Die natürliche Exponentialfunktion

In der Schule muss die Herangehensweise an die natürliche Exponentialfunktion eine andere sein als in der Universität.

Definition 1

Eine Funktion $\exp:\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ heißt ***natürliche Exponentialfunktion***, wenn gilt:

1. $\exp(0)=1$ und
2. $\exp'(x)=\exp(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

Eine natürliche Exponentialfunktion ist folglich an einer Stelle positiv und, was weitreichender ist, die erste Ableitung stimmt an jeder Stelle mit ihrem Funktionswert überein, ist folglich überall differenzierbar. Dies ist schon eine bemerkenswerte Eigenschaft. Wir werden beweisen, dass genau eine natürliche Exponentialfunktion mit diesen beiden Eigenschaften existiert. Verzichten wir auf die erste Eigenschaft und fordern nur die Positivität, so gäbe es unendlich viele dieser Funktionen, da die zweite Gleichung multipliziert mir einer positiven reellen Zahl a eine neue Exponentialfunktion, nämlich $a\cdot\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ mit $(a\cdot\exp)(0)=a$ liefert. Mit anderen Worten: Durch die Normierung $\exp(0)=1$ wird genau eine aus den unendlich vielen Exponentialfunktionen eindeutig bestimmt.

Definition 2

Eine Funktion f ***steigt*** (bzw. g ***fällt***) ***streng monoton***, wenn für $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ gilt:

$$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2) \quad (\text{bzw. } x_1<x_2 \Rightarrow g(x_1)>g(x_2)).$$

Satz 1

Es sei $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ eine natürliche Exponentialfunktion. Dann gilt

1. $\exp(x)>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$.
2. $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ ist streng monoton steigend.

Beweis

Da $\exp'(x)=\exp(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$, gilt $\operatorname{sgn}(\exp'(x))=\operatorname{sgn}(\exp(x))$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

Ad **1.**: Angenommen, es gibt ein $x_0\in\mathbb{R}$ mit $\exp'(x_0)=0$, dann ist nach Voraussetzung auch $\exp(x_0)=0$. Folglich ist an der Stelle x_0 ein Minimum, Maximum oder eine Sattelstelle vorhanden, da sonst $\exp(x)=0$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Es sei $x_1<x_0$. Dann ist für eine Linkskurve $\exp(x_1)>0$ und $\exp'(x_1)<0$ sowie für eine Rechtskurve $\exp(x_1)<0$ und $\exp'(x_1)>0$. Beides widerspricht der Definition $\exp'(x)=\exp(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Damit ist **1.** bewiesen! Ist die Funktion an einer Stelle positiv, so auch an allen Stellen.

Ad **2.**: Diese Aussage folgt nun trivialerweise, wenn folgender Satz zur Verfügung steht.

Ist f eine im Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion, so gilt: f ist genau dann in D streng monoton steigend, wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in D$. Steht der Satz nicht zur Verfügung, so argumentieren wir wie folgt.

Angenommen, die Funktion wäre nicht streng monoton wachsend, dann gäbe es $x_1 < x_2$ mit $\exp(x_1) = \exp(x_2)$. Entweder gilt $\exp(x_1) = \exp(x) = \exp(x_2)$ für alle $x \in [x_1, x_2]$, was den Widerspruch $\exp'(x) = 0$ zur Folge hat oder wir bekommen den Widerspruch über die Existenz eines Extremums, welches nach **1.** nicht existiert. Damit ist der Satz 1 bewiesen.

BEMERKUNG

Natürlich bleiben hier Lücken und somit ein bitterer Nachgeschmack zurück, da weder die Stetigkeit noch der daraus folgenden grundlegenden Existenzsätze[1] „Zwischenwertsatz, Satz von Rolle, Mittelwertsatz der Differentialrechnung, etc." zur Verfügung stehen. Eine solche Ausbildung in der Schule zeugt von einer Missachtung guten Mathematikunterrichtes. Dies hat auch nichts, aber auch garnichts mit Pädagogik, geschweige denn guter Pädagogik zu tun. Wenn die Damen und Herren Pädagogen davon nichts verstehen, so sollten sie sich auf Dinge beschränken mit denen sie bei den Schülerinnen und Schülern keinen Schaden hinterlassen.

So könnten z. B. nur Funktionen betrachtet werden, die bis auf endlich viele Stellen beschränkt sind. Dann wäre die Lipschitz-Stetigkeit ein guter Anfang, zumal ja doch nur differenzierbare Funktionen, wieder abgesehen von endlich vielen Stellen, in Betracht kommen. Danach müssen die wesentlichen Existenzsätze behandel werden, da sonst Lernende und Lehrende herumeiern.

Wir zeigen nun die Existenz und Eindeutigkeit der natürlichen Exponentialfunktion.

SATZ 2

Es sei $\log(x) := \int_1^x \frac{1}{z}\,dz$ der Logarithmus Naturalis als Integralfunktion der oberen Grenze.

Ferner sei $\exp := \log^{-1}$ die Umkehrfunktion des Logarithmus Naturalis. Dann gilt:

1. $\exp(0) = \log^{-1}(0) = 1$ und
2. $\exp'(x) = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
3. $\exp$ ist eindeutig bestimmt.

Beweis

Ad **1.**: $\log(1) = 0 \Leftrightarrow \log^{-1}(0) = 1$.

Ad **2.**: $\exp'(x) = \left(\log^{-1}\right)'(x) = \left(\log'\left(\log^{-1}(x)\right)\right)^{-1} = \left(\log'(\exp(x))\right)^{-1} = \left(\frac{1}{\exp(x)}\right)^{-1} = \exp(x)$.

Ad **3.**: Die Umkehrfunktion ist eindeutig bestimmt. Wenn dieser Satz nicht zur Verfügung steht, betrachte $g(x) := \frac{\exp(x)}{f(x)}$ für eine weitere Funktion f, die Definition 1 erfüllt. Zeige

[1] http://www.math.ethz.ch/~blatter/dlp.html http://www.math.ethz.ch/~blatter/Analysis_4.pdf

$g(0)=1$ und $g'(x)=0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also ist $g(x)=1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit $f(x)=\exp(x)$.

Ich zitiere jetzt die wichtigen Existenzsätze der Differentialrechnung.

1. **Die Lipschitz-Stetigkeit**
2. **Der Zwischenwertsatz**
3. **Hauptsätze über monotone Funktionen**
4. **Mittelwertsatz der Differentialrechnung**
5. **Die Regel von Bernoulli–de l'Hôpital**

LETZTE BEMERKUNG

In der Schule und in den ingenieurwissenschaftlichen Fächern wird der Logarithmus Naturalis mit $\ln := \log$ und die natürliche Exponentialfunktion mit $\exp(1)=e$ abgekürzt. Es gilt folglich $\exp(x)=\exp(1\cdot x)=\exp(1)^x = e^x$. Jede andere Exponentialfunktion a^x kann nun auf die ***natürliche Exponentialfunktion*** $e^{\lambda x}$ ***mit Normfaktor*** $\lambda = \ln(a) = \log(a)$ zurückgeführt werden. Dann ist $a^x = e^{\log(a)x}$.

Da es den Begriff „***Natürliche Exponentialfunktion***" in der Literatur und lateinischen Sprache nicht gibt, wäre es durchaus möglich hier von „***Exponentia Naturalis***" in Bezug auf Mathematik zu sprechen.[2]

[2] ***Lexicon recentis latinitatis*** / editum cura Operis fundati cui nomen "Latinitas". - Urbe Vaticana: Libreria Editoria Vaticana, 1992. - ISBN 88-209-1731-9 : Lit. 100.000. - 1. A - L. - 1992. - 454 S. - 2. - M - Z. - 1992. - 278 S.