoren als ***Zeiger***.

Skalar- und Kreuzprodukt komplexer Zahlen

Sind $z_1:=a_1+ib_1$ und $z_2:=a_2+ib_2$ komplexe Zahlen, so heißt

$$z_1\bullet z_2:=\frac{1}{2}(z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2)$$

Skalarprodukt der komplexen Zahlen z_1 und z_2.

Entsprechend heißt

$$z_1\times z_2:=\frac{i}{2}(z_1\overline{z}_2-\overline{z}_1z_2)=\frac{1}{2i}(\overline{z}_1z_2-z_1\overline{z}_2)$$

Kreuzprodukt der komplexen Zahlen z_1 und z_2.

Übung

Es sei $\varphi = \sphericalangle(z_1; z_2)$, $0 \le \varphi \le \pi$.

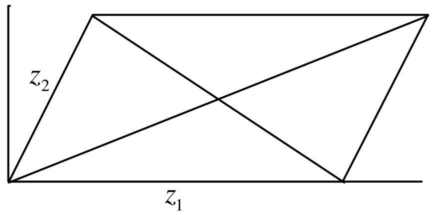
a) $z_1 \bullet z_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 = \|z_1\| \cdot \|z_2\| \cos\varphi$ **b)** $z_1 \times z_2 = a_1 b_2 - b_1 a_2 = \|z_1\| \cdot \|z_2\| \sin\varphi$

c) $\overline{z}_1 z_2 = z_1 \bullet z_2 + i(z_1 \times z_2) = \|z_1\| \cdot \|z_2\| e^{i\varphi}$

Geometrische Übungen

1. Beweisen Sie, dass sich die Diagonalen eines Parallelogramms gegenseitig halbieren.

   Lösung: Wir führen ein Koordinatensystem so ein, dass die linke untere Ecke im Ursprung liegt. Die Seiten werden durch die komplexen Zahlen z_1 und z_2 dargestellt. Dann sind die Diagonalen durch $s(z_1 + z_2)$, $0 \le s \le 1$ und $z_1 + t(z_2 - z_1)$, $0 \le t \le 1$ repräsentiert.

   Nun folgt der Schnittpunkt aus der Gleichung $s(z_1 + z_2) = z_1 + t(z_2 - z_1)$. Wir erhalten $(s + t - 1) z_1 = (t - s) z_2$. Da $z_2 \ne a z_1$ für $a \in \mathbb{R}$, ist die Gleichung nur für $s + t - 1 = 0$ und $t - s = 0$ zu erfüllen. Daraus folgt $t = s$ und $2s = 1$. Also $s = t = \frac{1}{2}$.

2. Es seien $A(1;2)$, $B(-2;5)$ und $C(-3;-1)$ die Eckpunkte eines Dreiecks *ABC*.

   Berechne die Länge der Seitenhalbierenden von *C* zur Strecke $\overline{AB}$.

   Lösung: Berechnen des Mittelpunktes *D* der Strecke $\overline{AB}$. Dazu fassen wir die Koordinaten als komplexe Zahlen auf. wir finden $1 + 2i + \frac{1}{2}(-2 + 5i - 1 - 2i) = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2} i$, also $D\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$. Die Länge der Seitenhalbierenden (Abstand von *C* zu *D*) berechnet sich zu $z = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2} i - (-3 - i) = \frac{5}{2} + \frac{9}{2} i$ und beträgt daher $\sqrt{z\overline{z}} = \frac{1}{2}\sqrt{25 + 91}$ $= \frac{1}{2}\sqrt{116} = \sqrt{29}$ Längeneinheiten.

3. Zeigen Sie, dass die Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Seiten z_1 und z_2 durch $\|z_1 \times z_2\|$ berechnet wird.

   Lösung: Der Flächeninhalt berechnet sich aus Länge der Grundlinie multipliziert mit der Länge der Höhe. Sei also die Länge der Grundlinie $\|z_2\|$. Dann ist die Länge der Höhe $\|z_2\| \sin\sphericalangle(z_1; z_2)$l. Mit Übung b) folgt die Behauptung $\|z_1 \times z_2\| = \|z_1\| \|z_2\| \sin\sphericalangle(z_1; z_2)$.

4. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Ecken $A(1;2)$, $B(3;5)$ und $C(7;1)$.

Lösung: Wir berechnen die beiden Zeiger der Seiten mit Eckpunkt A. $z_1 = 2+3i$ und $z_2 = 6-i$. Der Flächeninhalt beträgt $\frac{1}{2}\|z_1 \times z_2\| = \frac{1}{2}\|a_1 b_2 - b_1 a_2\| = \frac{1}{2}\|-2-18\| = 10$ Flächeneinheiten.

Polar- und Eulerform

5. Wandle die komplexen Zahlen um.

a) $2+i3\sqrt{5}$ **b)** $2+\sqrt{i}3\sqrt{5}$ **c)** $4-i4$ **d)** $-5-i\sqrt{7}$ **e)** $1+i^{\frac{3}{5}}3$

Wird fortgesetzt