2. Prädikatenlogik

Quantoren, Implikationen und Äquivalenzen

2.1 Aussageformen oder Formel

In allen mathematischen Gebieten sind uns Platzhalter, auch Variablen genannt, geläufig.

Beispiel 2.1.1

1. x ist Teiler der Zahlen 512 und 8416.
2. Die Zahl 5 ist größter gemeinsamer Teiler der Zahlen x und y.
3. Das Integral $\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,d\boldsymbol{\mu}$ ist größer als y.
4. Wenn 6 die Zahl x teilt, dann teilt 3 die Zahl x.

In der Mathematik benutzen wir gerne Symboliken als Abkürzung. Wir vereinbaren noch, dass die mathematischen Symbole stärker binden als die logischen Jugate.

So ist $x\,|\,512$ gleichbedeutend mit dem Satz: Die Zahl x ist Teiler der Zahl 512 oder kurz x teilt 512.

Damit kann **1.** durch $x\,|\,512 \wedge x\,|\,8416$ und **4.** durch $6\,|\,x \Rightarrow 3\,|\,x$ ersetzt werden.

Für den größten gemeinsamen Teiler verwenden wir das Symbol ggT. Dann ist **2.** $5 = \mathbf{ggT}(x, y)$.

Verwenden wir für größer das Symbol $>$, so schreibt sich **3.** als $y < \int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,d\boldsymbol{\mu}$.

Natürlich dürfen auch andere Buchstaben oder Zeichen statt x und y gewählt werden. Der Grund dafür ist, dass es sich eigentlich um Zeichen für Variable handelt. Auf solche Spitzfindigkeiten werde ich nicht eingehen. Der geneigte Leser sei an dieser Stelle auf die Literatur zur formalen Logik verwiesen.

Setzen wir in den ersten beiden Beispielen Zahlen für x und y ein, so erhalten wir Aussagen, die entweder wahr oder falsch sind. Im ersten Beispiel können sogar alle Zahlen angegeben werden. Im zweiten Beispiel ist es unmöglich alle Zahlen aufzulisten. Das dritte Beispiel ist schon problematisch. Natürlich kann ich für x eine Zahl einsetzen, aber dar Sinn des Integral ist damit aufgehoben, denn das Integral ist eine Linearform. Sie ordnet einer Funktion eine reelle Zahl zu. Folglich ist hier x eine gebundene Variable. Darüber hinaus ist über die Zahl, die eingesetzt wird nichts ausgesagt. Sie kann natürlich, ganz, rational, reell oder sogar komplex sein. Hier ist folglich noch eine Grundmenge anzugeben, also welche Individuen eingesetzt werden sollen. Die Individuen sollen natürlich wohl unterscheidbar sein. Im 4. Beispiel ist über die Zahl x nichts ausgesagt. Man überzeuge sich, dass $|6\,|\,x \Rightarrow 3\,|\,x| = W$ für jede Zahl gilt. An diesem Beispiel wird deutlich, dass wir in der Mathematik immer mit einer wahren Aussage bzw. Aussageform starten müssen, um etwas Wahres zu erhalten. Dies ist hoffentlich das Ziel der Mathematik.

Definition 2.1.2 (Aussageform oder Formel)

Ein Satz, in dem eine oder mehrere Variablen vorkommen heißt genau dann eine **Aussageform (Formel)**, wenn sie durch Einsetzen von konkreten Dingen, die wir **Individuen** nennen, aus einer Grundmenge in eine Aussage übergehen. Für die Definition einer Menge verweise ich auf Kapitel 2.

Wir wollen jetzt die Grundmenge berücksichtigen. Dies wird durch Quantoren zum Ausdruck gebracht.

2.2 Gebundene Variablen und Quantoren

Viele Sätze der Mathematik beginnen mit: Es sei ... Für alle ... Ist ... Es gibt ein ... Es existiert ein ... Durch solch einleitende Sätze werden in der Mathematik Variable gebunden.

Ist $x \in \mathbf{N}$ und gilt $x\,|\,5$, so ist $x = 1 \vee x = 5$. Ist $x \in \mathbf{N}$ heißt, dass für x jede natürliche Zahl eingesetzt werden darf, also für alle $x \in \mathbf{N}$.

Fassen wir dieses als Aussageform zusammen, so erhalten wir

$$\left(\bigwedge_x x \in \mathbf{N}\right)(x \mid 5 \rightarrow x = 1 \vee x = 5)\,.$$

Hierfür schreiben wir abweichend von der formalen Logik einfacher $\bigwedge_{x\in\mathbf{N}} x \mid 5 \Rightarrow x = 1 \vee x = 5$.

Beginnen wir mit einer einfachen Aussageform.

Beispiel 2.1.1

1. Schreiben wir $M := \{1,2,3,4,5,6\}$ für die vorgegebene Grundmenge. In dieser Grundmenge formulieren wir die Aussage $1\cdot 1 = 1 \wedge 2\cdot 1 = 2 \wedge 3\cdot 1 = 3 \wedge 4\cdot 1 = 4 \wedge 5\cdot 1 = 5 \wedge 6\cdot 1 = 6$. Dann können wir hierfür abkürzend schreiben: $\bigwedge_{x\in M} x\cdot 1 = x$. Das Zeichen $\bigwedge$ heißt Allquantor und ist als Abkürzung für beliebig viele Konjunktionen gedacht. Wir können folglich M durch jede andere (auch unendliche) Menge ersetzen, für die $x\cdot 1 = x$ richtig ist, solange nur $x \in M$ ist.
2. Wir wissen $5\cdot x = x\cdot 5$ ist in allen Zahlenbereichen richtig. Folglich dürfen wir $\bigwedge_{x\in M} 5\cdot x = x\cdot 5$ schreiben. Die Aussageform ist allgemein gültig.
3. Ersetzen wir nun 5 durch y, so erhalten wir $\bigwedge_{x\in M}\bigwedge_{y\in M} y\cdot x = x\cdot y$. Dies ist auch für jeden Zahlenbereich M richtig.
4. Wir betrachten die Formel $x^2 + y^2 = 1$. Hier ist die Grundmenge ausgelassen.

Definition 2.2.2

Das Zeichen $\bigwedge$ heißt Allquantor und ist als Abkürzung für beliebig viele Konjunktionen gedacht.

Beispiel: $\bigwedge_{x\in\mathbf{N}} x\cdot 1 = x$, anstatt $1\cdot 1 = 1 \wedge 2\cdot 1 = 2 \wedge 3\cdot 1 = 3 \wedge 4\cdot 1 = 4 \wedge 5\cdot 1 = 5 \wedge 6\cdot 1 = 6 \wedge \cdots$.

Definition 2.2.3

Eine Variable, die beliebig ersetzt werden darf, heißt **freie Variable**. Eine Variable, die nicht beliebig ersetzt werden darf, heißt **gebundene Variable**.

In diesen Sinn sind die Variablen x und y in 1 bis 3 gebundene Variablen. In 4 sind die Variablen x und y freie Variablen.

Wir halten fest: **Quantor-Variable sind stets gebundene Variable.**

Wir weichen auch hier von der formalen Logik ab, da die Aussagen nur komplizierter werden. Als Beispiel diene $\bigwedge_{x\in\mathbf{N}} 5\cdot x = x\cdot 5$. Genauer müsste es folgendermaßen formuliert werden.

Wir setzen $A(x): x$ ist eine natürliche Zahl, $B(x)$: 5 wird mit x multipliziert, $C(x)$: x wird mit 5 multipliziert. Dann lautet die Allaussage: $\left(\bigwedge_x A(x)\right)(B(x) \leftrightarrow C(x))$. Dies schreiben wir fortan kürzer, da immer klar ist, wie die Allaussage zu deuten ist. Wir schreiben: $\bigwedge_{x\in\mathbf{N}}\big(B(x) \leftrightarrow C(x)\big)$ bzw. $\bigwedge_{x\in\mathbf{N}} 5\cdot x = x\cdot 5$.

Betrachten wir folgendes Beispiel.

Beispiel 2.2.4

Ist x das Produkt zweier Primzahlen p_1, p_2, so existiert eine von p_1, p_2 verschiedene Primzahl p mit $p \mid x+1$.

Hier wird die Existenz einer Primzahl gefordert. Schauen wir uns einmal $x = 2\cdot 7$ an. Dann ist $x+1 = 15 \wedge 15 = 3\cdot 5$. Es gibt in diesem Beispiel sogar zwei neue Primzahlen.

Die Aussage: „Es existiert eine ...“ ist folglich gleichbedeutend mit „Es existiert mindestens eine ...“

Hierfür führen wir den Existenzquantor $\bigvee$ ein. Er steht anstatt beliebig vieler Disjunktionen.

Bezeichnen wir mit **P** noch die Menge aller Primzahlen, so können wir das obige Beispiel wie folgt formulieren:

$$\bigwedge_{p_1 \in \mathbf{P}} \bigwedge_{p_2 \in \mathbf{P}} \bigvee_{p \in \mathbf{P}} (p \neq p_1 \wedge p \neq p_2 \to p \,|\, p_1 \cdot p_2 + 1) .$$

Beweisen Sie diese Behauptung!

Definition 2.2.5

Das Zeichen $\bigvee$ heißt Existenzquantor und ist als Abkürzung für beliebig viele Disjunktionen festgelegt.

Beispiel: $\bigvee_{x \in \mathbf{P}} x \,|\, 1035$, statt $2\,|\,1035 \vee 3\,|\,1035 \vee 4\,|\,1035 \vee 5\,|\,1035 \vee \cdots$.

Bemerkung:

In den mathematischen Sätzen geht es immer darum, das eine oder mehrere Voraussetzungen wahr sind. Deshalb werden wir immer mit wahrem A starten, es sei denn, der Beweis ist nicht direkt.

Jetzt können alle nur erdenklichen Verknüpfungen hergestellt und auf ihren Wahrheitswert überprüft werden.

Beispiel: $\neg A \vee B \leftrightarrow (A \wedge B) \vee \neg B$ und $A \wedge B \to A \vee C$ sind immer wahr.

Aussagen allein können uns nicht weiterhelfen, denn meistens geht es um Allaussagen und Existenzaussagen, wie oben schon bemerkt.

Beispiele: Es sei $\mathbf{E}$ ein *K*-Vektorraum. Es sei X eine Menge in $\mathbf{E}$. Es existiert eine Abbildung $f : X \to \mathbf{E}$. Hier haben wir die Bedeutung dieser Sätze zu klären.

Es sei $\mathbf{E}$ ein *K*-Vektorraum bedeutet $\bigwedge_{\mathbf{E} \in_K \mathrm{V}}$. Es sei X eine Menge in $\mathbf{E}$ bedeutet $\bigwedge_{X \subseteq \mathbf{E}}$. Es existiert eine Abbildung $f : X \to \mathbf{E}$ bedeutet $\bigvee_{f : X \to \mathbf{E}}$.

Ich möchte noch einmal betonen, dass wir hier keine Prädikatenlogik betreiben wollen!

Zwei etwas kompliziertere Formeln. Sie gehören zur Prädikatenlogik höherer Stufe.

1. $\left(\bigwedge_A \left(A(0) \wedge \bigvee_x A(x) \to A(x+1) \right) \right) \to \bigwedge_x A(x)$

2. $\bigwedge_A \left(\bigvee_x \bigwedge_y (A(y) \to y \le x) \to \bigvee_z \left(\left(\bigwedge_y A(y) \to y \le z \right) \wedge \left(\left(\bigwedge_y A(y) \to y \le x \right) \to z \le x \right) \right) \right)$

3. $\bigvee_x \left(\left(A(x) \wedge \bigvee_y A(y) \right) \to y = x \right)$

Interpretieren wir diese Formeln.

1. Für alle Aussagen A gilt: Wenn A für die Variable 0 richtig ist und eine Variable x existiert, so dass A für die Variable x die Richtigkeit von A für die Variable $x + 1$ impliziert, so ist A für alle Variablen x richtig.
2. Für alle Aussagen A gilt: Es existiert eine Variable x, so dass für alle Variablen y aus der Richtigkeit von A für die Variable y die Aussage $y \le x$ impliziert, so impliziert dies die Existenz einer Variablen z , so dass für alle Variablen y aus der Richtigkeit von A für die Variable y die Aussage $y \le z$ impliziert und immer noch $y \le x$ richtig ist, so impliziert dies $z \le x$.
3. Hier steht nichts anderes, als: Es existiert genau ein x.

Bleiben wir doch erst einmal bei einfacheren Aussagen. Dazu möchte ich noch einmal auf **Formeln**, wie sie in der Schule bezeichnet werden, eingehen.

2.3 Was ist eine Formel?

In der Schule haben wir gelernt, was eine Formel sein soll. Leider wird dort auch die Aussageform eingeführt, ohne darauf einzugehen, dass es sich hierbei um ein und denselben Sachverhalt handelt. Meist werden Formeln durch Gleichungen oder Ungleichungen beschrieben.

Einige Beispiele 2.3.1

a. $a \cdot b = b \cdot a$ **b.** $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ **c.** $F(a;b) = a \cdot b$ **d.** $z = x + y$ **e.** $a^2 + b^2 = c^2$

Zunächst einmal erkennen wir, dass eine Formel keine Aussage ist. Setzen wir für die Namen der Variablen konkrete Zahlen ein, so geht sie in eine Aussage über, die entweder wahr oder falsch ist. Es müssen aber keine Zahlen sein! Zum Beispiel können wir auch Matrizen einsetzen. Sprechen wir daher besser wieder von Individuen.

Wie man leicht feststellt, gehen nicht alle Formeln in eine Aussage über, wenn gewisse Individuen eingesetzt werden.

Um aus einer Formel eine Aussage zu machen, die stets den Wahrheitswert W besitzt, muss der Bereich (Menge), in der die Individuen leben, exakt angegeben werden. Dazu verwenden wir die **Quantoren**.

Die Formel **a.** schreiben wir $\bigwedge_{a \in \mathbf{N}} \bigwedge_{b \in \mathbf{N}} a \cdot b = b \cdot a$. Sie ist nun eine Aussage, die stets den Wahrheitswert W besitzt. Wir sagen kurz, die Aussage ist allgemein gültig. Ersetzen wir den Individuenbereich durch 2×2-Matrizen über $\mathbf{N}$, so erhalten wir keine allgemein gültige Aussage, denn mit $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ erhalten wir $a \bullet b = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $b \bullet a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Die Multiplikation ist wie folgt definiert:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_3 & a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_4 \\ a_3 \cdot b_1 + a_4 \cdot b_3 & a_3 \cdot b_2 + a_4 \cdot b_4 \end{pmatrix}$$

Wie können die Formeln **b.** bis **e.** korrekt formuliert werden, damit sie stets zum Wahrheitswert W äquivalent sind. Geben wir je ein Beispiel an.

b. $\bigwedge_{x \in \mathbf{Q}} \bigwedge_{y \in \mathbf{Q}} (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ **c.** $\bigwedge_{a \in \mathbf{R}} \bigwedge_{b \in \mathbf{R}} \bigvee_{F \in \mathbf{Abb}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}; \mathbf{R})} F(a;b) = a \cdot b$ **d.** $\bigwedge_{x \in \mathbf{Z}} \bigwedge_{y \in \mathbf{Z}} \bigvee_{z \in \mathbf{Z}} z = x + y$

e. $\bigwedge_{a \in \mathbf{R}} \bigwedge_{b \in \mathbf{R}} \bigvee_{c \in \mathbf{R}} a^2 + b^2 = c^2$

Natürlich müssen diese Aussagen bewiesen werden. Dies geschieht, indem man über die Axiome des Individualbereiches für jede Aussage geht. Wird der Individualbereich abgeschwächt, zum Beispiel in **e.** statt **R** durch **Q**, so ist die Aussage falsch. Dies belegen wir durch ein einfaches Gegenbeispiel, nämlich $a = 1$, $b = 1$. Es gibt nun kein $c \in \mathbf{Q}$, dass die Gleichung erfüllt. Es wäre sonst $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$. Durch Negierung erhalten wir dann wieder eine wahre Aussage.

2.4 Die Negation

Starten wir mit $\left(\bigwedge_{a \in \mathbf{N}} \bigwedge_{b \in \mathbf{N}} a \cdot b = b \cdot a \right) \Leftrightarrow W$. Um diese Aussage zu negieren, schreiben wir für $\neg(a \cdot b = b \cdot a)$ kurz $a \cdot b \neq b \cdot a$. Ferner ist für die Falsifizierung ein Individuum des Bereiches anzugeben, so dass die Ungleichung nicht zutrifft. Damit geht der Allquantor in einen Existenzquantor über. Wir erhalten damit

$$\neg\left(\bigwedge_{a \in \mathbf{N}} \bigwedge_{b \in \mathbf{N}} a \cdot b = b \cdot a \right) \Leftrightarrow F \text{ bzw. } \left(\bigvee_{a \in \mathbf{N}} \bigvee_{b \in \mathbf{N}} a \cdot b \neq b \cdot a \right) \Leftrightarrow F .$$

Die Gefahr einer Falschinterpretation ist hier geben. Also aufpassen!

2.5 Vertauschen von Quantoren

Stellt man sich die Frage, ob Quantoren vertauschbar sind, so lautet die Antwort: Manchmal ja, meistens nein.

Betrachten wir drei Beispiele und verbalisieren sie.

$\bigwedge_{x\in\mathbf{Z}}\bigwedge_{y\in\mathbf{Z}}\bigvee_{z\in\mathbf{Z}} z = x + y$: Für je zwei ganze Zahlen x und y existiert eine ganze Zahl z, so dass die Gleichung $z = x + y$ erfüllt ist.

$\bigwedge_{x\in\mathbf{Z}}\bigvee_{z\in\mathbf{Z}}\bigwedge_{y\in\mathbf{Z}} z = x + y$: Für jede ganze Zahlen x existiert eine ganze Zahl z, so dass für jede ganze Zahl y die Gleichung $z = x + y$ erfüllt ist.

$\bigvee_{z\in\mathbf{Z}}\bigwedge_{x\in\mathbf{Z}}\bigwedge_{y\in\mathbf{Z}} z = x + y$: Es existiert eine ganze Zahl z, so dass für je zwei ganze Zahlen x und y die Gleichung $z = x + y$ erfüllt ist.

Zuerst scheint hier alles in Ordnung zu sein. Alle Aussagen sind somit äquivalent. Bei genauerer Betrachtung ist es jedoch anders.

Im ersten Beispiel ist es egal was ich für x und y einsetze. Die Zahl z existiert automatisch durch die Addition.

Das zweite Beispiel erweist sich als falsch, denn für x eine beliebige Zahl eingesetzt muss z jetzt schon gewählt werden. Dann kann aber y nicht mehr alle ganzen Zahlen durchlaufen.

Auch das dritte Beispiel erweist sich als falsch. Hier wird z schon von Anfang an festgelegt. Dann können aber x und y nicht mehr beliebig sein.