Aufgaben zum Kapitel Mengen und Abbildungen

Es sei X eine Menge, 2^X die Potenzmenge. Es seien $A,B,C \in 2^X$.

1. Beweisen Sie folgende Aussagen!
Diese sind in der Linearen Algebra, Algebra, Topologie und Wahrscheinlichkeitstheorie von Bedeutung.

a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

c) $A \cup B = B \cup A$ d) $A \cap B = B \cap A$

e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

g) $X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B)$ h) $X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$

i) $(A \cup B) \cap (X - B) = A \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$ j) $A \subseteq B \Leftrightarrow (X - B) \subseteq (X - A)$

k) Definiere $A + B := (A - B) \cup (B - A)$, dann gilt $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$

l) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ m) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

n) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ o) $(A \times B) - (C \times D) = ((A - C) \times B) \cup (A \times (B - D))$

p) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$

Ordnungsrelation, Wohlordnung und total geordnete Mengen

2. Zeigen Sie $\bigwedge_{A,B \in 2^X} (A \prec B \Leftrightarrow A \subseteq B)$ definiert eine Ordnungsrelation auf 2^X . Ist $X \neq \varnothing$, so ist 2^X sogar eine total geordnete Menge.

3. ${}_0\mathbf{N}$ ist wohlgeordnet; $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ sind total geordnet.

Vollständige Induktion

4. Es sei $m \in {}_0\mathbf{N}$.
Angenommen, für jedes $n \in {}_m\mathbf{N}$ ist eine Aussage $\mathcal{A}(n)$ gegeben und es gilt
(i) $\mathcal{A}(k)$ ist für ein $k \in {}_n\mathbf{N}$ wahr.
(ii) $\bigwedge_{l \in_k \mathbf{N}} (\mathcal{A}(l) \Rightarrow \mathcal{A}(l+1))$ ist wahr
Dann ist die Aussage $\mathcal{A}(k)$ für alle $k \in {}_n\mathbf{N}$ wahr.

5. Zeigen Sie die Aussagen mittels vollständiger Induktion.

a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ b) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

c) $\sum_{k=0}^{n} a^k = \begin{cases} n+1 & \textit{für } a = 1 \\ \frac{1-a^{n+1}}{1-a} & \textit{für } a \neq 1 \end{cases}$ d) $\sum_{k=1}^{n} k^r = \begin{cases} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \textit{für } r = 2 \\ \frac{n^2(n+1)^2}{4} & \textit{für } r = 3 \end{cases}$

6. Es sei $\binom{n}{m} := \left| \{ M \subseteq \mathbf{N}_n \mid |M| = m \} \right|$. Beachte $\mathbf{N}_0 := \varnothing$.

a) Beweisen Sie: $\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1}$ für alle $n,m \in {}_0\mathbf{N}$.

Anleitung: $\{ M \subseteq \mathbf{N}_{n+1} \mid |M| = m+1 \} = \{ M \cup \{n+1\} \mid M \subseteq \mathbf{N}_n ; |M| = m \} \cup \{ M \subseteq \mathbf{N}_n \mid |M| = m+1 \}$.

b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: $\binom{n+1}{m+1} = \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}, n \geq m.$

c) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ für ein $n \in {}_0\mathbf{N}$.

7. Ist X eine endliche Menge, so gilt $\left|2^X\right| = 2^{|X|}$.

Abbildungen

Es seien $X, Y, Z, \ldots$ Mengen.

1. Geben Sie Abbildungen $f \in \mathcal{Abb}(X;X)$ an, mit folgender Eigenschaft:
   a) f ist injektiv, aber nicht surjektiv,
   b) f ist surjektiv, aber nicht injektiv.
   c) f ist bijektiv.

2. Ist $f \in \mathcal{Abb}(X;X)$ und X endlich, so gilt: f ist injektiv $\Leftrightarrow$ f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ f ist bijektiv.

3. Es seien $f \in \mathcal{Abb}(X;Y)$ und $g \in \mathcal{Abb}(Y;Z)$, dann gilt
   a) f und g injektiv $\Rightarrow$ $g \circ f$ injektiv.
   b) f und g surjektiv $\Rightarrow$ $g \circ f$ surjektiv.
   c) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow$ f injektiv.
   d) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow$ g surjektiv.

4. Es gibt keine surjektive Abbildung von X auf 2^X.
   Hinweis: Angenommen es gibt eine solche Abbildung. Betrachte $X' := \{x \in X \mid x \notin f(X)\}$ und zeige $X' \subseteq f(X)$.

5. Es seien $A, B \subseteq X$. Es sei $f \in \mathcal{Abb}(X;Y)$.
   a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
   b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
   c) $f(A - B) \supseteq f(A) - f(B)$
   d) $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$
   e) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

6. Es seien $C, D \subseteq Y$. Es sei $f \in \mathcal{Abb}(X;Y)$.
   a) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
   b) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
   c) $f^{-1}(C - D) = f^{-1}(C) - f^{-1}(D)$
   d) $C \subseteq D \Rightarrow f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$
   e) $f(f^{-1}(C)) = C \cap f(X)$

7. Sind $A, B \subseteq X$ endliche Mengen, so gilt
   a) $|A - B| = |A| - |A \cap B|$
   b) $|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$

8. Sei $f \in \mathcal{Abb}(X;Y)$ und $2^f : 2^X \to 2^Y$ definiert durch $2^f(A) := f(A)$.
   a) Ist f injektiv, so auch 2^f.
   b) Sei zusätzlich $g \in \mathcal{Abb}(Y;Z)$, dann ist $2^{g \circ f} = 2^g \circ 2^f$ und $2^{1_X} = 1_{2^X}$.
   d) Sei $2^{f^*} : 2^Y \to 2^X$ definiert durch $2^{f^*}(C) := f^{-1}(C)$.

9. Es sei $X := \{x\}$ eine einelementige Menge.
   Definiere $\alpha(f) = f(x)$, dann ist $\alpha : \mathcal{Abb}(X;Y) \to Y$ ein Isomorphismus von Mengen.

10. $g \in \mathcal{A}bb(X;Y)$ ist ein Monomorphismus $\Leftrightarrow$ $g \in \mathcal{A}bb(X;Y)$ ist injektiv.
$g \in \mathcal{A}bb(X;Y)$ ist ein Epimorphismus $\Leftrightarrow$ $g \in \mathcal{A}bb(X;Y)$ ist surjektiv.
$g \in \mathcal{A}bb(X;Y)$ ist ein Isomorphismus $\Leftrightarrow$ $g \in \mathcal{A}bb(X;Y)$ ist bijektiv.
Hinweis: g mono $\Rightarrow$ g injektiv (2. c) mit $f \in \mathcal{A}bb(W;X)$ und $W := \{a\}$)
g epi $\Rightarrow$ g surjektiv (2. d) mit $f \in \mathcal{A}bb(Y;Z)$ und $Z := \{a,b\}$)

11. Betrachte das folgende Diagramm von Abbildungen und Mengen.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "s"'] & & Z \\ & U \arrow[ur, "t"'] & \end{tikzcd}$$

$g \circ f$ und $t \circ s$ seinen definiert. Ferner gelte $g \circ f = t \circ s$.

a) Ist f surjektiv und t injektiv, dann gibt es genau eine Abbildung $h : Y \to X$ mit $h \circ f = s$ und $t \circ h = g$.

Hinweis: Für jedes $y \in Y$ wähle $x \in X$ mit $f(x) := y$. Zeige $s(x) \in U$ ist unabhängig von der Wahl x. Definiere dann $h(y) := s(x)$.

b) Sind f und s surjektiv sowie g und t injektiv, dann gibt es genau einen Isomorphismus $h : Y \to U$ mit $h \circ f = s$ und $t \circ h = g$.

12. Definiere eine Abbildung $\alpha : \mathcal{A}bb(X \times Y;Z) \to \mathcal{A}bb(X;Abb(Y;Z))$ durch $(\alpha(f)(x))(y) := f(x,y)$. Dann ist α ein Isomorphismus.

13. Gilt $|Y| \geq 2$, dann ist $|\mathcal{A}bb(X;Y)| > |X|$.

14. Sei $Y = \{0,1\}$, dann ist die Abbildung $\beta : \mathcal{A}bb(X;Y) \to 2^X$ definiert durch $\beta(f) := f^{-1}(0)$ ein Isomorphismus von Mengen.

15. $2^{X \times Y} \cong \mathcal{A}bb(Y;2^X)$

Aufgaben zu Äquivalenzrelationen, Überdeckungen und Partitionen

Weisen Sie in den folgenden Aufgaben die Äquivalenzrelationen nach und bestimmen Sie die Äquivalenzklassen.

1. Sei $\approx$ auf $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ wie folgt definiert: $(a,b) \approx (c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$.

2. Sei $\approx$ auf $\mathbf{R}$ definiert durch $x \approx y \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{Z}$.

3. Sei $\approx$ auf $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ definiert durch $(a,b) \approx (c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$.

4. Es seien $a,b \in \mathbf{R}$ gegeben. Es sei $\approx$ auf $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ definiert durch $(x,y) \approx (u,v) \Leftrightarrow \bigvee_{k \in \mathbf{Z}} (x - u = ka \wedge y - v = kb)$.

5. Sei $\approx$ auf $\mathbf{2}^X$ definiert durch $A \approx B \Leftrightarrow |A| = |B|$. Bestimme $[A]$ und $|[A]|$ falls X endlich ist.

6. Es sei $\mathcal{C} \subseteq \mathbf{2}^X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.
a) $\mathcal{C}$ ist eine Überdeckung von X.

b) Ist Y eine Menge und $f,g \in \mathcal{A}bb(X;Y)$ zwei Abbildungen, dann gilt $f = g$, wenn $\bigwedge_{A \in \mathcal{C}} f \circ \iota_A = g \circ \iota_A$

7. Es sei $\mathcal{C} \in Cov(X)$ eine Überdeckung und Y eine Menge. Dann sind folgende Aussagen für die Familie $\{f_A \mid f_A : A \to Y\}_{A \in \mathcal{C}}$ äquivalent.

a. Es gibt eine Abbildung $f \in \mathcal{A}bb(X;Y)$ mit $\bigwedge_{A \in \mathcal{C}} f \circ \iota_A = f_A$.

b. $\bigwedge_{(A,B) \in \mathcal{C}^2} f_A \circ \iota_{A \cap B} = f_B \circ \iota_{A \cap B}$.

8. $\mathcal{C} \in \wp(X)$ ist eine Partition der Menge X genau dann, wenn $\mathcal{C}$ die folgenden Bedingungen erfüllt.

a) $\bigwedge_{A \in \mathcal{C}} A \neq \emptyset$,

b) Ist Y eine Menge und die Familie $\{f_A \mid f_A : A \to Y\}_{A \in \mathcal{C}}$ gegeben, dann gibt es genau eine Abbildung $f \in \mathcal{A}bb(X;Y)$ mit $\bigwedge_{A \in \mathcal{C}} f \circ \iota_A = f_A$.