Multiplikatoren von Lagrange und wie werde ich sie wieder los

Problembeschreibung

Extremwertbetrachtungen sind jedem noch aus der Schule bekannt. Dabei nennen wir Stellen, die minimale bzw. maximale Werte aufweisen kurz ***Extremstellen***. Dabei hat eine Funktion $f:\mathbf{E}\to\mathbb{R}$, wobei $\mathbf{E}$ ein Banachraum ist, an der Stelle $\boldsymbol{a}$ ein ***relatives Minimum*** (***Maximum***), wenn

$$f(\boldsymbol{a})\le f(\boldsymbol{x}) \qquad\qquad (f(\boldsymbol{x})\le f(\boldsymbol{a}))$$

für alle $\boldsymbol{x}\in U$, wobei U eine offene Umgebung von $\boldsymbol{a}$ ist. Das Extremum ist streng, wenn die Gleichheit für $\boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{a}$ ausgeschlossen ist.

Die erste und zweite Ableitung von f gibt in den meisten Fällen eine Antwort auf diese Frage.

Notwendige Bedingung: $f'(\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$ (auch ***kritische Stellen*** genannt)

Hinreichende Bedingung: $f'(\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$ und $f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\ge\mathbf{0}$ (***relatives Minimum***)

Ist die Bilinearform $f''(\boldsymbol{a})$ sogar ***positiv und nicht entartet***, so ist es ein ***strenges Minimum***.

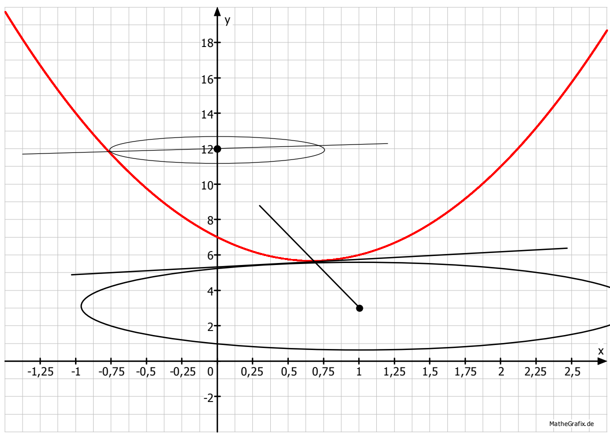
Dieses Theorem ist sehr weitreichend und kann auf viele Probleme angewendet werden. Ein Problem ist die Beschränkung einer Funktion auf eine reguläre Teilmenge (Mannigfaltigkeit).

Wir betrachten hier eine Teilmenge $M\subset\mathbf{E}=\mathbb{R}^n$, auf die die Funktion f beschränkt werden soll. Konkrete Beispiele, die das Problem verdeutlichen und zu der allgemeinen Formulierung führen. Dazu stellen wir ***verschiedene Lösungsstrategien*** vor.

Problemstellung

a) Welchen Abstand hat der Punkt $(1|3)$ von der Parabel $M:=\{(x,g(x))\,|\,g(x)=3x^2-4x+7\}$.

b) Welchen Abstand hat der Punkt $(0{,}12)$ von der Parabel $M=g^{-1}(0)$?



Die Kreise erscheinen als Ellipsen, da die Koordinatenachsen unterschiedlich skaliert sind.

1. Pythagoras und Kreis

a) Jeder Punkt der Parabel $(a \mid g(a)) \in M$ hat einen bestimmten Abstand zu $(1 \mid 3)$. Dieser Abstand muss minimal werden und dieses Problem kann mit Hilfe des Pythagoras gelöst werden.

Dazu berechnen wir den Abstand eines beliebigen Punktes $(a \mid g(a))$ von $(1 \mid 3)$. Das Quadrat des Abstandes beträgt

$$(a-1)^2 + (g(a)-3)^2 = r^2 \Leftrightarrow (a-1)^2 + \left(3a^2-4a+7-3\right)^2 = r^2 \Leftrightarrow (a-1)^2 + \left(3a^2-4a+4\right)^2 = r^2$$

Wir betrachten daher die Funktion $R(a) = (a-1)^2 + \left(3a^2-4a+4\right)^2$.

Die erste Ableitung ist zu berechnen. Also

$$\begin{aligned} R'(a) &= 2(a-1) + 2\left(3a^2-4a+4\right)(6a-4) \\ &= 2a-2+36a^3-72a^2+80a-32 \\ &= 36a^3-72a^2+82a-34 \end{aligned}$$

und

$$R''(a) = 108a^2 - 144a + 82$$

Wir erhalten nur eine reelle Lösung $R'(a) = 0 \Leftrightarrow a \approx 0{,}6862665375$. Dies liefert $R''(0{,}6862665375) \approx 34{,}04 > 0$.

Der Abstand des minimalen Punktes von der Parabel beträgt folglich

$$\sqrt{R(0{,}6862665375)} \approx 2{,}686203195.$$

b) Für den Punkt $(0{,}12)$ ergibt sich $(a-0)^2 + (g(a)-12)^2 = r^2 \Leftrightarrow a^2 + \left(3a^2-4a-5\right)^2 = r^2$.

Also ist $R(a) = a^2 + \left(3a^2-4a-5\right)^2 \Rightarrow R'(a) = 2\left[a + \left(3a^2-4a-5\right)(6a-4)\right]$ auszuwerten.

$$\begin{aligned} &R'(a) = 0 \Leftrightarrow 18a^3 - 36a^2 - 13a + 20 = 0 \Leftrightarrow \\ &a_1 \approx -0{,}7759797001,\ a_2 \approx 0{,}6846875318,\ a_3 \approx 2{,}091292168 \end{aligned}$$

Nun ist $R''(a) = 2\left[1 + (6a-4)(6a-4) + 6\left(3a^2-4a-5\right)\right] = 108a^2 - 144a - 26$ und wir erhalten $R''(a_1) \approx 150{,}8,\ R''(a_2) \approx -74{,}0,\ R''(a_3) \approx 145{,}2$. Folglich gibt a_1 das Minimum an und $\sqrt{R(a_1)} \approx 0{,}781141$.

2. Die Normale durch den Punkt $(1 \mid 3)$ steht senkrecht auf der Tangente der Parabel.

Die Funktion der Tangente in a lautet $T(x) = g'(a)(x-a) + g(a)$. Die Normale infolgedessen $N(x) = -\frac{1}{g'(a)}(x-a) + g(a)$. Die Normale durch den Punkt $\left(a \mid g(a) = 3a^2 - 4a + 7\right)$ trifft natürlich den Punkt $(1 \mid 3)$. Dies liefert

$$3 = N(1) \Leftrightarrow -\frac{1}{(6a-4)}(1-a) + g(a) - 3 = 0 \Leftrightarrow a - 1 + (6a-4)\left(3a^2-4a+4\right) = 0.$$

$$18a^3-36a^2+41a-17=0 \Leftrightarrow a\approx 0{,}6862665375$$

Der Abstand ist folglich $\sqrt{R(a)}=\sqrt{(a-1)^2+(g(a)-3)^2}\approx 2{,}686203195$.

Für den Punkt $(0{,}12)$ erhalten wir entsprechend

$$12=N(0)\Leftrightarrow -\frac{1}{(6a-4)}(0-a)+g(a)-12=0\Leftrightarrow a+(6a-4)\left(3a^2-4a-5\right)=0.$$

Die zu lösende Gleichung ist uns bekannt: $18a^3-36a^2-13a+20=0$.

3. Einschränkung von Kreisen auf die Parabel

Zur Lösung definieren wir „Kreise“ um den Punkt $(1|3)$, also $f(x,y):=(x-1)^2+(y-3)^2$. Das Funktional f stellt somit das Quadrat des Radius‘ dar. Dieses Quadrat gilt es zu minimieren. Betrachten wir nun $f\left(x,3x^2-4x+7\right)=(x-1)^2+\left(3x^2-4x+4\right)^2$. Dies ist eine Funktion h in einer Veränderlichen $h(x)=(x-1)^2+\left(3x^2-4x+4\right)^2$. Dies ist $R(a=x)$ unter 1. $h'(x)=0$ liefert wieder $x_1\approx 0{,}6862665375$ und zwei komplexe Wurzeln. Für die hinreichende Bedingung finden wir wieder $h''(x_1)=34{,}04148873>0$.

Damit liegt an der Stelle x_1 ein Minimum vor. Setzen wir diesen Wert in die Parabel ein, so finden wir $g(x_1)=5{,}667819131$ und damit $f(x_1,g(x_1)):=(x_1-1)^2+(g(x_1)-3)^2$ $=7{,}215687604$ als Quadrat des Radius. Folglich ist der Abstand $r=\sqrt{f(x_1,g(x_1))}=2{,}686203195$.

Im zweiten Fall um den Punkt $(0|12)$ definieren wir $f(x,y):=x^2+(y-12)^2$ und erhalten $f\left(x,3x^2-4x+7\right)=x^2+\left(3x^2-4x-5\right)^2$, woraus sich $h'(x)=2x+2\left(3x^2-4x-5\right)(6x-4)$ ergibt. Also ist wieder $18x^3-36x^2-13x+20=0$ zu lösen.

Geht es ein bisschen schneller?

Die Tangente des ausgezeichneten Kreises ist eine Linearkombination der Tangente der Parabel

Bisher haben wir gesehen, dass das Problem auf das Betrachten der Tangentialräume oder deren Orthogonalräume zurückgeführt werden kann. Im Extremfall stimmen beide Tangentialräume im Extrempunkt überein. Natürlich stimmen dann auch die Orthogonalräume überein.

$$\text{Tangentialraum: } T_{\boldsymbol{a}}M\,,\ \boldsymbol{a}\in M:=g^{-1}(0),\ \text{Normalraum: } \left(T_{\boldsymbol{a}}M\right)^{\perp}$$

Hierbei wird davon ausgegangen, dass $rg\left(g'(\boldsymbol{a})\right)$ maximal ist. Die dazu gehörigen Punkte heißen ***regulär***.

Da der zu betrachtende Punkt $\boldsymbol{a}$ der Menge M angehört und alle anderen Punkte, die nicht zu M gehören außer Acht gelassen werden, sprechen wir von einer ***Zwangsbedingung*** (die anderen daneben liegenden Punkte würden einer Nebenbedingung genügen). Die eingangs gemachte Bemerkung über Extremstellen gilt hier immer noch. Da $f'(\boldsymbol{a})$ und $g'(\boldsymbol{a})$ als lineare Abbildungen den gemeinsamen Tangentialraum abbilden, jedoch im Allgemeinen $f'(\boldsymbol{a})\boldsymbol{v} \neq g'(\boldsymbol{a})\boldsymbol{v}$ für $\boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{a}}M$ gilt, muss jetzt $F'(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a}) - \Lambda \circ g'(\boldsymbol{a})$, also $F'(\boldsymbol{a}) = 0$ unter der Zwangsbedingung $\boldsymbol{a} \in M := g^{-1}(0)$ betrachtet werden.

Ich beschreibe es hier mit Differentialen (pfaffsche Formen), da es einfacher ist. Der Leser interpretiere auch gerne partielle Ableitungen.

4. Vergleich der Tangentialgeraden im $\mathbb{R}^2$

Dazu schreiben wir alles in ebenen Koordinaten. Die Parabel als Menge $M := g^{-1}(0)$ lautet $g(x,y) = 3x^2 - 4x - y + 7 = 0$, die Quadrate der Kreise $f(x,y) := (x-1)^2 + (y-3)^2$. Es sei also $F(x,y) = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)$. Berechnen wir das Differential $dF = 0$. Wir finden

$$\begin{aligned} dF(x,y) &= df(x,y) - \lambda dg(x,y) \\ &= 2(x-1)dx + 2(y-3)dy - \lambda(6x-4)dx + \lambda dy \\ &= [2(x-1) - 2\lambda(3x-2)]dx + [2(y-3) + \lambda]dy \end{aligned}$$

$dF(x,y) = 0$ liefert $(x-1) - \lambda(3x-2) = 0$ und $2(y-3) + \lambda = 0$. Mit der Zwangsbedingung $g(x,y) = 3x^2 - 4x + 7 - y = 0$ ist das Gleichungssystem lösbar. Eleminieren wir λ und setzen y ein, so finden wir

$$\begin{aligned} (x-1) + \left(2\left(3x^2 - 4x + 7\right) - 6\right)(3x-2) = 0 &\Leftrightarrow (x-1) + 2\left(3x^2 - 4x + 7\right)(3x-2) - 6(3x-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(3x^2 - 4x + 7\right)(6x-4) - 17x + 11 = 0 \end{aligned}$$

$$18x^3 - 36x^2 + 41x - 17 = 0 \Leftrightarrow x = 0{,}6862665375$$

Setzen wir in g ein, so erhalten wir $y = 5{,}667819131$. Damit berechnet sich wieder via f der tatsächliche Abstand.

Die Größe λ (**lagrangescher Multiplikator**) ist nur eine Hilfsgröße und ist hier für die Rechnung unerheblich. Manche nehmen auch λ als Parameter auf, also $F(x,y,\lambda)$. Dann ist

$$dF(x,y,\lambda) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + g(x,y)d\lambda,$$

so dass hier noch einmal die Zwangsbedingung $g(x,y) = 0$ erscheint.

Natürlich kann in diesem Fall auch mit Vektoren gerechnet werden. Tangentenvektoren sind

$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 6x-4 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Parabel) und $\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix}$ (Kreis). Aus $\boldsymbol{k} = \lambda \boldsymbol{p} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 6x-4 \\ 1 \end{pmatrix}$ folgt die Gleichung $(x-1) = (y-3)(6x-4)$ und mit der Zwangsbedingung $g(x,y) = 0$ folgt die Lösung.

In der Praxis ist folglich das Problem genauso zu formulieren, damit es hierauf zurückgeführt werden kann.

5. Tiefergehendes Beispiel

Gegeben ist die Funktion $f(x,y) := 4x^2 - 3xy$, die auf $M := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 - 1 = 0\right\}$ beschränkt wird und dort auf Extrema untersucht werden soll. Dazu definieren wir die Funktion $g(x,y) := x^2 + y^2 - 1$ und untersuchen $F(x,y) := f(x,y) - \lambda g(x,y)$ auf Extrema.

Wir finden

$$\begin{aligned} dF(x,y) &= df(x,y) - \lambda dg(x,y) \\ &= (8x - 3y)dx + (-3x)dy - \lambda(2xdx + 2ydy) \\ &= (8x - 3y - 2x\lambda)dx + (-3x - 2y\lambda)dy \end{aligned}$$

Folglich ist $0 = dF(x,y)$ genau dann, wenn

$$\left.\begin{aligned} 8x - 3y - 2x\lambda = 0 \\ 3x + 2y\lambda = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 8xy - 3y^2 - 2xy\lambda = 0 \\ 3x^2 + 2xy\lambda = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 8xy - 3y^2 + 3x^2 = 0$$

Aufgrund der Einschränkung von f auf M erhalten wir aus

$$8xy - 3y^2 + 3x^2 = 0 \text{ und } x^2 + y^2 - 1 = 0$$

die Gleichung $8x\left(\pm\sqrt{1-x^2}\right) - 3\left(1-x^2\right) + 3x^2 = 0$, da $x \neq 0$ und $y \neq 0$, sonst $(x,y) = (0,0)$.

$$8x\left(\pm\sqrt{1-x^2}\right) - 3\left(1-x^2\right) + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow 8x\left(\pm\sqrt{1-x^2}\right) = 3\left(1-2x^2\right)$$

$$\Rightarrow 64x^2\left(1-x^2\right) = 9\left(1 - 4x^2 + 4x^4\right) \Leftrightarrow \left(10x^2\right)^2 - 10\cdot\left(10x^2\right) + 9 = 0$$

Wir finden also $x_{1/2} = \pm\frac{1}{10}\sqrt{10}$, $x_{3/4} = \pm\frac{3}{10}\sqrt{10}$ und $y_{1/2} = \pm\frac{3}{10}\sqrt{10}$, $y_{3/4} = \pm\frac{1}{10}\sqrt{10}$, denn $g\left(\pm\frac{1}{10}\sqrt{10}, \pm\frac{3}{10}\sqrt{10}\right) = 0$ sowie $g\left(\pm\frac{3}{10}\sqrt{10}, \pm\frac{1}{10}\sqrt{10}\right) = 0$. Damit ist nur noch $8xy - 3y^2 + 3x^2 = 0$ zu prüfen. Wegen $8\cdot\frac{3}{10} - 3\cdot\frac{9}{10} + 3\cdot\frac{1}{10} = 0$, aber $-8\cdot\frac{3}{10} - 3\cdot\frac{9}{10} + 3\cdot\frac{1}{10} \neq 0$ bei ungleichen Vorzeichen von x und y, bleiben nur diese 4 Möglichkeiten. $f(x,y) = 4x^2 - 3xy$ liefert

$f\left(\pm\frac{1}{10}\sqrt{10}, \pm\frac{3}{10}\sqrt{10}\right) = 4\cdot\frac{1}{10} - 3\cdot\frac{3}{10} = -\frac{1}{2}$ sowie $f\left(\pm\frac{3}{10}\sqrt{10}, \pm\frac{1}{10}\sqrt{10}\right) = 4\cdot\frac{9}{10} - 3\cdot\frac{3}{10} = \frac{27}{10}$.

In den Punkten $\left(\frac{1}{10}\sqrt{10},\frac{3}{10}\sqrt{10}\right)$, $\left(-\frac{1}{10}\sqrt{10},-\frac{3}{10}\sqrt{10}\right)$ wird ein übereinstimmendes Minimum und in den Punkten $\left(\frac{3}{10}\sqrt{10},\frac{1}{10}\sqrt{10}\right)$, $\left(-\frac{3}{10}\sqrt{10},-\frac{1}{10}\sqrt{10}\right)$ ein übereinstimmendes Maximum angenommen.

6. Die Menge *M* besitzt mindestens einen nicht regulären Punkt

Es seien $g(x,y) := x\left(x^2 - y^2 - 1\right)$ und $M := g^{-1}(0)$. Wie weit ist der Punkt $(-3,4)$ von M entfernt?

Sei f definiert durch $f(x,y) := (x+3)^2 + (y-4)^2$. Dann ist

$$\begin{aligned} dF(x,y) &= df(x,y) - \lambda \cdot dg(x,y) \\ &= 2(x+3)dx + 2(y-4)dy - \lambda \cdot \left[\left(3x^2 - y^2 - 1\right)dx - 2xydy\right] \\ &= \left[2(x+3) - \lambda\left(3x^2 - y^2 - 1\right)\right]dx + \left[2(y-4) + \lambda \cdot 2xy\right]dy. \end{aligned}$$

Das liefert die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2(x+3) - \lambda\left(3x^2 - y^2 - 1\right) &= 0 \\ 2(y-4) + \lambda \cdot 2xy &= 0 \\ x\left(x^2 - y^2 - 1\right) &= 0 \end{aligned}$$

Für $x = 0$ folgt $6 + \lambda\left(y^2 + 1\right) = 0,\ 2(y-4) = 0$, also $y = 4$ und $\lambda = -\frac{6}{17}$.

Wir eliminieren λ.

$$\left.\begin{aligned} 2xy \cdot 2(x+3) - \lambda \cdot 2xy\left(3x^2 - y^2 - 1\right) = 0 \\ 2(y-4)\left(3x^2 - y^2 - 1\right) + \lambda \cdot 2xy\left(3x^2 - y^2 - 1\right) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} 2xy(x+3) + (y-4)\left(3x^2 - y^2 - 1\right) = 0 \\ (4xy + 6y - 8x)x = 0 \end{aligned}\right.$$

Also bleibt $4xy + 6y - 8x = 0$ für $x \neq 0$ zu untersuchen. Dies liefert $2xy + 3y - 4x = 0 \Leftrightarrow (2x+3)y - 4x = 0 \Rightarrow y = \frac{4x}{2x+3},\ x \neq -\frac{3}{2}$. Unter Beachtung von $g(x,y) = 0$ folgt $x^2 - \left(\frac{4x}{2x+3}\right)^2 - 1 = 0$, also

$$\left(x^2 - 1\right)(2x+3)^2 - 16x^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 1\right)\left(4x^2 + 12x + 9\right) - 16x^2 = 0.$$

Vereinfachen bringt

$$\begin{aligned} \left(x^2 - 1\right)\left(4x^2 + 12x + 9\right) - 16x^2 = 0 &\Leftrightarrow 4x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 16x^2 - 4x^2 - 12x - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x^4 + 12x^3 - 11x^2 - 12x - 9 = 0 \end{aligned}$$

Diese liefert $x \approx 1{,}3867$ und $y \approx 0{,}96075$ zu den bereits bekannten Punkt $(0,4)$, der sich auch aus $f(0,y) = (y-4)^2 + 9$ als Minimum $\sqrt{f(0,4)} = 3\,\text{LE}$ ergibt.

$f(x,y) := (x+3)^2 + (y-4)^2 = 28,48017745$ $\sqrt{f(x,y)} = 5,336682251\text{LE}$ ist keine Extremstelle. Wegen $y - 4 + \lambda \cdot xy = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4-y}{xy} = 2,281253$ kann λ eliminiert werden. Zur Untersuchung eines Extremums ist

$$F''(x,y) = f''(x,y) - \lambda \cdot g''(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - 6\lambda x & 2\lambda y \\ 2\lambda y & 2y + 2\lambda x \end{pmatrix}$$

auszuwerten. Insbesondere $2x - 6\lambda x$ und

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 2x - 6\lambda x & 2\lambda y \\ 2\lambda y & 2y + 2\lambda x \end{pmatrix} = 4x\left(y + \lambda x - 3\lambda y - 3\lambda^2 x\right) - 4\lambda^2 y^2.$$

Setzen wir $x \approx 1,3867$ und $y \approx 0,96075$ sowie $\lambda = 2,281253$ ein, so finden wir $2x - 6\lambda x < 0$ und $\Delta \approx -40,24 < 0$, so dass hier kein Extremum vorliegt.

Mit Graßmann wird es einfacher. Wir erhalten

$$\begin{aligned} df(x,y) \wedge dg(x,y) &= \left[2(x+3)dx + 2(y-4)dy\right] \wedge \left[\left(3x^2 - y^2 - 1\right)dx - 2xydy\right] \\ &= \left[2(x+3)(-2xy) - 2(y-4)\left(3x^2 - y^2 - 1\right)\right] dx \wedge dy \\ &= -2\left[2xy(x+3) + (y-4)\left(3x^2 - y^2 - 1\right)\right] dx \wedge dy \\ &= -2\left[2x^2y + 6xy + \left(3x^2y - y^3 - y\right) + \left(-12x^2 + 4y^2 + 4\right)\right] dx \wedge dy \\ &= -2\left(5x^2y + 6xy - 12x^2 - y^3 + 4y^2 - y + 4\right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

$$5x^2y + 6xy - 12x^2 - y^3 + 4y^2 - y + 4 = 0 \text{ und } x\left(x^2 - y^2 - 1\right) = 0$$

Hieraus folgt wieder $(x,y) = (0,4)$. Im anderen Fall ist $x^2 - y^2 - 1 = 0$, also $x^2 - 1 = y^2$ reduzieren wir die Potenz.

$$\begin{aligned} 5x^2y + 6xy - 12x^2 - y\left(x^2 - 1\right) + 4\left(x^2 - 1\right) - y + 4 &= 0 \\ 4x^2y + 6xy - 8x^2 &= 0 \\ (2x+3)y - 4x = 0 \text{ oder } x &= 0 \\ \tfrac{4x}{2x+3} = y,\ x &\neq -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Wir finden $(2x+3)^2 y^2 = 16x^2 \Rightarrow (2x+3)^2\left(x^2 - 1\right) = (2x+3)^2 y^2 = 16x^2$ und damit wieder

$$\left(4x^2 + 12x + 9\right)\left(x^2 - 1\right) = 16x^2 \Leftrightarrow 4x^4 + 12x^3 - 11x^2 - 12x - 9 = 0.$$

Abschließende Bemerkung ***(Nur für ein Minimum definiert)***

Selbstverständlich gelten für Extrema mit ***Zwangsbedingungen*** der Funktion F definiert durch $F'(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a}) - \Lambda \circ g'(\boldsymbol{a})$, folgenden Aussagen.

Notwendige Bedingung: $F'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$

Hinreichende Bedingung: $F'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ und $F''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{0}$ (***relatives Minimum***)

Ist $F''(\boldsymbol{a})$ ***positiv und nicht entartet***, so ist es ein ***strenges Minimum***.

Wir untersuchen diese Aussage geometrisch, um sie zu verstehen. Dabei beschränken wir uns auf den dreidimensionalen Raum.

Es sei $M := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 0\right\}$ für eine reguläre Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Nehmen wir an, es gibt um den Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in M$ eine reguläre Parameterdarstellung $\varphi : I \times J \to M \subset \mathbb{R}^3$ mit $\varphi(s_0, t_0) := (x_0, y_0, z_0) \in M$ und $\operatorname{rang}(\varphi'(s_0, t_0)) = 2$. Dann ist φ ein Diffeomorphismus, wenigstens lokal, und $\varphi'(s_0, t_0) : T_{(s_0, t_0)}(I \times J) \to T_{(x_0, y_0, z_0)}M$ ein Isomorphismus der zugehörigen Tangentialebenen mit

$$T_{(x_0, y_0, z_0)}M = \left\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \middle| g'(x_0, y_0, z_0)\boldsymbol{v} = 0\right\}.$$

Die Einschränkung einer Funktion $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ auf $U \cap M \neq \varnothing$ ist durch die Funktion $f \circ \varphi$ gegeben. Wegen

$$(g \circ \varphi)'(s_0, t_0) = g'(\varphi(s_0, t_0)) \cdot \varphi'(s_0, t_0) = g'(x_0, y_0, z_0) \cdot \varphi'(s_0, t_0),$$

$$(f \circ \varphi)'(s_0, t_0) = f'(\varphi(s_0, t_0)) \cdot \varphi'(s_0, t_0) = f'(x_0, y_0, z_0) \cdot \varphi'(s_0, t_0)$$

und $\varphi'(s_0, t_0)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \in T_{(x_0, y_0, z_0)}M$ bekommen wir

$$f'(x_0, y_0, z_0)\boldsymbol{v} = g'(x_0, y_0, z_0)\lambda\boldsymbol{v} \Leftrightarrow \left(f'(x_0, y_0, z_0) - \lambda g'(x_0, y_0, z_0)\right)\boldsymbol{v} = 0.$$

Da der Normalenvektor senkrecht auf dem Tangentialraum steht, kann die Aussage auch für den Gradienten formuliert werden, obwohl der Gradient hier an dieser Stelle nichts verloren hat, da er ein Objekt der (semi)riemannschen Räume ist. Er hängt folglich von der Metrik ab.

Es gilt somit folgender Satz.

Definition

Es sei $g : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ eine Abbildung zwischen Banachräumen mit $g(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$. g sei an der Stelle $\boldsymbol{a} \in \mathbf{E}$ differenzierbar. Der Punkt $\boldsymbol{a}$ heißt regulärer Punkt der Menge

$$M := \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{E} \middle| g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\right\} = g^{-1}(\boldsymbol{0}),$$

wenn die Ableitung von g an der Stelle $\boldsymbol{a}$ den Raum $\mathbf{E}$ auf $\mathbf{F}$ abbildet, d.h. $(g'(\boldsymbol{a}))(\mathbf{E}) = \mathbf{F}$.

Es sei $\mathbf{E}_1 := \left(g'(\boldsymbol{a})\right)^{-1}(\mathbf{0})$. Der Raum $T_{\boldsymbol{a}}M := \{\boldsymbol{a}\} \times \mathbf{E}_1$ heißt der Tangentialraum der Menge $M = g^{-1}(\mathbf{0})$ an der Stelle $\boldsymbol{a} \in M$. Der Tangentialraum trägt die Verknüpfung

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{v}) := (\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) \text{ für } \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbf{E}_1 .$$

Man stelle sich die Tangentialebene als Koordinatensystem auf einer Folie mit $\{\boldsymbol{a}\}$ als Ursprung vor, die auf eine Fläche im Raum gelegt wird.

Bemerkung

Manchmal wird der „Tangentialraum" auch als sogenannte lineare affine Mannigfaltigkeit $T_{\boldsymbol{a}}M := \{\boldsymbol{a}\} + \mathbf{E}_1$ ausgewiesen. Vorsicht! Hier handelt es sich um eine „Nebenklasse".

Theorem

Sei $g : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ eine Abbildung zwischen Banachräumen, die stetig differenzierbar in einer Umgebung U von $\boldsymbol{a} \in M = g^{-1}(\mathbf{0})$ ist.

Ist $\boldsymbol{a}$ ein regulärer Punkt und ist $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \oplus \mathbf{E}_2$ die topologische Summe der Unterräume $\mathbf{E}_1 = \left(g'(\boldsymbol{a})\right)^{-1}(\mathbf{0})$ und seines topologisches Komplement $\mathbf{E}_2$, dann

(i) gibt es eine Umgebung $V_1 \subset T_{\boldsymbol{a}}M$ in dem Tangentialraum an der Stelle $\boldsymbol{a} \in M$ die homöomorph zu einer Umgebung V_2 mit $\boldsymbol{a} \in V_2 \subset M$ ist.

(ii) existiert eine Umgebung W der null $W \subset \mathbf{E}_1$ und eine Abbildung $F : W \to \mathbf{E}_2$ so dass $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}_1 + F(\boldsymbol{x}_1) \in M$ und $\lim\limits_{\boldsymbol{x}_1 \to \mathbf{0}} \frac{\|F(\boldsymbol{x}_1)\|}{\|\boldsymbol{x}_1\|} = 0$.

Definition

Es seien $\mathbf{E}$ und $\mathbf{F}$ Banachräume. Es sei $g : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in einer Umgebung U des regulären Punktes $\boldsymbol{a} \in \mathbf{E}$ mit $\boldsymbol{a} \in U \subset M$, wobei $M := \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{E} \,|\, g(\boldsymbol{x}) = 0\} = g^{-1}(0)$. Eine Funktion $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ hat ein lokales durch die Menge M erzwungenes Minimum (Maximum), falls es ein $r > 0$ gibt, so dass

$$f(a) \le f(x) \ \left(f(a) \ge f(x)\right) \text{ für } x \in K(a,r) \cap M .$$

Theorem

Falls f an der Stelle $\boldsymbol{a} \in M$ ein lokales erzwungenes Extremum besitzt, dann existiert ein lineares Funktional $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbf{F}^*$ des Dualraumes mit $f'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\Lambda} \circ g'(\boldsymbol{a})$. $\boldsymbol{\Lambda}$ heißt lagrangesches Funktional. Notwendig und hinreichend für das Funktional F definiert durch $F(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{a}) - \Lambda \circ g(\boldsymbol{a})$ sind folgende Aussagen.

Notwendige Bedingung: $F'(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$

Hinreichende Bedingung: $F'(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$ und $F''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \ge \mathbf{0}$ (relatives Minimum)

Ist $F''(\boldsymbol{a})$ sogar positiv und nicht entartet, so ist das Minimum streng.

Eleminieren der lagrangeschen Multiplikatoren

Für ungerade $(2p+1)$-Formen ω gilt $\omega \wedge \omega = 0$. Folgt aus $\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha$ für eine *r*-Differentialform α und *s*-Differentialform β.

Aus $dF(x,y) = df(x,y) - \lambda dg(x,y) = 0 \Leftrightarrow df(x,y) = \lambda dg(x,y)$ und $dg(x,y) \wedge dg(x,y) = 0$ folgt

$$df(x,y) \wedge dg(x,y) = \lambda dg(x,y) \wedge dg(x,y) = 0.$$

Dies liefert uns die beste und schnellste Lösungsmöglichkeit.

Die „Fläche“ $df(x,y) \wedge dg(x,y)$ ***verschwindet, wenn die Vektoren linear abhängig sind.***

$$\begin{aligned} df(x,y) \wedge dg(x,y) &= [2(x-1)dx + 2(y-3)dy] \wedge [(6x-4)dx - dy] \\ &= [-2(x-1) - 2(y-3)(6x-4)]dx \wedge dy \\ &= -2[x-1+(y-3)(6x-4)]dx \wedge dy \end{aligned}$$

Folglich ist wieder

$$x-1+(y-3)(6x-4) = 0 \Leftrightarrow y = \tfrac{-x+1}{6x-4} + 3 = \tfrac{17x-11}{6x-4}.$$

Oder direkt mit $g(x,y) = 3x^2 - 4x + 7 - y = 0$

$$(x-1) + (3x^2 - 4x + 7 - 3)(6x-4) = 0.$$

Also $x = 0{,}6862665375$ und $y = 5{,}667819131$.

7. **Noch einmal das tiefergehende Beispiel**

Gegeben ist die Funktion $f(x,y) := 4x^2 - 3xy$, die auf $M := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 - 1 = 0\right\}$ beschränkt wird und dort auf Extrema untersucht werden soll. Dazu definieren wir die Funktion $g(x,y) := x^2 + y^2 - 1$ und untersuchen $(f \wedge g)(x,y) = 0$ auf Extrema.

Wir finden

$$(f \wedge g)(x,y) = \left((8x-3y)2y + 6x^2\right)dx \wedge dy.$$

Folglich ist $8xy - 3y^2 + 3x^2 = 0$ zu untersuchen. Aufgrund der Einschränkung von f auf M erhalten wir aus

$$8xy - 3y^2 + 3x^2 = 0 \text{ und } x^2 + y^2 - 1 = 0$$

die oben berechneten Daten!

8. **Ein etwas ausführlicheres Beispiel**

Es sei f definiert durch $f(x,y,z) = x^2 + x + 2y^2 + 3z^2$. Gesucht sind die Extremstellen und –werte der Funktion f eingeschränkt auf die Kugeloberfläche definiert durch g mit $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Es sind $df(x,y,z)=(2x+1)dx+4ydy+6zdz$ und $dg(x,y,z)=2xdx+2ydy+2zdz$. Also

$$(df\wedge dg)(x,y,z)=-2y(2x-1)dx\wedge dy-4yzdy\wedge dz+2z(4x-1)dz\wedge dx.$$

Wir finden $y(2x-1)=0$ und $yz=0$ sowie $z(4x-1)=0$ in der Zwangsbedingung $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$. Dies liefert folgende Stellen.

$$(x,y,z)\in\left\{(1,0,0),(-1,0,0),\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right),\left(\frac{1}{4},0,\frac{\sqrt{15}}{4}\right),\left(\frac{1}{4},0,-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\right\}$$

Hierzu finden wir folgende Werte.

$f(1,0,0)=2$, $f(-1,0,0)=0$ (Minimum), $f\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)=\frac{9}{4}=f\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,

$f\left(\frac{1}{4},0,\frac{\sqrt{15}}{4}\right)=\frac{25}{8}=f\left(\frac{1}{4},0,-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$ (Maximum).

Selbstverständlich können auch

$$f\left(x,y,\pm\sqrt{1-x^2-y^2}\right)=x^2+x+2y^2+3\left(1-x^2-y^2\right)=3-2x^2+x-y^2$$

$$f\left(x,\pm\sqrt{1-x^2-z^2},z\right)=x^2+x+2\left(1-x^2-z^2\right)+3z^2=2-x^2+x+z^2$$

$$\begin{aligned}f\left(\pm\sqrt{1-y^2-z^2},y,z\right)&=1-y^2-z^2\pm\sqrt{1-y^2-z^2}+2y^2+3z^2\\&=1+y^2+2z^2\pm\sqrt{1-y^2-z^2}\end{aligned}$$

auf Extremstellen untersucht werden.

$$df\left(x,y,\pm\sqrt{1-x^2-y^2}\right)=(-4x+1)dx-2ydy\Leftrightarrow 4x-1=0 \text{ und } y=0$$

$$df\left(x,\pm\sqrt{1-x^2-z^2},z\right)=(-2x+1)dx+2zdz\Leftrightarrow -2x+1=0 \text{ und } z=0$$

$$\begin{aligned}df\left(\pm\sqrt{1-y^2-z^2},y,z\right)&=2ydy+4zdz\mp\frac{ydy+zdz}{\sqrt{1-y^2-z^2}}\\&\Leftrightarrow y\left(2\mp\frac{1}{\sqrt{1-y^2-z^2}}\right)=0 \text{ und } z\left(4\mp\frac{1}{\sqrt{1-y^2-z^2}}\right)=0\end{aligned}$$

Hier sind nur $(y,z)=(0,0)$ möglich!

Führen Sie die Untersuchung auch mit $F(\boldsymbol{a})=f(\boldsymbol{a})-\Lambda\circ g(\boldsymbol{a})$ durch.

Notwendige Bedingung: $F'(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$

Hinreichende Bedingung: $F'(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$ und $F''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geq\boldsymbol{0}$ bzw. $F''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\leq\boldsymbol{0}$

Ist $F''(\boldsymbol{a})$ positiv und nicht entartet?

Quader im Ellipsoid

Gegeben sei ein Ellipsoid $E:\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$ mit $x,y,z\in\mathbb{R};\ a,b,c\in\mathbb{R}_+$.

Gesucht ist der achsenparallele Quader mit dem größten Volumen, welcher zentriert in einem kartesischen Koordinatensystem liegt und E einbeschrieben werden kann.
Dazu zerlegen wir das Ellipsoid in seine acht Oktanten und dürfen $x,y,z\in\mathbb{R}_+$ annehmen.

Das Volumen des zu beschreibenden Quaders lautet dann $V(x,y,z)=8xyz$ mit $x,y,z\in\mathbb{R}_+$.

Wir betrachten also die Funktion V unter der Zwangsbedingung von g, wobei

$$g(x,y,z)=\left(\tfrac{x}{a}\right)^2+\left(\tfrac{y}{b}\right)^2+\left(\tfrac{z}{c}\right)^2-1=0.$$

$$\begin{aligned}(dV\wedge dg)(x,y,z)&=8(yzdx+xzdy+xydz)\wedge\left(2x\left(\tfrac{1}{a}\right)^2dx+2y\left(\tfrac{1}{b}\right)^2dy+2z\left(\tfrac{1}{c}\right)^2dz\right)\\&=16\left(z\left(\left(\tfrac{y}{b}\right)^2-\left(\tfrac{x}{a}\right)^2\right)dx\wedge dy+x\left(\left(\tfrac{z}{c}\right)^2-\left(\tfrac{y}{b}\right)^2\right)dy\wedge dz+y\left(\left(\tfrac{x}{a}\right)^2-\left(\tfrac{z}{c}\right)^2\right)dz\wedge dx\right)\end{aligned}$$

Also sind die Gleichungen $z\left(\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)=0$, $x\left(\left(\frac{z}{c}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right)=0$, $y\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2\right)=0$

unter der Zwangsbedingung $g(x,y,z)=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2-1=0$ auszuwerten.

Für $x=0: z\left(\frac{y}{b}\right)^2=0,\ y\left(\frac{z}{c}\right)^2=0$ liefert dies die Stellen $(0,\pm b,0)$, $(0,0,\pm c)$. Ferner erhalten wir noch die Stelle $(\pm a,0,0)$. Diese scheiden jedoch aus, da das Volumen null ergibt. Bleiben noch die Differenzen auszuwerten. Keine der Koordinaten darf null werden, da sonst wieder das Volumen null wird. Folglich ist nur $x=\alpha a$, $y=\alpha b$ und $z=\alpha c$ möglich. In g eingesetzt liefert dies $3\alpha^2=1\Leftrightarrow\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, also die Stelle $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a,\frac{\sqrt{3}}{3}b,\frac{\sqrt{3}}{3}c\right)$, wobei der negative Wert nach Definition auszuschließen ist. Das maximale Volumen beträgt somit

$$V\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a,\frac{\sqrt{3}}{3}b,\frac{\sqrt{3}}{3}c\right)=8\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3abc=\left(\tfrac{8}{9}\right)\sqrt{3}abc.$$

9. Weiteres 3D-Problem

Gegeben ist ein Zylinder **Z** in $\mathbb{R}^3$ mit $Z(x,y,z)=x^2+z^2-25=0$.

Berechnung des minimalsten Abstandes zwischen $P(6,7,-8)$ und **Z**.

Lösung

Hier müssen die Tangentialflächen der zu bildenden Kugeln um den P und des Zylinders übereinstimmen. Es wird zwei Lösungen geben. Vor dem Zylinder und parallel dazu hinter dem Zylinder.

Funktion der Kugeln: $k(x,y,z)=(x-6)^2+(y-7)^2+(z+8)^2$ vom Radius $\sqrt{k(x,y,z)}$.

Aus $dk(x,y,z)=2(x-6)dx+2(y-7)dy+2(z+8)dz$ und $dZ(x,y,z)=2xdx+2zdz$. Folglich

$$
\begin{aligned}
(dk \wedge dZ)(x,y,z) &= 4\big((x-6)dx + (y-7)dy + (z+8)dz\big) \wedge (xdx + zdz) \\
&= 4\big([(z+8)x - (x-6)z]\,dz \wedge dx - (y-7)xdx \wedge dy + (y-7)zdy \wedge dz\big) \\
&= 4\big((8x-6z)dx \wedge dy - (y-7)xdx \wedge dy + (y-7)zdy \wedge dz\big)
\end{aligned}
$$

Wir erhalten $8x+6z=0$, $(y-7)x=0$ und $(y-7)z=0$ mit den Stellen $(x,z)=(0,0)$, widerspricht der Zwangsbedingung $Z(x,y,z)=x^2+z^2-25=0$, und $(3a,7,-4a)$. Eingesetzt in $Z(x,y,z)$ liefert $Z(3a,7,-4a)=9a^2+16a^2-25=0 \Leftrightarrow a^2=1 \Leftrightarrow a=\pm 1$. Folglich sind

$$k(3,7,-4)=9+16=25 \Rightarrow \sqrt{k(3,7,-4)}=5$$

das Minimum und damit der minimale Abstand 5 zwischen dem Punkt und vorderer Wand des Zylinders. Aus

$$k(-3,7,4)=81+144=225 \Rightarrow \sqrt{k(-3,7,4)}=15$$

folgt der maximale Abstand 15 zwischen Punkt und hinterer Wand des Zylinders.
Klar, der Zylinder besitzt einen Durchmesser von 10 LE.

10. Mehrere Zwangsbedingungen

Gesucht sind die Extrema der Funktion $f(x,y,z)=x+2y-z$ unter den Zwangsbedingungen (Nebenbedingungen) $g(x,y,z)=x^2+y^2-8=0$ und $h(x,y,z)=x+z-4=0$.

Lösung

$df(x,y,z)=dx+2dy-dz$, $dg(x,y,z)=2xdx+2ydy$ und $dh(x,y,z)=dx+dz$

Folglich ist $df=\lambda dg+\zeta dh \Leftrightarrow (1=2x\lambda+\zeta,\ 2=2y\lambda,\ -1=\zeta)$ oder

$$(df \wedge dg \wedge dh)(x,y,z)=(dx+2dy-dz)\wedge(2xdx+2ydy)\wedge(dx+dz)=0$$

auszuwerten.

Hier erzwingt die lineare Abhängigkeit das Verschwinden des Volumens (Determinantenform)

$$(df \wedge dg \wedge dh)(x,y,z)=4(y-x)dx\wedge dy\wedge dz=0 \Leftrightarrow x=y$$

$g(x,x,z)=2x^2-8=0 \Leftrightarrow x=2$ oder $x=-2$ sowie $h(x,x,z)=x+z-4=0 \Leftrightarrow z=4-x$ bringt $(2,2,2)$ sowie $(-2,-2,6)$. Folglich ist $f(-2,-2,6)=-2-4-6=-12$ das Minimum und $f(2,2,2)=4$ das Maximum.

Natürlich können in diesem einfachen Fall auch $f(x,y,4-x)=2x+2y-4$ und $g(x,y,z)=x^2+y^2-8=0$ betrachtet werden.

Literatur

Barner, M./Flohr, F.: Analysis II, de Gruyter Lehrbuch, ISBN 3 11 004692 X

Cartan, H.: Differentialrechnung, BI Wissenschaftsverlag, ISBN 3-411-01442-3

Maurin, K.: Analysis, part I: Elements, D. Reidel Publishing Company ,ISBN 90 277 0484 8

Reifen, H.-J./Trapp, H.: Einführung in die Analysis III, BI Hochschultaschenbücher, Band 787, ISBN 3-411-00787-7