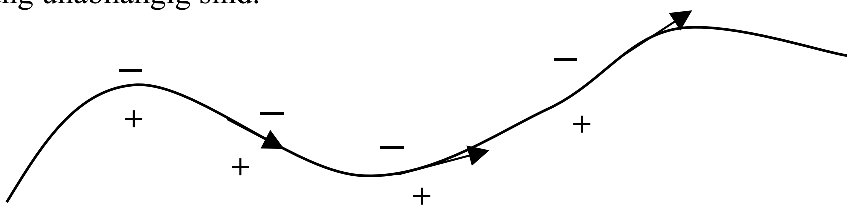
Innere und äußere (transversale) Orientierungen

Ein geometrisches Objekt $\mathscr{P}$ (ein Weg, eine Fläche) liege in einen höherdimensionalem geometrischen Objekt $\mathscr{K}$. $\mathscr{K}$ kann ein affiner Raum sein. Eine **innere Orientierungen** legt links, rechts oben, unten usw. in $\mathscr{P}$ selbst fest. Eine **äußere** oder **transversale Orientierung von** $\mathscr{P}$ gibt an, wie $\mathscr{P}$ in $\mathscr{K}$ liegt.

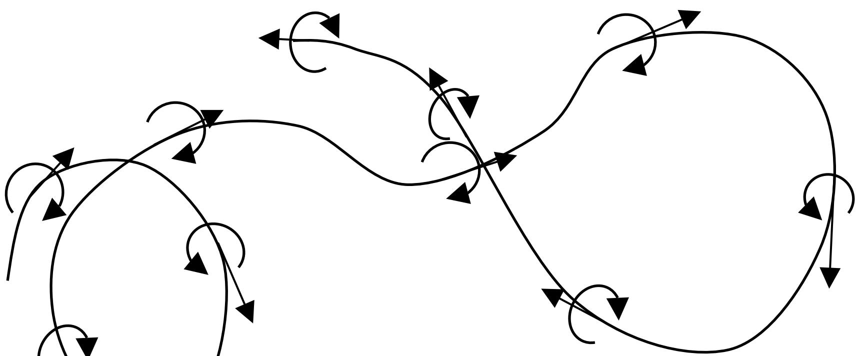
Beispiele:

1) Ein Weg $\mathscr{P}$ oder Steckenzug wird in eine Richtung durchlaufen. Damit wird eine innere Orientierung festgelegt. Hier gibt es zwei Möglichkeiten, vorwärts (**positiv**) oder rückwärts (**negativ**).

a) Der Weg verläuft in $\mathscr{K} = R^2$
Dann zerteilt der Weg die Ebene in zwei Teile. Die Festlegung, welche der Seiten positiv sein soll, ist willkürlich. Wir legen die transversale Orientierung wie folgt fest: Eine positive innere Orientierung wird rechts der Durchlaufrichtung positiv transversal orientiert. Folglich gibt es zwei transversale Orientierungen, die von der inneren Orientierung unabhängig sind.

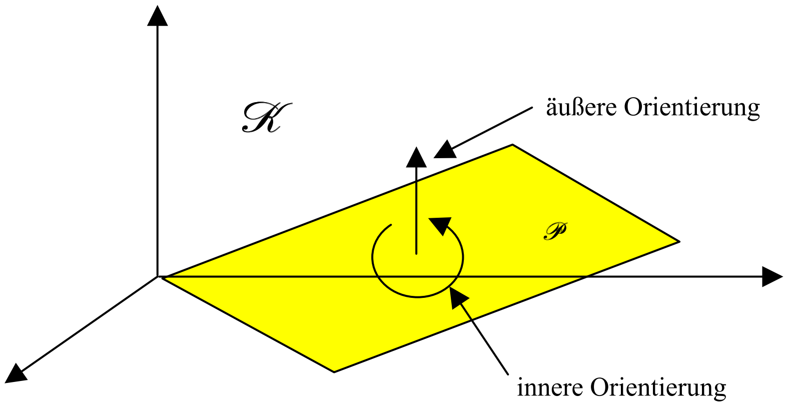


b) Der Weg $\mathscr{P}$ **verläuft im** $\mathscr{K} = R^3$
Hier wird eine positive transversale Orientierung durch eine Rechtsdrehung angegeben. Wird der Weg in positiver Richtung (innere Orientierung) durchlaufen, so soll der umgebende Raum durch eine Rechtsdrehung positiv orientiert sein (transversale Orientierung). Es gibt folglich zwei Möglichkeiten der transversalen Orientierung. Diese ist von der inneren Orientierung unabhängig.

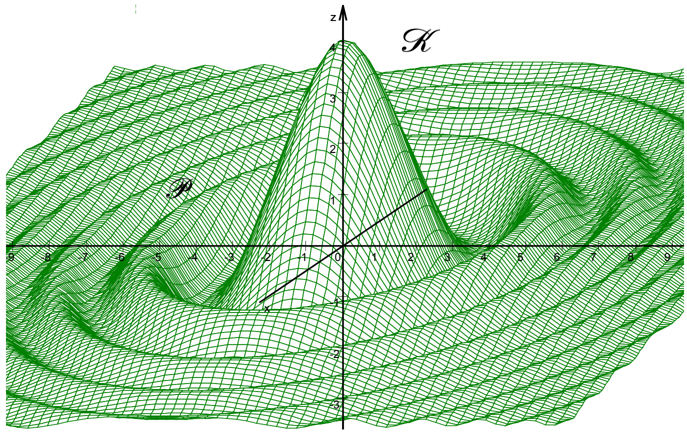


2) Eine Fläche $\mathscr{P}$ liegt in einen dreidimensionalem Raum $\mathscr{K} = R^3$**.** In der Fläche wird durch eine innere Orientierung festgelegt, wie man sich in der Fläche bewegen soll. Dies kann dadurch geschehen, indem man ein Koordinatensystem einführt. Auf welcher äußeren Seite der Fläche man sich befindet, wird durch die transversale Orientierung festgelegt. Wieder gibt es zwei, von der inneren Orientierung unabhängig, transversalen Orientierungen.

Eine Ebene.



Oder eine Fläche.



Die betrachteten Beispiele sind sicher einleuchtend. Wie können aber innere und transversale Orientierungen mathematisch beschrieben werden. Einer positiven Orientierung kann die Zahl +1, einer negativen Orientierung die Zahl –1 zugeordnet werden. Wie aber stets mit den Orientierungen?

Beginnen wir mit der **inneren Orientierung.**

1. **Die Einheitsstrecke**
   Die Einheitsstrecke wird durch das Intervall $[0;1]$ mit Anfang 0 und Ende 1 beschrieben. Wir legen eine positive Orientierung durch die Randpunkte fest. Bezeichnen wir mit ∂ die Randzuordnung (Randabbildung), kurz Rand. Wir legen fest:
   $$\partial[0;1] := \{1\} - \{0\},$$
   wobei $\{1\}$ der obere und $\{0\}$ der untere Punkt des Intervalls bedeuten. Die Strecke ist nun von 0 nach 1 positiv orientiert. Die Differenzschreibweise hat den Vorteil, dass nun die negative Orientierung durch $-\partial[0;1] := -(\{1\} - \{0\}) = \{0\} - \{1\}$ gegeben ist. Sie unterscheiden sich folglich durch ein –zeichen.
2. **Das Einheitsquadrat**
   Das Einheitsquadrat wird durch $\{(x;y) \mid x \in [0;1] \quad \wedge \quad y \in [0;1]\}$ beschrieben. Hierfür schreiben wir $[0;1]\times[0;1]$. Der Rand wird wie folgt positiv definiert:
   $$\begin{aligned}\partial([0;1]\times[0;1]) &= \partial[0;1]\times[0;1] - [0;1]\times\partial[0;1]\\ &= \{1\}\times[0;1] - \{0\}\times[0;1] - ([0;1]\times\{1\} - [0;1]\times\{0\}\end{aligned}$$

Es wird hier **links** und **rechts** sowie **oben** und **unten** festgelegt. Dies ist die positive Orientierung. Die negative Orientierung ist dann

$$\begin{aligned}-\partial([0;1]\times[0;1]) &= -(([0;1]\times\{0\})-([0;1]\times\{1\})+(\{1\}\times[0;1])-(\{0\}\times[0;1]))\\ &= ([0;1]\times\{1\})-([0;1]\times\{0\})+(\{0\}\times[0;1])-(\{1\}\times[0;1])\end{aligned}$$

Wieder unterscheiden sich die Orientierungen durch ein –zeichen.

3. **Der Einheitswürfel**

Der Einheitswürfel ist durch die Menge aller Punkte $(x;y;z)\in[0;1]\times[0;1]\times[0;1]$ beschreibbar. Wir beschreiben die positive Orientierung des Randes.

$$\begin{aligned}\partial([0;1]\times[0;1]\times[0;1]) &:= (\partial[0;1]\times[0;1]\times[0;1])-([0;1]\times\partial[0;1]\times[0;1])+([0;1]\times[0;1]\times\partial[0;1])\\ &= (\{1\}\times[0;1]\times[0;1])-(\{0\}\times[0;1]\times[0;1])\\ &\quad-([0;1]\times\{1\}\times[0;1])+([0;1]\times\{0\}\times[0;1])\\ &\quad+([0;1]\times[0;1]\times\{1\})-([0;1]\times[0;1]\times\{0\})\end{aligned}$$

Auch hier unterscheiden sich die Orientierungen durch ein –zeichen. Beim Einheitswürfel wird zu **links** und **rechts** sowie **oben** und **unten** auch **hinten** und **vorne** festgelegt.

4. **Der Einheitspunkt**

Der Einheitspunkt ist durch $\{0\}$ festgelegt. Da ein Punkt keinen Rand hat, sagen wir: Der Rand eines Punktes ist leer. Wir schreiben dafür $\partial\{0\}=\partial\{1\}=0$.

5. **Der Rand des Randes**

Ein zugeordneter Rand ist geschlossen. Deshalb ist der Rand des Randes leer oder jeder Punkt des Randes ist Anfang und Ende zugleich.
Nun folgt formal:

$$\partial\partial[0;1]:=\partial(\{1\}-\{0\})=\partial\{1\}-\partial\{0\}=0$$

$$\begin{aligned}\partial\partial([0;1]\times[0;1]) &= \partial(\{1\}\times[0;1]-\{0\}\times[0;1]-([0;1]\times\{1\}-[0;1]\times\{0\})\\ &= \{1\}\times\partial[0;1]-\{0\}\times\partial[0;1]-\partial[0;1]\times\{1\}+\partial[0;1]\times\{0\}\\ &= \{1\}\times\{1\}-\{1\}\times\{0\}-\{0\}\times\{1\}+\{0\}\times\{0\}-\{1\}\times\{1\}+\{0\}\times\{1\}+\{1\}\times\{0\}-\{0\}\times\{0\}\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial\partial([0;1]\times[0;1]\times[0;1]) &= \partial(\{1\}\times[0;1]\times[0;1])-\partial(\{0\}\times[0;1]\times[0;1])\\ &\quad-\partial([0;1]\times\{1\}\times[0;1])+\partial([0;1]\times\{0\}\times[0;1])\\ &\quad+\partial([0;1]\times[0;1]\times\{1\})-\partial([0;1]\times[0;1]\times\{0\})\\ &= (\{1\}\times\{1\}\times[0;1])-(\{1\}\times\{0\}\times[0;1])-(\{1\}\times[0;1]\times\{1\})+(\{1\}\times[0;1]\times\{0\})\\ &\quad-(\{0\}\times\{1\}\times[0;1])+(\{0\}\times\{0\}\times[0;1])+(\{0\}\times[0;1]\times\{1\})-(\{0\}\times[0;1]\times\{0\})\\ &\quad-(\{1\}\times\{1\}\times[0;1])+(\{0\}\times\{1\}\times[0;1])+([0;1]\times\{1\}\times\{1\})-([0;1]\times\{1\}\times\{0\})\\ &\quad+(\{1\}\times\{0\}\times[0;1])-(\{0\}\times\{0\}\times[0;1])-([0;1]\times\{0\}\times\{1\})+([0;1]\times\{0\}\times\{0\})\\ &\quad+(\{1\}\times[0;1]\times\{1\})-(\{0\}\times[0;1]\times\{1\})-([0;1]\times\{1\}\times\{1\})+([0;1]\times\{0\}\times\{1\})\\ &\quad-(\{1\}\times[0;1]\times\{0\})+(\{0\}\times[0;1]\times\{0\})+([0;1]\times\{1\}\times\{0\})-([0;1]\times\{0\}\times\{0\})\\ &= 0\end{aligned}$$

Die Randabbildung ist ohne große Erklärung eingeführt worden, da sie sich selbst erklärt. Die Einzelbestandteile des Randes kann als Erzeugendensystems eines „Vektorraumes“ über den ganzen Zahlen aufgefasst werden. Natürlich kann auch ein Dreieck statt eines Quadrates und ein Tetraeder statt eines Würfels betrachtet werden. Die nachfolgenden Gedankengänge werden aber komplizierter in der Schreibweise.

Präzisieren wir unsere Überlegungen.

Definition 1:

1. Es sei $W^n := \prod_{i=1}^{n}[0;1]$ der **n-Einheitswürfel** im R^n. Es sei $W^0 := \{0\}$. Es sei $I^n := id_{R^n} \mid W^n$, $I^n(x) = x$ für $x \in W^n$. I^n heißt **n-Würfel**.

2. $I^n(x_1;\ldots;\underset{\textbf{i-te Stelle}}{0};\ldots x_n)$ heißt $(i,0)$-te Seite und $I^n(x_1;\ldots;\underset{\textbf{i-te Stelle}}{1};\ldots x_n)$ heißt $(i,1)$-te Seite des Würfels W^n.

3. Durch

$$I^n_{(i;\boldsymbol{\alpha})}:\begin{cases} W^{n-1} & \to & W^n \\ (x_1;\ldots;x_{n-1}) & \mapsto & (x_1;\ldots;\underset{\textbf{i-te Stelle}}{\boldsymbol{\alpha}};\ldots;x_{n-1}) \end{cases},\quad \boldsymbol{\alpha} \in \{0;1\}$$

werden zwei $(n-1)$-Würfel $I^n_{(i,0)}, I^n_{(i,1)}$ (die Seiten des n-Würfels) in den n-Würfel eingebettet.

4. Es sei $C_n(W^n)$ der „Vektorraum“ über **Z** (freier **Z**-Modul genannt), der von I^n erzeugt wird. $C_{n-1}(W^n)$ sei der freie **Z**-Modul, der zusätzlich alle $I^n_{(i,0)}, I^n_{(i,1)}$ enthält. Wir definieren

$$\partial_n:\begin{cases} C_n(W^n) \to & C_{n-1}(W^n) \\ I^n \quad \mapsto & \partial_n I^n \quad := \sum_{i=1}^{n}\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\{0;1\}}(-1)^{i+\boldsymbol{\alpha}} I^n_{(i,\boldsymbol{\alpha})} \end{cases}$$

als den Rand des n-Würfels I^n. Entsprechend definieren wir $C_m(W^n)$ als den freien **Z**-Modul aller Einbettungen aller m-Würfel in den n-Würfel.

Satz 1:
Es sei I^n der n-Würfel. Dann gilt $\partial_{n-1}(\partial_n I^n)) = 0$.
Beweis:

$$\begin{aligned}\partial_{n-1}(\partial_n I^n)) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\{0;1\}}(-1)^{i+\boldsymbol{\alpha}}\partial_{n-1}(I^n_{(i;\boldsymbol{\alpha})}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\{0;1\}}(-1)^{i+\boldsymbol{\alpha}}\Big(\sum_{\substack{j=1\\ J\neq i}}^{n}\sum_{\boldsymbol{\beta}\in\{0;1\}}(-1)^{j+\boldsymbol{\beta}}(I^n_{(i;\boldsymbol{\alpha})})_{(j;\boldsymbol{\beta})}\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\{0;1\}}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sum_{\boldsymbol{\beta}\in\{0;1\}}(-1)^{i+j+\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}(I^n_{(i;\boldsymbol{\alpha})})_{(j;\boldsymbol{\beta})}\end{aligned}$$

Halten wir ein $i < j$ fest, so ist

$$(I^n_{(i;\boldsymbol{\alpha})})_{(j;\boldsymbol{\beta})}(x_1;\ldots;x_{n-2}) = (x_1;\ldots:\underset{i-teStelle}{\boldsymbol{\alpha}};\ldots;\underset{j-teStelle}{\boldsymbol{\beta}};\ldots;x_{n-2})$$

und

$$(I^n_{(j;\boldsymbol{\alpha})})_{(i;\boldsymbol{\beta})}(x_1;\ldots;x_{n-2}) = (x_1;\ldots:\underset{i-teStelle}{\boldsymbol{\alpha}};\ldots;\underset{(j-1)-teStelle}{\boldsymbol{\beta}};\ldots;x_{n-2}).$$

Folglich ist

$$(I^n_{(i;\boldsymbol{\alpha})})_{(j;\boldsymbol{\beta})}(x_1;\ldots;x_{n-2}) = (I^n_{(j+1;\boldsymbol{\alpha})})_{(i;\boldsymbol{\beta})}(x_1;\ldots;x_{n-2})$$

und damit

$$(-1)^{i+j+\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}(I^n_{(i;\boldsymbol{\alpha})})_{(j;\boldsymbol{\beta})} + (-1)^{i+j+1+\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}(I^n_{(j+1;\boldsymbol{\alpha})})_{(i;\boldsymbol{\beta})} = 0.$$

Verifizieren Sie die bisher gegebene Definition und den Satz für den 1-, 2- und 3-Würfel und vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Eingangs gegebenen geometrischen Überlegungen.

Definition 1 (Fortsetzung**):**

5. Ein **singulärer n-Würfel** ist eine ist eine stetig differenzierbare Abbildung

$$c^n : \begin{cases} W^n \to & M \\ x & \mapsto c^n(x), \end{cases}$$

wobei $M \subseteq R^m, n \leq m$ und $c^n \mid (W^n - \partial W^n)$ injektiv ist.

Es bezeichne $C_m(M)$ den **Z**-Modul aller singulären n-Würfel. Ein $c \in C_m(M)$ heißt **m-Kette**.

Es sei $c^n_{(i,\alpha)} := c \circ I^n_{(i,\alpha)}$ und $\partial_n c := \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha \in \{0;1\}} (-1)^{i+\alpha} c^n_{(i,\alpha)}$. Für jede m-Kette c^m gilt $\partial_{m-1}(\partial_m(c^m) = 0$.

Dies folgt unmittelbar aus $\partial_{m-1}(\partial_m I^m)) = 0$.

Beispiel 1:

Es sei $c : W^3 \to R^3$ definiert durch $c(s;t;u) := (s\sin(t\boldsymbol{\pi})\cos(2\boldsymbol{\pi}u); s\sin(t\boldsymbol{\pi})\sin(2\boldsymbol{\pi}u); s\cos(t\boldsymbol{\pi}))$. c ist folglich ein singulärer 3-Würfel im R^3. $c(W^3)$ ist die abgeschlossene Kugel mit Radius s. Ferner sind

$$I_{(1;0)}(x;y) = (0;x;y),\ I_{(1;1)}(x;y) = (1;x;y),\ I_{(2;0)}(x;y) = (x;0;y),$$
$$I_{(2;1)}(x;y) = (x;1;y),\ I_{(3;0)}(x;y) = (x;y;0),\ I_{(3;1)}(x;y) = (x;y;1).$$

Hieraus erhalten wir die singulären Seiten

$$c_{(1;0)}(x;y) = c(I_{(1;0)}(x;y)) = c(0;x;y) = (0;0;0),$$
$$c_{(1;1)}(x;y) = c(I_{(1;1)}(x;y)) = c(1;x;y) = (\sin(x\boldsymbol{\pi})\cos(2\boldsymbol{\pi}y); \sin(x\boldsymbol{\pi})\sin(2\boldsymbol{\pi}y); \cos(x\boldsymbol{\pi}))$$
$$c_{(2;0)}(x;y) = c(I_{(2;0)}(x;y)) = c(x;0;y) = (0;0;x),$$
$$c_{(2;1)}(x;y) = c(I_{(2;1)}(x;y)) = c(x;1;y) = (0;0;-x),$$
$$c_{(3;0)}(x;y) = c(I_{(3;0)}(x;y)) = c(x;y;0) = (x\sin(y\boldsymbol{\pi});0;x\cos(y\boldsymbol{\pi})),$$
$$c_{(3;1)}(x;y) = c(I_{(3;1)}(x;y)) = c(x;y;1) = (x\sin(y\boldsymbol{\pi});0;x\cos(y\boldsymbol{\pi})).$$

Der Rand ist folglich

$$\begin{aligned}(\partial_3 c)(x;y) &= c_{(1;1)}(x;y) + 2c_{(2;0)}(x;y) \\ &= (\sin(x\boldsymbol{\pi})\cos(2\boldsymbol{\pi}y); \sin(x\boldsymbol{\pi})\sin(2\boldsymbol{\pi}y); \cos(x\boldsymbol{\pi})) + 2(0;0;x) \\ &= (\sin(x\boldsymbol{\pi})\cos(2\boldsymbol{\pi}y); \sin(x\boldsymbol{\pi})\sin(2\boldsymbol{\pi}y); \cos(x\boldsymbol{\pi}) + 2x).\end{aligned}$$

Wir geben noch eine geometrische Interpretation der Vorgänge.
Der singuläre n-Würfel c verklebt die Seiten des n-Würfels richtig zu den Seiten des singulären n-Würfels zusammen. Zusätzlich treten weitere Klebestellen auf, da wir die Abbildung c nicht vom Zentrum des n-Würfels definiert ist. c deformiert ganze Seiten des n-Würfels auf eine Strecke bzw. auf einen Punkt.
Die Seiten des singulären n-Würfels stimmen bis auf einer Menge mit dem Maß null überein.

Beispiel 2:

Es sei $c : W^2 \to R^4$ definiert durch $c(s;t) := (t\sin(s\boldsymbol{\pi}); t\cos(s\boldsymbol{\pi}); st; s-t)$. c ist folglich ein singulärer 2-Würfel im R^4. Das Bild $c(W^2)$ ist eine parametrisierte Fläche.
Die Seiten des 2-Würfels sind

$$I_{(1;0)}(x) = (0;x),\ I_{(1;1)}(x) = (1;x),\ I_{(2;0)}(x) = (x;0),\ I_{(2;1)}(x) = (x;1).$$

Hieraus erhalten wir

$$c_{(1;0)}(x) = (0;x;0;-x)\,,\ c_{(1;1)}(x) = (0;-x;x;1-x)\,,\ c_{(2;0)}(x) = (0;0;0;x)\,,$$
$$c_{(2;1)}(x) = (\sin(x\boldsymbol{\pi});\cos(x\boldsymbol{\pi});x;x-1)\,.$$

Folglich ist

$(\partial_2 c)(x) = (0;-2x;x;1+x) - (\sin(x\boldsymbol{\pi});\cos(x\boldsymbol{\pi});x;x-1) = (-\sin(x\boldsymbol{\pi});-2x-\cos(x\boldsymbol{\pi});0;2)$.

Beispiel 3: (n-fach getwistetes Band)

Es sei $c: W^2 \to R^3$ definiert durch $c(x;y) := (x;(y-0{,}5)\sin(n\boldsymbol{\pi}x);(y-0{,}5)\cos(n\boldsymbol{\pi}x))$.

Dann sind

$$c_{(1;0)}(x) = c(0;x) = (0;0;x-0{,}5)\,,\ c_{(2;0)}(x) = c(x;0) = (x;-0{,}5\sin(n\boldsymbol{\pi}x);-0{,}5\cos(n\boldsymbol{\pi}x))\,,$$
$$c_{(1;1)}(x) = c(1;x) = (1;0;(x-0{,}5)\cos(n\boldsymbol{\pi}))\,,\ c_{(2;1)}(x) = c(x;1) = (x;0{,}5\sin(n\boldsymbol{\pi}x);0{,}5\cos(n\boldsymbol{\pi}x))\,.$$

Die Randfunktion lautet

$$\partial c(x) = (1;-\sin(n\boldsymbol{\pi}x);(x-0{,}5)(\cos(n\boldsymbol{\pi})-1)-\cos(n\boldsymbol{\pi}x))\,.$$

Beispiel 4: (Das Möbius-Band)

Es sei $c: W^2 \to R^3$ definiert durch $c(x;y) := (x;(y-0{,}5)\sin(n\boldsymbol{\pi}x);(y-0{,}5)\cos(n\boldsymbol{\pi}x))$.

Dann sind

$$c_{(1;0)}(x) = c(0;x) = (0;0;x-0{,}5)\,,\ c_{(2;0)}(x) = c(x;0) = (x;-0{,}5\sin(n\boldsymbol{\pi}x);-0{,}5\cos(n\boldsymbol{\pi}x))\,,$$
$$c_{(1;1)}(x) = c(1;x) = (1;0;(x-0{,}5)\cos(n\boldsymbol{\pi}))\,,\ c_{(2;1)}(x) = c(x;1) = (x;0{,}5\sin(n\boldsymbol{\pi}x);0{,}5\cos(n\boldsymbol{\pi}x))\,.$$

Die Randfunktion lautet

$\partial c(x) = (1;-\sin(n\boldsymbol{\pi}x);(x-0{,}5)(\cos(n\boldsymbol{\pi})-1)-\cos(n\boldsymbol{\pi}x))$.

Der singuläre n-Würfel c verklebt die Seiten des n-Würfels richtig zu den Seiten des singulären n-Würfels zusammen. Zusätzlich treten weitere Klebestellen auf, da wir die Abbildung c nicht vom Zentrum des n-Würfels definiert ist. c deformiert ganze Seiten des n-Würfels auf eine Strecke bzw. auf einen Punkt.
Die Seiten des singulären n-Würfels stimmen bis auf einer Menge mit dem Maß null überein.