Vorwort

Zuerst möchte ich betonen, dass dieses Buch, keine Gegenvorlesung zu anderen Vorlesungen darstellen soll, sondern dass es sich um Ergänzungen und Erklärungen zu folgenden Themen handelt.

1. Aussagen-, Prädikatenlogik und verschiedene Beweisformen
2. Mengen und Abbildungen
3. Lineare Algebra, affine Geometrie und normierte Vektorräume mit Metriken
4. Analysis in normierten Vektorräumen und affinen Räumen
5. Maßtheorie, insbesondere Integrations- und Wahrscheinlichkeitstheorie

Der Anlass zu diesem Buch ist zum einen die schlechte Vorbereitung, die Schülerinnen und Schüler in der gymnasialen Oberstufe erfahren. Dies zeigt sich an den hohen Durchfallquoten in den ersten Semestern in Mathematik. Sie liegt bei etwa 80 %. Zum anderen an den zum Teil historischen Vorlesungen, die eine lästige Pflicht für einige Kollegen darstellt, so dass hier keine profunde Grundkenntnisse gelegt werden und die geneigten Zuhörer vieles dreifach lernen müssen. Ich möchte klarstellen, dass eine sinnvolle Wiederholung nötig ist, wobei sinnvoll eine Vertiefung des Sachverhaltes anhand vieler Beispiele bedeutet. Hierbei wird konsequent versucht, koordinatenfrei zu arbeiten. Natürlich wird auch erklärt, wie man zu einer Koordinatendarstellung kommt. Da dies sehr einfach ist, muss nur das Prinzip erkannt und angewendet werden. Ein sehr wichtiger Aspekt liegt auf der Begründung von Definitionen und wie man sie findet, denn sie stellen notwendige und hinreichende Bedingungen eines Sachverhaltes dar.

Die Leser mögen sich fragen, warum der Aufbau so streng nach Themen getrennt wird, obwohl in der Schule dies nicht getan wird? Eine Antwort ist leicht zu geben. In der Schule wird fast alles durch Anschauung erklärt, aber nicht bewiesen. Hier setzt sich fest, dass damit bereits alles bewiesen ist. Hier muss deutlich widersprochen werden. Ausgangspunkt sind immer allgemein einsichte Erkenntnisse, die als sogenanntes Axiomensystem oder als Definition festgelegt werden. Wenn nun alles durcheinander geschrieben würde, wäre zum einen ein Anfänger hoffnungslos überfordert den Überblick zu behalten. Zum anderen werden die Mengenaussagen in allen Disziplinen gebraucht. Folglich müssten die Aussagen immer wiederholt werden. Dies gilt auch für andere Themen. Daher der oben angegebene Aufbau.

Ich hoffe, dass Sie mit den Kapiteln viel Freude haben und sie Ihnen eine große Einsicht in die verschiedenen und doch ineinander verzahnten Themen bringen, damit Sie in darauf aufbauenden Theorien leicht einsteigen können.

Kapitel 1

Aussagen-, Prädikatenlogik und verschiedene Beweisformen

In diesem Kapitel werden Aussagen und Aussageformen sowie die Verwendung von Quantoren behandelt, die zum Verständnis der verschiedenen Beweisformen nötig sind. Für tiefergehende Erkenntnisse und Beweise zur formalen Logik wird auf die Literatur der Aussagen- und Prädikatenlogik im Literaturverzeichnis verwiesen.

1. Aussagenlogik

1.1 Aussagen

Zunächst einmal kennen wir sprachliche Aussagen. Wir können Aussagen als **wahr** (**W**) oder **falsch** (**F**) bewerten. In manchen Aussagen stecken oft Halbwahrheiten. In der Aussagenlogik sind Sätze so in Teilsätze zu zerlegen, dass die Teilsätze als wahr (W) oder falsch (F) bewertet werden können. Beides kann nicht eintreten. Dies ist also nicht erlaubt (tertium non datur). Wir sprechen daher vom **Wahrheitswert**.

Wir sprechen von **hypothetischen Aussagen**, wenn ein Wahrheitswert jetzt noch nicht, jedoch zu einem späteren Zeitpunkt festgelegt werden kann.

Beispiele 1.1.1

1. **Dortmund ist die Hauptstadt des Ruhrgebietes.** (Aussage)
2. **Der Eiffelturm steht in Paris.** (Aussage)
3. **Sieben ist eine Primzahl.** (Aussage)
4. **Das Bild ist schön.** (subjektive Aussage)
5. **Wir gewinnen das Spiel heute Abend.** (hypothetische Aussage)

Diese Beispiele sind auf ihren Wahrheitsgehalt überprüfbar. Dabei setzen wir stets voraus, dass die Bedeutung der einzelnen Wörter klar sind. Diese sind durch die Sprache definiert. Es sind folglich Dortmund als Stadt, Ruhrgebiet als Gebiet um die Ruhr in dem Land Nordrheinwestfalen zu erkennen. Ferner muss der Begriff Hauptstadt definiert sein. Wenn jetzt noch Nordrheinwestfalen als Teil von Deutschland und dessen Lage erkannt wird, kann die Aussage als falsch bewertet werden. Genau so wird mit den anderen Aussagen verfahren.

An diesen einfachen Beispielen wird sehr deutlich, warum viele Menschen Probleme mit der Sprache haben. Wir erlernen die Sprache direkt von den Menschen, die uns von der Geburt an begleiten, bis wir erwachsen sind. Dabei schließe ich keineswegs lernen über indirekte Medien (Bücher, Filme, Computer, etc.) aus. Hier können sich schon Fehler einschleichen.

Setzen wir ab sofort voraus, dass wir alle Wörter eines Satzes im Zusammenhang richtig verstehen.

Beispiele 1.1.2

Keine Aussagen stellen Sätze dar, die eine Möglichkeit offen lassen. Es ist unmöglich zu überprüfen, ob die Sätze wahr oder falsch sind. Darunter fallen auch subjektive Aussagen.

1. **Feiern wir morgen?** Vielleicht ist die Feier schon vorbereitet, es kann aber auch einfach eine hypothetische Frage sein. Möglicherweise kommt auch etwas dazwischen.
2. **Ruf mich heute Nachmittag an!** Möchte ich es überhaupt?
3. **So schön könnte der Urlaub werden, wenn wir einen See hätten.** Im Rückblick wurde der Urlaub schön.

Halten wir diese Erkenntnis fest.

Definition 1.1.3

Ein Satz ist genau dann eine Aussage, wenn ein Wahrheitswert (wahr oder falsch) zugeordnet werden kann. Aussagen werden stets durch kleine lateinische Buchstaben $(a, b, \ldots)$ gekennzeichnet.

1.2 Negation

Negationen sind uns sehr geläufig. Doppelte Negationen sollten vermieden werden.

Beispiele 1.2.1 (Negation)

1. Die Straße ist nicht nass. (Die Straße ist trocken.)
2. Die Tafel ist nicht schwarz. (Sie ist z. B. grün.)
3. Das Fenster ist nicht geputzt. (Es ist schmutzig.)
4. Vier ist keine Primzahl. (Es ist $4 = 2 \cdot 2$.)

Definition 1.2.2

Es seien a und b zwei Aussagen.

(i) Das Zeichen $\neg$ heißt Negation (Verneinung) und $\neg a$ das Negat von a .

(ii) Die Aussage $\neg a$ heißt genau dann wahr, wenn a falsch ist.

Der Wahrheitswert des Negats kann wieder in einer Wahrheitstafel verdeutlicht werden.

a	$\neg a$
W	F
F	W

1.3 Konjunktion und Disjunktion

Aussagen können durch $\wedge$ („und") bzw. $\vee$ („oder") zu neuen Aussagen zusammengefasst werden.

Beispiele 1.3.1

1. Der Tisch ist wunderschön gedeckt und die Suppe duftet lecker.
2. Albert Einstein hatte Probleme mit Mathematik und Herrman Weyl nicht.
3. Drei teilt sechs und drei ist eine Primzahl.

Diese Aussagen lassen sich in je zwei Aussagen zerlegen, die durch ein „und" verbunden wieder die Aussage ergeben. Dabei kommt es nicht darauf an, dass dieselben Wörter verwendet werden, wie an der zweiten Aussage ersichtlich ist.

Welcher Wahrheitswert soll nun der neuen Aussage zugeordnet werden?

Definition 1.3.2

Es seien a und b zwei Aussagen.

(i) Das Zeichen $\wedge$ heißt Konjunktion (Verbindung) und $a \wedge b$ das Konjugat von a und b .

(ii) Die Aussage $a \wedge b$ heißt genau dann wahr, wenn a wahr und b wahr sind.

Der Wahrheitswert des Konjugats kann in einer Wahrheitstafel verdeutlicht werden.

a	b	$a \wedge b$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Die im Beispiel 1.3.1 formulierten Sätze lassen sich wie folgt zerlegen.

1. a: Der Tisch ist wunderschön gedeckt. b: Die Suppe duftet lecker.
2. a: Albert Einstein hatte Probleme mit Mathematik. b: Hermann Weyl hatte keine Probleme mit Mathematik.
3. a: drei teilt sechs. b: drei ist eine Primzahl.

Natürlich können auch Aussagen mit „oder“ verbunden werden.

Beispiele 1.3.3

1. Der Tisch ist wunderschön gedeckt oder ich gehe nach Hause.
2. Albert Einstein formulierte die allgemeine Relativitätstheorie oder konstruierte das Raumschiff Enterprise.
3. Ein Viereck mit einem rechten Winkel ist ein Rechteck oder ein Quadrat.

Welcher Wahrheitswert soll dieser neuen Aussage zugeordnet werden?

Definition 1.3.4

Es seien a und b zwei Aussagen.

(i) Das Zeichen $\vee$ heißt Disjunktion (Trennung) oder Adjunktion (Anfügung) und $a \vee b$ das Disjugat von a und b.

(ii) Die Aussage $a \vee b$ heißt genau dann wahr, wenn a wahr oder b wahr ist.

Der Wahrheitswert des Disjugats kann wieder in einer Wahrheitstafel verdeutlicht werden.

a	b	$a \vee b$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Hieraus geht hervor, dass das Disjugat immer wahr ist, wenn wenigstens einer der Aussagen wahr ist. Soll nur die eine Aussage oder die andere Aussage, nicht aber beide wahr sein, so sprechen wir von „ausschließendem Oder“.

Definition 1.3.5

Es seien a und b zwei Aussagen.

(i) Das Zeichen $\overset{|}{\vee}$ heißt exklusive Disjunktion, $a \overset{|}{\vee} b$ das exklusive Disjugat von a und b.

Die Aussage $a \overset{|}{\vee} b$ heißt genau dann wahr, wenn entweder a wahr oder b wahr ist.

Der Wahrheitswert des exklusiven Disjugats kann wieder in einer Wahrheitstafel verdeutlicht werden.

a	b	$a \overset{|}{\vee} b$
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	F

1.4 Subjunktion und Bijunktion

Werden Aussagen durch „Wenn ..., dann“ verbunden, so sprechen wir von einer **Subjunktion** (oder **Implikation**).
Werden Aussagen durch „Genau dann ..., wenn“ verbunden, so sprechen wir von einer **Bijunktion** (oder **Äquivalenz**). In der Mathematik sprechen wir immer von der Implikation und Äquivalenz, da wir von vorneherein einen Wahrheitswert festlegen.

Beispiele 1.4.1 (Subjunktion)

1. Wenn der Tisch gedeckt ist, dann komme ich zum Essen.
2. Wenn es brennt, dann kommt die Feuerwehr.
3. Wenn 2 eine Primzahl ist, dann ist $2 \cdot 5$ keine Primzahl.

Definition 1.4.2
Es seien a und b zwei Aussagen.

(i) Das Zeichen $\rightarrow$ heißt **Subjunktion** (Unterverbindung) und $a \rightarrow b$ das Subjugat von a und b.

(ii) Die Aussage $a \rightarrow b$ heißt genau dann falsch, wenn a wahr und b falsch ist.

Der Wahrheitswert des Subjugats kann wieder in einer Wahrheitstafel verdeutlicht werden.

a	b	$a \rightarrow b$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

In der Umgangssprache sagen wir a ist hinreichend für b und b ist notwendig für a.

Beispiele 1.4.3 (Bijunktion)

1. Ich komme genau dann zum Essen, wenn der Tisch gedeckt ist.
2. Die Tiere sind genau dann im Außengehege, wenn es schön ist.

Definition 1.4.4
Es seien a und b zwei Aussagen.

(i) Das Zeichen $\leftrightarrow$ heißt **Bijunktion** (Zweiverbindung) und $a \leftrightarrow b$ das Bijugat von a und b.

(ii) Die Aussage $a \leftrightarrow b$ heißt genau dann wahr, wenn $a \rightarrow b$ wahr **und** $b \rightarrow a$ wahr sind.

Der Wahrheitswert des Bijugats kann wieder in einer Wahrheitstafel verdeutlicht werden.

a	b	$a \leftrightarrow b$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Satz 1.4.5

Es gilt $(a \overset{|}{\vee} b) \leftrightarrow \neg(a \leftrightarrow b)$ und $(a \overset{|}{\vee} b) \leftrightarrow ((\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b))$.

Beweis:
Die erste Äquivalenz ergibt sich durch die Negation der Wertetabelle der Äquivalenz. Die zweite Äquivalenz zeigen wir durch eine Wertetabelle.

a	b	$\neg a \wedge b$	$a \wedge \neg b$	$(\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)$	$a \overset{|}{\vee} b$	$(a \overset{|}{\vee} b) \leftrightarrow ((\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b))$
W	W	F	F	F	F	W
W	F	F	W	W	W	W
F	W	W	F	W	W	W
F	F	F	F	F	F	W

Um Klammern zu sparen vereinbaren wir folgende Stärken der Bindung.

1. **Die Negation bindet stärker als die Bijunktion (Äquivalenz).**
2. **Die Bijunktion bindet stärker als die Subjunktion.**
3. **Die Subjunktion bindet stärker als das Exklusiv-Oder, Oder und Und.**
4. **Exklusiv-Oder, Oder und Und sind gleichgewichtig.**

1.5 Aussageformen, Zusammenfassung und Gesetze

Sollen Aussagen umgeformt werden, so benötigen wir Regeln, die immer wahr sind. Sie heißen Gesetze. Wir erläutern dies näher.

Im Folgenden bezeichnen wir *n* Aussagen mit $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Da diese *n* Aussagen beliebig belegt werden dürfen, heißen sie Subjektvariablen. Verknüpfen wir diese *n* Aussagen durch beliebige sinnvolle Junktoren, so gelangen wir zu einer aussagelogischen Aussageform $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Definition 1.5.1 (Äquivalenz)

Eine aussagelogische Aussageform $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ heißt genau dann **allgemeingültig**, wenn für alle Belegungen von $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die Aussage A wahr ist. Dafür schreiben wir $A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \Leftrightarrow W$, gelesen ***A* ist äquivalent *W***.

Folgende Sprech- und Schreibweisen sind auch gebräuchlich:

* ***A* ist eine Tautologie**
* **$|A| = W$**
* **$A \Leftrightarrow W$**

Definition 1.5.2

Besitzt die allgemeingültige Aussageform die Gestalt eines Bijugats $B \leftrightarrow C$ zweier Aussageformen B und C, so schreiben wir für $B \leftrightarrow C \Leftrightarrow W$ die Äquivalenz $B \Leftrightarrow C$.

Satz 1.5.3 (1. Einsetzungsregel)

Es sei $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ eine Tautologie und $B(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ eine Aussageform. Substituieren wir die Variable a_i durch $B(b_1, b_2, \ldots, b_m)$, so ist $A(a_1, \ldots, a_{i-1}, B(b_1, \ldots, b_m), a_{i+1}, \ldots, a_n) \Leftrightarrow W$.

Beweis:

$A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \Leftrightarrow W$, egal welcher Wahrheitswert für die Variable a_i steht. Da $|B| \in \{W,F\}$, nimmt nach Substitution A den Wahrheitswert |B| statt des Wahrheitswertes der Variablen a_i an.

Beispiele:

1. Es sei $A(a_1, a_2)$ die Tautologie $a_1 \to a_2 \leftrightarrow \neg a_2 \to \neg a_1$. Es sei $B(b_1, b_2, b_3)$ die Aussageform $b_1 \wedge \neg b_3 \to b_2$.

Dann ist $A(a_1, B(b_1, b_2, b_3))$ die Aussageform $a_1 \to (b_1 \wedge \neg b_3 \to b_2) \leftrightarrow \neg(b_1 \wedge \neg b_3 \to b_2) \to \neg a_1$.

Es sei nun $B(a_1, a_2)$ die Aussageform $a_1 \wedge \neg a_2$. Dann ist $A(a_1, B(a_1, a_2))$ die Aussageform $a_1 \to (a_1 \wedge \neg a_2) \leftrightarrow \neg(a_1 \wedge \neg a_2) \to \neg a_1$.

2. Es sei $A(a_1, a_2)$ die Tautologie $(a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_2 + a_2^2$ für reelle Zahlen. Es sei $B(b_1, b_2, b_3)$ die Aussageform $b_3 - 3 \cdot b_1 + 5 \cdot b_2$ für reelle Zahlen. Dann ist $A(a_1, B(b_1, b_2, b_3))$ die Aussageform $(a_1 + b_3 - 3 \cdot b_1 + 5 \cdot b_2)^2 = a_1^2 + 2 \cdot a_1 \cdot (b_3 - 3 \cdot b_1 + 5 \cdot b_2) + (b_3 - 3 \cdot b_1 + 5 \cdot b_2)^2$.

Satz 1.5.4 (2. Einsetzungsregel)

Es sei $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ eine Aussageform und $B(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ eine in $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vorkommende Teilaussageform, d.h. $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\} \subseteq \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Wird dann $B(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ durch die äquivalente Aussageform $C(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ substituiert, so ist die dadurch entstandene neue Aussageform äquivalent zur alten Aussageform.

Beweis:

Da es sich um äquivalente Aussageformen handelt, haben sie die gleichen Wahrheitswerte an jeder Stelle.

Beispiel:

Es sei $A(a_1, a_2, a_3)$ die Aussageform $(a_1 \to (a_2 \to a_3)) \vee (a_1 \wedge \neg a_3) \to \neg(a_1 \wedge \neg(a_2 \to a_3) \to a_2)$.

Es sei $B(a_2,a_3)$ die Teilaussageform $a_2 \to a_3$ und es sei $C(a_2,a_3)$ die Teilaussageform $\neg a_2 \vee a_3$.
Dann ist $A(a_1,a_2,a_3)$ äquivalent zu $(a_1 \to (\neg a_2 \vee a_3)) \vee (a_1 \wedge \neg a_3) \to \neg(a_1 \wedge \neg(\neg a_2 \vee a_3) \to a_2)$.

Hierfür schreibt man gern $A(a_1,a_2,a_3) \Leftrightarrow A'(a_1,a_2,a_3,B(a_2,a_3)) \Leftrightarrow A'(a_1,a_2,a_3,C(a_2,a_3))$.

Definition 1.5.5

Es sei $A(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ eine Aussageform. Es sei $|a_i| \in \{w,f\}$ der zugehörige Wahrheitswert und $|A(a_1,a_2,\ldots,a_n)| \in \{w,f\}$ der zugehörige Wahrheitswert bei einer beliebigen Belegung.
Unter der Erfüllungsbedingung für A verstehen wir die endliche Menge

$$W[A] := \{(|a_1|,|a_2|,\ldots,|a_n|) \mid |A(a_1,a_2,\ldots,a_n)| = W\}.$$

Erklärung: In geschweiften Klammern fassen wir endlich viele unterscheidbare Dinge zusammen und nennen es eine endliche Menge. Die Menge darf einen Namen erhalten, der sich von den Dingen in der geschweiften Klammer sehr wohl unterscheidet. Auf die Reihenfolge in der geschweiften Klammer kommt es nicht an. Gleiche Dinge in der geschweiften Klammer brauchen nur einmal vorzukommen, die Menge ändert sich dadurch nicht.

Beispiel:
Es sei $A(a_1,a_2,a_3)$ die Aussageform $a_1 \wedge \neg(a_2 \to a_3)$. Dann ist $W[A] = \{(w,w,f)\}$.

Satz 1.5.6

Die Äquivalenz „$\Leftrightarrow$" besitzt folgende Eigenschaften.

1. Reflexivität: $A \Leftrightarrow A$
2. Symmetrie: Ist $A \Leftrightarrow B$, so auch $B \Leftrightarrow A$
3. Transitivität: Ist $A \Leftrightarrow B$ und ist $B \Leftrightarrow C$, so ist auch $A \Leftrightarrow C$

Sie ist folglich eine ***algebraische Äquivalenzrelation.***

Mit diesen Bezeichnungen kann die Äquivalenz wie folgt beschrieben werden.

Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$

* $|A| = |B|$ für alle Belegungen
* $W[A] = W[B]$
* $A \leftrightarrow B$ ist allgemeingültig
* $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow W$
* „$\Leftrightarrow$" ist eine algebraische Äquivalenzrelation

Definition 1.5.7 (Implikation)

Besitzt die allgemeingültige Aussageform die Gestalt eines Subjugats $B \to C$ zweier Aussageformen B und C, so schreiben wir für $B \to C \Leftrightarrow W$ die **Implikation** $B \Rightarrow C$.

Satz 1.5.8

Es seien B und C zwei aussagenlogische Ausdrücke. $B \Rightarrow C$ genau dann, wenn die Erfüllungsbedingung $W[B]$ in der Erfüllungsbedingung $W[C]$ enthalten ist, d.h. $W[B] \subseteq W[C]$.

Der **Beweis** sei dem Leser überlassen. (3. Aufgabe)

Satz 1.5.9

Die Implikation „$\Rightarrow$" besitzt folgende Eigenschaften.

1. Reflexivität: $A \Rightarrow A$
2. Identitivität: Wenn $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$, so ist $A \Leftrightarrow B$.
3. Transitivität: Wenn $A \Rightarrow B$ und ist $B \Rightarrow C$, so auch $A \Rightarrow C$.

Sie ist folglich eine ***algebraische Ordnungsrelation*.**

Mit diesen Bezeichnungen kann die Implikation wie folgt beschrieben werden.

Implikation $A \Rightarrow B$

* $|A| = |B| = W$ für alle Belegungen oder $|A| = F$, $|B| \in \{W, F\}$
* $W[A] \subseteq W[B]$
* $A \rightarrow B$ ist allgemeingültig
* $A \rightarrow B \Leftrightarrow W$
* „$\Rightarrow$“ ist eine algebraische Ordnungsrelation

Formulieren wir nun die wichtigsten Gesetze der Aussagenlogik.

Äquivalenz in einer Aussagenvariablen

$a \Leftrightarrow a$	Reflexivität der Äquivalenz	(1)
$\neg\neg a \Leftrightarrow a$	**Gesetz der doppelten Negation**	(2)
$a \wedge a \Leftrightarrow a$	Idempotenz der Konjunktion	(3)
$a \vee a \Leftrightarrow a$	Idempotenz der Disjunktion	(4)
$\neg(a \wedge \neg a) \Leftrightarrow W$	**Gesetz des Widerspruchs**	(5)
$a \vee \neg a \Leftrightarrow W$	Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten	(6)
$a \rightarrow a \Leftrightarrow W$	Reflexivität der Implikation	(7)
$a \wedge W \Leftrightarrow a$	*W* ist neutrales Element der Konjunktion	(8)
$a \vee W \Leftrightarrow W$	Disjunktion mit *W* erzwingt *W*	(9)
$a \vee F \Leftrightarrow a$	*F* ist neutrales Element der Disjunktion	(10)
$a \wedge F \Leftrightarrow F$	Konjunktion mit *F* erzwingt *F*	(11)

Disjunktionsgesetze

$a \vee b \Leftrightarrow b \vee a$	**Kommutativität von „$\vee$“**	(12)
$(a \vee b) \vee c \Leftrightarrow a \vee (b \vee c)$	**Assoziativität von „$\vee$“**	(13)
$a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	**Distributivität von „$\vee$“ über „$\wedge$“**	(14)
$a \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow a$	Absorptionsgesetz von „$\vee$“	(15)
$\neg(a \vee b) \Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$	**DE MORGAN-Gesetz**	(16)
$a \vee b \Leftrightarrow (\neg a \rightarrow b)$	**Umwandlung von „$\vee$“ in „$\rightarrow$“**	(17)

Konjunktionsgesetze

$a \wedge b \Leftrightarrow b \wedge a$	**Kommutativität von „$\wedge$“**	(18)
$(a \wedge b) \wedge c \Leftrightarrow a \wedge (b \wedge c)$	**Assoziativität von „$\wedge$“**	(19)
$a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	**Distributivität von „$\wedge$“ über „$\vee$“**	(20)
$a \wedge (a \vee b) \Leftrightarrow a$	Absorptionsgesetz von „$\wedge$“	(21)
$\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b$	**DE MORGAN-Gesetz**	(22)
$a \wedge b \Leftrightarrow \neg(a \rightarrow \neg b)$	**Umwandlung von „$\wedge$“ in „$\rightarrow$“**	(23)

Bijunktionsgesetze

$a \leftrightarrow b \Leftrightarrow b \leftrightarrow a$	**Kommutativität von „$\leftrightarrow$“**	(24)
$a \leftrightarrow (b \leftrightarrow c) \Leftrightarrow (a \leftrightarrow b) \leftrightarrow c$	**Assoziativität von „$\leftrightarrow$“**	(25)
$a \leftrightarrow b \Leftrightarrow a \rightarrow b \wedge b \rightarrow a$	**Darstellung von „$\leftrightarrow$“ durch „$\rightarrow$“**	(26)
$a \leftrightarrow b \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$	**Umwandlung von „$\leftrightarrow$“ in „$\vee$“**	(27)
$a \leftrightarrow b \Leftrightarrow (\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b)$	**Umwandlung von „$\leftrightarrow$“ in „$\wedge$“**	(28)
$a \leftrightarrow b \Leftrightarrow \neg a \leftrightarrow \neg b$	**Kontrapositionsgesetz für „$\leftrightarrow$“**	(29)

Subjunktionsgesetze

$a \rightarrow b \Leftrightarrow \neg b \rightarrow \neg a$	**Kontrapositionsgesetz**	(30)
$a \rightarrow b \Leftrightarrow \neg a \vee b$	**Umwandlung von „$\rightarrow$“ in „$\vee$“**	(31)
$a \rightarrow (b \vee c) \Leftrightarrow a \rightarrow b \vee a \rightarrow c$	**Distributivität von „$\rightarrow$“ über „$\vee$“**	(32)
$a \rightarrow (b \wedge c) \Leftrightarrow a \rightarrow b \wedge a \rightarrow c$	**Distributivität von „$\rightarrow$“ über „$\wedge$“**	(33)
$(a \vee b) \rightarrow c \Leftrightarrow a \rightarrow c \wedge b \rightarrow c$	Modifiziertes Distributivgesetz	(34)
$(a \wedge b) \rightarrow c \Leftrightarrow a \rightarrow c \vee b \rightarrow c$	Modifiziertes Distributivgesetz	(35)
$a \rightarrow (b \rightarrow c) \Leftrightarrow b \rightarrow (a \rightarrow c)$	Tauschgesetz der Vorderglieder	(36)
$a \rightarrow (b \rightarrow c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \rightarrow c$	Klammeränderungsgesetz für „$\rightarrow$“	(37)
$a \rightarrow b \Leftrightarrow (\neg b \wedge a) \rightarrow \neg a$	**Gesetz des indirekten Beweises**	(38)
$a \rightarrow b \Leftrightarrow (\neg b \wedge a) \rightarrow b$	**Gesetz des indirekten Beweises**	(39)
$a \rightarrow b \Leftrightarrow (\neg b \wedge a) \rightarrow (c \wedge \neg c)$	**Gesetz des indirekten Beweises**	(40)

Implikationen

$F \Rightarrow a$	ex falso quodlibet	(41)
$a \Rightarrow W$	ex quodlibet verum	(42)
$a \wedge b \Rightarrow a$	Abschwächung der Konjunktion	(43)
$a \Rightarrow a \vee b$	Abschwächung der Disjunktion	(44)
$\neg a \Rightarrow a \rightarrow b$	Satz vom negierten Vorderglied	(45)
$b \Rightarrow a \rightarrow b$	Satz von Hinterglied	(46)
$a \wedge b \Rightarrow a \vee b$	Konjunktion impliziert Disjunktion	(47)
$a \wedge a \rightarrow b \Rightarrow b$	**Abtrennungsgesetz (modus ponens)**	(48)
$\neg b \wedge a \rightarrow b \Rightarrow \neg a$	**Widerlegungsgesetz (modus tollens)**	(49)
$a \rightarrow b \wedge b \rightarrow c \Rightarrow a \rightarrow c$	**Transitivitätsgesetz**	(50)
$(a \vee b) \wedge (a \rightarrow c \wedge b \rightarrow c) \Rightarrow c$	**Gesetz der Fallunterscheidung**	(51)

Aufgabe 1.5.1

Überprüfen Sie die Gesetze mit Hilfe einer Wahrheitstafel im Kopf oder auf dem Papier oder mit bereits bewiesenen Gesetzen.

Bisher haben wir nur fest stehende Aussagen kennen gelernt. In der Mathematik benötigen wir aber Variable, um allgemeingültige Aussagen formulieren zu können. Da wir bisher nicht auf **Subjekte** und **Prädikate** eingegangen sind, möchte ich es auch weiterhin vermeiden.

Aufgaben zur Aussagenlogik

1. Man gebe für jede der folgenden Äquivalenzen eine sprachliche (verbale) Interpretation!

a) $(A \wedge A \rightarrow B) \rightarrow B$

b) $(A \rightarrow B \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$

c) $(A \vee B) \wedge \neg A \rightarrow B$

d) $((A \vee B) \wedge A \rightarrow C \wedge B \rightarrow D) \rightarrow C \vee D$

2. Zeigen Sie, dass für beliebige aussagenlogische Ausdrücke *A, B* die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ stets die Äquivalenz $B \Leftrightarrow A$ nach sich zieht und umgekehrt.

Anleitung: Beginnen Sie mit dem Gesetz (29) und ziehen Sie die 1. Einsetzungsregel (1.5.3) heran!

3. Beweisen Sie 1.5.8.

4. Leiten Sie das DE MORGAN-Gesetz (16) aus dem DE MORGAN-Gesetz (22) her. Kann man auch (22) aus (16) gewinnen?

5. Man beweise das Absorptionsgesetz (21), indem man den linksseitige stehenden Ausdruck nach Einsetzungsregel 2 durch Äquivalenzumformungen auf den rechtsseitig stehenden Ausdruck umwandelt.

Anleitung: Mit Gesetz (10) beginnen!

6. Man beweise das Distributivgesetz (32), indem man die linke Seite durch Äquivalenzumformungen in die rechte Seite überführt.

Anleitung: Beginnen Sie mit einer Anwendung des Gesetzes (31).

7. Zeigen Sie die Ungültigkeit des Ausdrucks $(A \wedge B \leftrightarrow \neg(C \wedge \neg A)) \rightarrow C \wedge \neg B$ durch äquivalente Umwandlung in den Ausdruck *F*.

8. Zeigen Sie die Allgemeingültigkeit des Ausdrucks $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \rightarrow \neg A$ indem Sie den Ausdruck durch eine Kette von Äquivalenzumformungen in den Wahrheitswert ***W*** überführen!

9. Vereinfachen Sie den Ausdruck $\neg(\neg A \vee ((B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg B))$

10. Nach Satz 1.4.5 kann die Entweder-Oder-Verknüpfung (exklusives Oder) durch die Äquivalenz $a \overset{|}{\vee} b \Leftrightarrow (\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)$ erklärt werden. Zeigen Sie durch Äquivalenzumformungen

a) $a \overset{|}{\vee} b \Leftrightarrow \neg a \rightarrow b \wedge b \rightarrow \neg a$ und $a \overset{|}{\vee} b \Leftrightarrow \neg a \leftrightarrow b$.

b) „$\overset{|}{\vee}$“ ist kommutativ.

c) „$\overset{|}{\vee}$“ ist assoziativ.

Anleitung: Verwenden Sie die unter a) gezeigte Darstellung von mittels „$\leftrightarrow$“.

11. Für die **Schaltalgebra** sind noch folgende Verknüpfungen wichtig.

a) $a \mid b :\Leftrightarrow \neg(a \wedge b)$ **(nand-Verknüpfung)**

Zeigen Sie:

(i) $\neg a \Leftrightarrow a \mid a$,

(ii) $a \wedge b \Leftrightarrow (a \mid b) \mid (a \mid b)$,

(iii) $a \vee b \Leftrightarrow (a \mid a) \mid (b \mid b)$,

(iv) $a \to b \Leftrightarrow a \mid (a \mid b)$.

Geben Sie für $a \leftrightarrow b$ eine nand-Verknüpfung an.

b) $a \nabla b :\Leftrightarrow \neg(a \vee b)$ **(nor-Verknüpfung)**

Zeigen Sie:

(i) $\neg a \Leftrightarrow a \nabla a$,

(ii) $a \wedge b \Leftrightarrow (a \nabla a) \nabla (b \nabla b)$,

(iii) $a \vee b \Leftrightarrow (a \nabla b) \nabla (a \nabla b)$,

(iv) $a \to b \Leftrightarrow (b \nabla (a \nabla b)) \nabla (b \nabla (a \nabla b))$.

Geben Sie für $a \leftrightarrow b$ eine nor-Verknüpfung an.

12. Zeigen Sie das Transitivitätsgesetz (50)!

Anleitung: Beachten Sie die Definition 1.6.12.

13. Leiten Sie das Widerlegungsgesetz (49) aus dem Abtrennungsgesetz (48) her!

Beginnen Sie mit einer Anwendung des Kontrapositionsgesetzes (30)!

14. Gegeben seien die Sätze:

a) Hans lernt Mathematik.

b) Hans trifft sich mit Judith.

c) Hans geht in die Disko.

d) Hans schläft.

Formulieren Sie folgende Sätze in der Aussagenlogik:

A) Hans schläft niemals, wenn er Mathematik lernt.

B) Schläft Hans nicht, so trifft er sich nicht mit Judith und geht nicht in die Disko.

C) Entweder lernt Hans Mathematik und trifft sich mit Judith – oder Hans geht in die Disko und schläft nicht.

Folgern sie nun aus A, B, C die Aussagen:

$\mathscr{A}$) Hans schläft nie ohne Judith.

$\mathscr{B}$) In der Disko lernt Hans niemals Mathematik oder schläft.

$\mathscr{C}$) Entweder lernt Hans Mathematik oder er schläft.

1.6 Schlussregeln

In der **Beweisführung der Mathematik** werden sehr häufig Schlussregeln benötigt. In diesen Regeln werden Wahrheitswerte gesetzt, um auf einen Wahrheitswert schließen zu können.

1. Modus ponens (**Abtrennungsregel**)

$$\begin{array}{ll} A & (w) \\ \underline{A \rightarrow B} & (w) \\ \quad B & (w) \end{array}$$

Ist das Vorderglied eines wahren Subjugats wahr, so ist auch das Hinterglied wahr und kann daher abgetrennt werden.

2. Modus tollens (**Widerlegungsregel**)

$$\begin{array}{ll} A \rightarrow B & (w) \\ \underline{\neg B} & (w) \\ \neg A & (w) \end{array}$$

Ist das Hinterglied eines wahren Subjugats falsch, so ist auch das Vorderglied falsch.

3. **Kontrapositionsregel**

$$\begin{array}{ll} \underline{A \rightarrow B} & (w) \\ \neg B \rightarrow \neg A & (w) \end{array}$$

Ein Subjugat wird kontraponiert, um aus dem Negat des Hintergliedes auf das Negat des Vordergliedes schließen zu können.

4. **Abschwächung aus der Konjunktion**

$$\begin{array}{ll} \underline{A \wedge B} & (w) \\ A & (w) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \underline{A \wedge B} & (w) \\ B & (w) \end{array}$$

Ist ein Konjugat wahr, so auch jede Teilaussage.

5. **Abschwächung zur Disjunktion**

$$\begin{array}{ll} \underline{A} & (w) \\ A \vee B & (w) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \underline{B} & (w) \\ A \vee B & (w) \end{array}$$

Ist eine Aussage wahr, so auch jede Disjunktion mit einer anderen Aussage.

6. **Kettenschluss**

$$\begin{array}{ll} A \rightarrow B & (w) \\ \underline{B \rightarrow C} & (w) \\ A \rightarrow C & (w) \end{array}$$

Werden zwei wahre Subjugate hintereinandergeschaltet, wobei das Hinterglied des ersten gleich dem Vorderglied des zweiten Subjugats ist, so ist auch das Subjugat bestehend aus dem Vorderglied des ersten und dem Hinterglied des zweiten Subjugats wahr.

7. **Reductio ad absurdum**

$$\begin{array}{ll} A \rightarrow B & (w) \\ \underline{A \rightarrow \neg B} & (w) \\ \neg A & (w) \end{array}$$

Sind zwei Subjugate mit gleichem Vorderglied, aber negiertem Hinterglied wahr, so ist das Vorderglied falsch.

Wir wollen einige Beispiel zu den Schlussregeln angeben, die für Beweise in der Mathematik wichtig sind.

1. Modus ponens

$$\begin{array}{rl} A & (w) \\ \underline{A \to B} & (w) \\ B & (w) \end{array}$$

Wir setzen A: $f(x) = x^3$ und B: $f'(x) = 3x^2$. Ferner die Belegung $|f(x) = x^3| = W$.

Das Subjugat $f(x) := x^3 \to f'(x) = 3x^2$ ist folglich auf seinen Wahrheitsgehalt zu überprüfen, d.h. gilt $|f(x) := x^3 \to f'(x) = 3x^2| = W$.

Nach Definition der Ableitung ist dies der Fall. Folglich ist $|f'(x) = 3x^2| = W$.

Beachten Sie, dass auch $g(x) := x^3 + 5$ die Ableitung $g'(x) = 3x^2$ besitzt. Dann wäre A falsch.

2. Modus tollens

$$\begin{array}{rl} A \to B & (w) \\ \underline{\neg B} & (w) \\ \neg A & (w) \end{array}$$

In der Schule haben wir häufig mit Teilbarkeiten von natürlichen Zahlen zu tun. Untersuchen wir die Aussage $6 \mid x \Rightarrow 3 \mid x$.

Dazu setzen wir A: $6 \mid x$ und B: $3 \mid x$.

Ferner die Belegungen $|6 \mid x \Rightarrow 3 \mid x| = W$ und $|\neg(3 \mid x)| = W \Leftrightarrow |3 \nmid x| = W$.

Dann ist $x \neq 3 \cdot b$ für jedes b, also auch $x \neq 3 \cdot 2 \cdot b' = 6b'$ für jedes b'.

Folglich ist $|\neg(6 \mid x)| = W \Leftrightarrow |6 \nmid x| = W$.

3. Kontraposition

$$\begin{array}{rl} \underline{A \to B} & (w) \\ \neg B \to \neg A & (w) \end{array}$$

Wir bleiben bei der Teilbarkeit von natürlichen Zahlen. Wir setzen A: $3 \mid x \wedge 4 \mid x$ und B: $12 \mid x$. Ferner die Belegung $|3 \mid x \wedge 4 \mid x \Rightarrow 12 \mid x| = W$. Wir negieren die Aussagen A und B. $\neg A : \neg(3 \mid x \wedge 4 \mid x) \Leftrightarrow 3 \nmid x \vee 4 \nmid x$ und $\neg B : 12 \nmid x$. Wenn $12 \nmid x$, dann ist $x \neq 12b$ für jedes b. Da $12 = 3 \cdot 4$, ist auch $x \neq 3b'$ und $x \neq 4b''$ für jedes b', b''. Beachte: $b' = 4b \wedge b'' = 3b$.

Aus der Belegung $|12 \nmid x| = F$ muss nun die Belegung $|3 \nmid x \vee 4 \nmid x| = F$ folgen. Dies ist erfüllt, wenn $|3 \nmid x| = F$ und $|4 \nmid x| = F$. Folglich ist $|12 \nmid x \Rightarrow 3 \nmid x \vee 4 \nmid x| = W$. Damit ist nach Regel (22) auch $|3 \mid x \wedge 4 \mid x \Rightarrow 12 \mid x| = W$.

4. Kettenschluss

$$\begin{array}{rl} A \to B & (w) \\ \underline{B \to C} & (w) \\ A \to C & (w) \end{array}$$

Der Kettenschluss wird häufig verwendet, wenn eine Aussage nicht direkt, sondern durch Einführen von Zwischenaussagen bewiesen werden kann.

Er wird auch als Ringschluss bei Äquivalenzen benutzt.

$$\begin{array}{rl} A \to B & (w) \\ B \to C & (w) \\ \underline{C \to A} & (w) \\ A \leftrightarrow B & (w), \\ A \leftrightarrow C & (w), \\ B \leftrightarrow C & (w) \end{array}$$

5. Reductio ad absurdum

$$\begin{array}{rl} A \to B & (w) \\ \underline{A \to \neg B} & (w) \\ \neg A & (w) \end{array}$$

a	b	$\neg b$	$a \to b$	$a \to \neg b$
W	W	F	W	F
W	F	W	F	W
F	W	F	W	W
F	F	W	W	W

Es sei $A : 10$ ist eine Primzahl. $B : 10$ besitzt nur die trivialen Teiler. Dann ist $|A \to B| = W$ nach Definition einer Primzahl. Andererseits besitzt aber 10 die nicht trivialen Teiler 2 und 5, denn $10 = 2 \cdot 5$. Nach 1.4.2 (ii) ist dann auch $|A \to \neg B| = W$, da $|\neg B| = W$. Folglich kann nur $|\neg A| = W$ sein. Mit Worten: 10 ist keine Primzahl.