Zum Theorem von Feit-Higman

Gert Hillebrandt

Abstrakt: Nach langer Zeit habe ich mich entschlossen einen Beweis meines Habilitationsvortrages aus dem Jahre 1990 vorzustellen. In diesem Beweis geht es um die Nichtexistenz einiger verallgemeinerter *n*-Ecke ohne Darstellungstheorie. Er kann auf beliebige Geometrien verallgemeinert werden. Der Beweis benutzt nur elementare Kenntnisse der linearen Algebra. Diese sind:

1. Der freie $\mathbf{K}$ -Vektorraum bezüglich einer beliebigen Menge (hier endlich).

2. Der $\mathbf{K}$ -Vektorraum als $\mathbf{K}[X]$ -Modul und die Zerlegungssätze bezüglich des Minimalpolynoms.

3. Ist $\mu_\alpha = (X-\lambda)^{r_\lambda} p_\lambda$ das Minimalpolynom mit $p_\lambda(\lambda) \neq 0$ und ist $E_\alpha(\lambda)$ der verallgemeinerte Eigenraum von α bezüglich des Eigenwertes λ, so gilt die Beziehung

$$\operatorname{spur}\left(p_\lambda(\alpha)\right) = p_\lambda(\lambda) \cdot \dim_{\mathbf{K}}\left(E_\alpha(\lambda)\right).$$

Damit werden folgende Beweise erbracht:

1. Es sei Γ ein verallgemeinertes Dreieck.
Gibt es eine Polarität π, so ist $\sqrt{s} \in \mathbf{Z}$.

2. Es sei Γ ein verallgemeinertes Viereck der Ordnung (s,t).
Gestattet Γ eine Polarität π, also $s=t>1$, so ist $\sqrt{2s} \in \mathbf{Z}$.

3. Es sei Γ ein verallgemeinertes Sechseck der Ordnung (s,t). Dann ist $\sqrt{st} \in \mathbf{Z}$.
Ist $s=t>1$, so existiert keine Polarität π, da $\sqrt{s}, \sqrt{3s} \in \mathbf{Z}$.

4. Es sei Γ ein verallgemeinertes Achteck der Ordnung (s,t). Dann ist $\sqrt{2st} \in \mathbf{Z}$.
Ist $s=t>1$, so existiert keine Polarität π, da $\sqrt{2s}, \sqrt{s\left(2+\sqrt{2}\right)}, \sqrt{s\left(2-\sqrt{2}\right)} \in \mathbf{Z}$.

5. Es sei Γ ein verallgemeinertes Zwölfeck der Ordnung (s,t).
Für $s=t>1$ existiert kein verallgemeinertes Zwölfeck, da $\sqrt{st} \in \mathbf{Z}$, $\sqrt{3st} \in \mathbf{Z}$.

Keywords: Inzidenzstrukturen, endliche Geometrien, Darstellungstheorie, Algebra

Das Theorem von ***Feit-Higman 1964*** gibt Auskunft darüber, unter welchen Bedingungen endliche verallgemeinerte n-Ecke höchstens existieren können.

Die verallgemeinerten n-Ecke bilden eine wichtige Klasse innerhalb der Geometrien. Sie sind, salopp gesagt, dadurch gekennzeichnet, dass jeder kürzeste geschlossene, aber nicht konstante Weg einem Umlauf in einem gewöhnlichen n-Eck entspricht. Echte verallgemeinerte n-Ecke zeichnen sich dadurch aus, dass durch jeden Punkt mindestens drei Geraden gehen und auf jeder Geraden mindestens drei Punkte liegen.

Wir wollen dieses präzisieren:

Definition 1:
Eine ***Geometrie*** Γ ***vom Rang n*** ist eine Auswahl paarweiser disjunkter Mengen

$$\Omega_1, \ldots, \Omega_n$$

versehen mit einer ***symmetrischen*** und ***reflexiven*** Relation ***I*** auf $\Omega := \coprod_{i=1}^{n} \Omega_i$ für die $I \mid \Omega_i \times \Omega_i = \mathrm{Id}$ für alle $1 \le i \le n$ gilt.

Eine Geometrie heißt ***endlich***, wenn Ω nur endlich viele Elemente enthält.

Bemerkung:
Alternativ kann auch Ω zusammen mit einer Abbildung $\pi : \Omega \to \{1, \ldots, n\}$ betrachtet werden. $x \in \Omega$ heißt vom ***Typ*** i, wenn $\pi(x) := i$, für $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist. Dann ist $\Omega_i := \pi^{-1}(i)$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Um in einer Geometrie „herumlaufen" zu können, bedarf es Wege.

Definition 2:
Ein ***Weg*** von $x \in \Omega$ nach $y \in \Omega$ der ***Länge n*** ist eine Folge $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ in Ω mit $x_{i-1}\, I\, x_i$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Der Weg $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ heißt ***reduzibel***, wenn es einen echt kürzeren Weg von x nach y gibt.

Ein nicht reduzibler Weg heißt ***irreduzibel***.

Wir definieren einen ***Abstand*** d auf Ω durch $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ und $d(x,y) = k$, wenn ein irreduzibler Weg der Länge k existiert, der x und y verbindet.

Die einfachsten, wenn auch nicht die leichtesten, sind Geometrien vom Rang 2. Die Elemente von Typ 1 heißen einfach Punkte und Elemente vom Typ 2 einfach Geraden.

Unter diese Geometrien fallen die verallgemeinerten n-Ecke.

Definition 3:
Ein ***verallgemeinertes n-Eck*** ist eine Geometrie vom Rang 2 mit folgenden Eigenschaften.

1. Je zwei Elemente sind durch einen Weg der Länge $m \le n$ verbunden.
2. Sind zwei Elemente durch einen irreduziblen Weg der Länge $k < n$ verbunden, so ist dieser Weg eindeutig.
3. Zu jedem Element x existiert ein Element y, das über einen irreduziblen Weg der Länge n verbunden mit x sind.

Ein verallgemeinertes n-Eck heißt ***regulär*** oder von ***der Ordnung*** (s,t), wenn mit jedem Punkt genau $t+1$ Geraden und mit jeder Gerade genau $s+1$ Punkte inzidieren.

Die Konstanten s und t heißen auch ***Parameter*** des verallgemeinerten n-Ecks.

Indem wir in einem verallgemeinerten n-Eck der Ordnung (s,t) die Punkte in Geraden und die Geraden in Punkte umbenennen, erhalten wir ein verallgemeinerten n-Eck der Ordnung (t,s). Deshalb dürfen wir uns auf $s \le t$ beschränken.

Diese Begriffsbildung geht auf ***Tits 1959*** zurück. Hierbei verfolgte Tits eine geometrische Interpretation von halbeinfachen Lie-Gruppen, wie er selbst sagt. Alle wichtigen Ergebnisse dieser Forschungsarbeiten hat ***Tits 1974*** in seinem Buch: Buildings of Spherical Type and finite *BN*-Pairs zusammengefasst.

Bemerkung:
Ein verallgemeinertes Dreieck der Ordnung (s,s) ist eine projektive Ebene der Ordnung s. Bis zu diesem Zeitpunkt waren meines Erachtens nur die projektiven Ebenen und die Lie-Geometrien bekannt. Siehe ***Pickert 1955*** und ***Tits 1974***.

Mit der Definition kann die Anzahl der Punkte und die der Geraden eines endlichen verallgemeinerten n-Ecks der Ordnung (s,t) bestimmt werden.

Lemma 4:
Es sei Γ ein verallgemeinertes n-Eck der *Ordnung* (s,t). Dann gilt

$$|\Omega_1|(t+1)=|\Omega_2|(s+1).$$

Beweis:
Wir zählen die Kammern auf zwei Weisen. Zu jedem Punkt gibt es $t+1$ inzidierende Geraden. Dies liefert $|\Omega_1|(t+1)$ Kammern. Andererseits inzidieren mit jeder Geraden $s+1$ Punkte. Dies liefert $|\Omega_2|(s+1)$ Kammern. Daraus folgt die Behauptung. $\Diamond$

Satz 5:
Es sei Γ ein verallgemeinertes n-Eck der Ordnung (s,t). Bezeichne $|\Omega_1|$ die Anzahl der Punkte und $|\Omega_2|$ die Anzahl der Geraden. Dann gilt:

$$|\Omega_1|=(s+1)\sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}}(st)^i,\ \text{falls } n \text{ gerade},$$

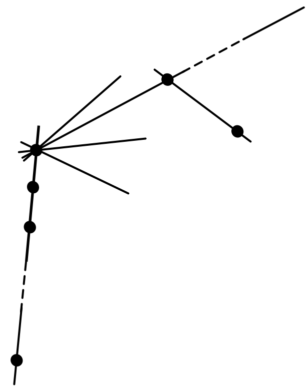
$$|\Omega_2|=(t+1)\sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}}(st)^i,\ \text{falls } n \text{ gerade},$$

$$|\Omega_1|=|\Omega_2|=\sum_{i=0}^{n-1}s^i,\ \text{falls } n \text{ ungerade}.$$

Insbesondere sind für ungerades n die Parameter gleich, also $s=t$.

Beweis:
Nach Definition 3 ist jeder irreduzible Weg der Länge $n-1$ eindeutig bestimmt. Wir unterscheiden gerades und ungerades *n*.

n ist ***gerade***:



Beginnen wir an einer Geraden zu zählen, so haben alle Punkte höchstens einen Abstand der Länge $n-1$. Sonst würde sich der Abstand um 2 erhöhen, was unmöglich ist.
Alle $s+1$ Punkte auf der Ausgangsgeraden haben den Abstand 1. Durch jeden dieser Punkte gehen weitere t Geraden, auf denen jeweils weitere s Punkte liegen. Folglich haben wir $s+1$ Punkte vom Abstand 1, $(s+1)st$ Punkte vom Abstand 3, usw. $(s+1)(st)^{\frac{n-2}{2}}$ Punkte vom Abstand $n-1$. Dies ist offensichtlich (Induktion), da von jedem Punkt st neue Punkte hinzukommen. Summieren aller Punkte zeigt $|\Omega_1|$. Vertauschen wir Punkte und Geraden, so erhalten wir $|\Omega_2|$.

n ist ***ungerade***:
Hier beginnen wir von einem Punkt aus zu zählen. Wir finden $s(t+1)$ Punkte vom Abstand 2. Für jeden dieser Punkte finden wir st Punkte vom Abstand 4. Fortfahrend finden wir letztendlich weitere $(st)^{\frac{n-3}{2}}$ Punkte vom Abstand n. Insgesamt erhalten wir

$$1+s(t+1)\sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}}(st)^i \text{ Punkte.}$$

Vertauschen wir wieder Punkte und geraden so erhalten wir

$$1+t(s+1)\sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}}(st)^i \text{ Geraden.}$$

Nach Lemma 4 ist aber $|\Omega_1|(t+1)=|\Omega_2|(s+1)$. Folglich gibt es

$$t+1+s(t+1)^2\sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}}(st)^i = s+1+t(s+1)^2\sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}}(st)^i$$

Kammern. Wegen

$$t-s+\left[s(t+1)^2-t(s+1)^2\right]\sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}}(st)^i=0 \Leftrightarrow (t-s)st\sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}}(st)^i=0$$

und $s>0,\, t>0$ folgt schließlich $s=t$. Insbesondere erhalten wir

$$1+s(s+1)\sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}}s^{2i}=\sum_{i=0}^{n-1}s^i$$

Damit ist die Behauptung vollständig bewiesen. ◊

W. Feit und ***G. Higman*** bewiesen ***1964*** folgendes Theorem:

Es sei Γ ein endliches verallgemeinertes n-Eck der Ordnung (s,t). Dann ist entweder $s=1=t$, und Γ ist ein ordinäres n-Eck, oder $n\in\{2,3,4,6,8,12\}$. Sind $s>1$ und $t>1$, so ist $n\in\{2,3,4,6,8\}$. Ferner ist st ein Quadrat für $n=6$ und $2st$ ein Quadrat für $n=8$. ◊

Dieses Theorem wurde mittels anderer Methoden wiederholt von ***Kilmoyer-Solomon 1971***, ***Biggs 1974*** und ***D.G. Higman 1975*** bewiesen.

Da es zu jeder natürlichen Zahl n ein gewöhnliches n-Eck gibt, liefert dieses Theorem eine sehr starke Einschränkung, wann überhaupt dicke n-Ecke der Ordnung (s,t) existieren können.

Tits bemerkte hierzu, dass auf die Voraussetzung der Parameter des verallgemeinerten n-Ecks nicht verzichtet werden kann und dass unendliche verallgemeinerte n-Ecke für jedes $n>1$ existieren. ***Tits*** gab hierzu eine freie Konstruktion an.

Ist Γ ein verallgemeinertes n-Eck, so erhalten wir ein verallgemeinertes $2n$-Eck wie folgt: Wir definieren als neue Punkte die alten Punkte und die alten Geraden und als neue Geraden die Kammern. Die Inzidenz ist offensichtlich.

Wir wollen uns nun die Beweise etwas näher anschauen und einige Bemerkungen dazu machen. Bei Feit und Higman geht die Inzidenzmatrix A in die Untersuchung ein. Die Spalten werden als Punkte und die Zeilen als Geraden angesehen. Inzidiert nun ein Punkt mit einer Geraden, so steht an der Stelle in der Matrix eine 1, sonst 0. Nun wird die symmetrische Matrix $M=AA^t$ bzw. $N=A^tA$ und deren Potenzen studiert. Dies geschieht rein geometrisch, denn in M können die i. Spalte und i. Zeile als ein Punkt der Geometrie angesehen werden. Der Eintrag ist dann die Anzahl der Geraden, die durch diese beiden Punkte gehen.

Kilmoyer und ***Solomon*** gaben ***1971*** einen Beweis mittels Darstellungstheorie an. Die Algebra, die zum Beweis herangezogen wurde, war für Gruppen mit BN-Paaren bekannt. Es ist die Hecke-Algebra, eine Unteralgebra der Endomorphismenalgebra $End_{\mathbf{C}}(V)$, wobei V der durch die Menge der Kammern freie erzeugte **C**-Vektorraum ist. Die irreduziblen Darstellungen vom Grade 2 lieferten mittels der Charaktere das Ergebnis.

Ist $\{A,a\}$ eine Kammer, so wird die Hecke-Algebra erzeugt von

$$\sigma(\{A,a\})=\sum_{\substack{B\,I\,a\\ B\neq A}}\{B,a\},\qquad\qquad \tau(\{A,a\})=\sum_{\substack{A\,I\,b\\ b\neq a}}\{A,b\}.$$

Insbesondere gelten die Gleichungen

$$\sigma^2=s\cdot 1_{\Omega_1}+(s-1)\sigma,\qquad\qquad \tau^2=t\cdot 1_{\Omega_2}+(t-1)\tau$$

$$(\sigma\tau)^m=(\tau\sigma)^m,\ \text{falls}\ n=2m,\qquad\qquad (\sigma\tau)^m\sigma=(\tau\sigma)^m\tau,\ \text{falls}\ n=2m+1.$$

Diese Gleichungen zeigen auch den Zusammenhang zur Inzidenzmatrix und deren Transponierten.

Die Beweise von Biggs und Higman benutzen entweder den Inzidenzgraphen (Punkte und Geraden der Geometrie sind die Punkte des Graphen und zwei Punkte sind verbunden, wenn sie inzidieren) oder den Punktgraphen (nur die Punkte der Geometrie sind die Punkte des Graphen und zwei Punkte sind verbunden, wenn sie eine Gerade gemeinsam haben) der Geometrie. Also die kommutative Verbindungsalgebra (Biggs) oder die nichtkommutative Nachbarschaftsalgebra (Higman). Es sind daher auch algebraische Beweise.

Payne zeigte ***1968,*** dass ein verallgemeinertes Viereck der Ordnung *s* höchstens dann eine Polarität zulässt, wenn 2s ein Quadrat ist.

Im Jahre ***1971*** bewies ***D. G. Higman*** für verallgemeinerte Vierecke der Ordnung (s,t), $s,t>1$ die Ungleichung

$$t<s^2$$

und ***1974*** für verallgemeinerte Achtecke der Ordnung (s,t) mit $s,t>1$ die Ungleichung

$$t<s^2.$$

Cameron gab ***1975*** für verallgemeinerte Vierecke einen kombinatorischen Beweis dieser Ungleichung.

Erst ***1979*** zeigten ***Haemers und Ross*** eine solche Ungleichung für verallgemeinerte Sechsecke:

$$t<s^3.$$

Zum Beweis dieser Ungleichungen wurde wieder entweder der Punktgraph oder der Inzidenzgraph untersucht.

Ähnlich folgerte ***Ott 1982*** mit diesen Methoden:

Es sei Γ ein verallgemeinertes Sechseck der Ordnung *s*. Es existiert höchstens dann eine Polarität, wenn 3*s* ein Quadrat ist.

Bekannte endliche verallgemeinerte Vierecke:

$$(s,t)\in\left\{(q,q),\left(q,q^2\right),\left(q^2,q^3\right),(q-1,q+1)\right\}$$

für jede Primzahlpotenz *q*.

Bekannte endliche verallgemeinerte Sechsecke:

$$(s,t)\in\left\{(q,q),\left(q,q^3\right)\right\}$$

für jede Primzahlpotenz *q*.

Bekannte endliche verallgemeinerte Achtecke:

$$(s,t)\in\left\{\left(2^m,2^{2m}\right)\,\middle|\,\text{für jede ungerade ganze Zahl}\right\}$$

Wie Eingangs schon bemerkt, ist das Theorem von Feit-Higman falsch, wenn die Geometrie nicht endlich ist. Unter zusätzlichen Bedingungen bricht aber auch hier n ab.

Dazu eine Definition.

Es sei Γ ein verallgemeinertes n-Eck. Für jeden irreduziblen Weg $w = x_0, \ldots, x_n$ der Länge n sei U_w die Untergruppe der Automorphismen von Γ mit der Eigenschaft $U_w(y) = y$ für alle $y \in \Gamma_{x_i}$, $1 \le i \le n-1$.

Γ heißt ***Moufang***, wenn für jeden irreduziblen Weg w die Untergruppe U_w alle gewöhnlichen n-Ecke permutiert, die w enthalten.

Tits 1976, ***1979*** und ***Weiss 1979***: Unendliche dicke Moufang n-Ecke existieren nur für $n \in \{2,3,4,6,8\}$.

Insbesondere folgt aus dem Beweis von Weiss, dass dicke Moufang-Achtecke keine Polaritäten zulassen.

Modelle für *n*-Ecke

$n = 3$: (projektive Ebenen)

1. Es sei $\mathbf{K}$ ein Körper. Im $\mathbf{K}^3$ betrachte man die ein- und zweidimensionalen Teilräume. Die eindimensionalen Teilräume als Punkte und die zweidimensionalen Teilräume als Geraden bilden mit dem Enthaltensein als Inzidenz eine projektive Ebene (Desarguesche Ebene).
2. Man konstruiert einem affinen Raum (Translationsraum) mittels eines regulären Spreads und zeigt, dass der duale Spread nicht regulär ist, jedoch auch einen affinen Raum definiert. Hieraus erhält man mit der üblichen Konstruktion eine nicht Desarguesche projektive Ebene. Es gilt:
   Zu jeder Primzahlpotenz $q > 2$ existiert eine nicht Desarguesche affine Translationsebene der Ordnung q^2 (***Hall-Ebenen 1943***).
3. In einer endlichen Moufang-Ebene gilt der Satz von Pappos, also erst recht der Satz von Desargue.

$\boldsymbol{n = 4}$:

1. Es gelten folgende Sätze

   a) ***Tits:***

   Ein dickes verallgemeinertes Viereck ist genau dann ein verallgemeinertes Moufang-Viereck, wenn es ein klassisches Beispiel oder ein dazu duales Beispiel ist.

   b) ***Buekenhout, Lefèvre:***

   Ein verallgemeinertes Viereck der Ordnung (s,t) ist genau dann klassisch, wenn es in einen projektiven Raum $PG(n,s)$ einbettbar ist.

2. Die klassischen Vierecke ***(Tits)***

a) Wir betrachten im projektiven Raum $PG(d,q)$ eine nicht singuläre Hyperquadrik Q vom Index 2, mit $d \in \{3,4,5\}$. Die Punkte von Q und die Geraden von Q (Unterräume maximaler Dimension auf Q) bilden ein verallgemeinertes Viereck $Q(d,q)$ mit

$$\begin{array}{llll} s=q & \text{und} & t=1 & \text{für} \quad d=3, \\ s=q & \text{und} & t=q & \text{für} \quad d=4, \\ s=q & \text{und} & t=q^2 & \text{für} \quad d=5. \end{array}$$

b) Wir betrachten eine nicht singuläre Hermitesche Varietät H des projektiven Raumes $PG\left(d,q^2\right)$ mit $d \in \{3,4\}$. Dann bilden die Punkte zusammen mit den Geraden von H ein verallgemeinertes Viereck $H\left(d,q^2\right)$ mit

$$\begin{array}{llll} s=q^2 & \text{und} & t=q & \text{für} \quad d=3, \\ s=q^2 & \text{und} & t=q^3 & \text{für} \quad d=4. \end{array}$$

c) Die Punkte von $PG(3,q)$ zusammen mit den total isotropen Geraden bezüglich einer symplektischen Polarität bilden ein verallgemeinertes Viereck $W(3,q)$ mit $s=t=q$.

3. Die nichtklassischen Vierecke ***(Ahrens, Szekeres)***

a) Es sei $\mathcal{O}$ ein vollständiges Oval einer projektiven Ebene $PG(2,q)$, wobei $q=2l$. Es sei $PG(2,q)$ in $PG(3,q)=V$ als Ebene H einbettbar. Definiere als Punkte des verallgemeinerten Vierecks die Punkte von $V \setminus H$. Als Geraden des verallgemeinerten Vierecks nehme man die Geraden von V, die nicht in H enthalten sind, aber $\mathcal{O}$ treffen. Die Inzidenz ist durch V induziert. Hier ist $s=q-1$ und $t=q\ +1$. Die Bezeichnung ist $T_2^*(\mathcal{O})$.

b) Es sei $W(3,q)$ das eben angegebene Viereck und X ein Punkt. Eine Ebene $PG(2,q)$ heißt polare Ebene von X bezüglich der symplektischen Polarität, die $W(3,q)$ definiert. Ein neues Viereck $W^*(3,q)$ ist dann wie folgt gegeben:

Die Punkte sind die Punkte von $W(3,q)$, die nicht in $PG(2,q)$ liegen. Die Geraden sind die Geraden von $W(3,q)$, die X nicht enthalten zusammen mit den Geraden, die X enthalten, aber nicht in $PG(2,q)$ liegen. Die Inzidenz ist die induzierte. Hier ist $s=q\ -1$ und $t=q+1$.

Eine andere Beschreibung dieser Vierecke ist von Kantor angegeben worden. Er betrachtet eine endliche Gruppe mit einer Familie von Untergruppen, die gewisse Eigenschaften besitzen müssen.

4. Verallgemeinerte Sechsecke ***(Tits)***

Diese werden über Lie-Gruppen mit *BN*-Paaren vom Rang zwei konstruiert.

a) Die Gruppe $G_2(q)$ liefert ein Sechseck mit $s=q$ und $t=q$.

b) Die Gruppe ${}^3D_4(q)$ liefert ein Sechseck mit $s = q$ und $t = q^3$.

5. Verallgemeinerte Achtecke ***(Tits)***

Dies wird über die Lie-Gruppen ${}^2F_4(q)$ konstruiert und besitzt die Parameter $s = q$ und $t = q^2$ mit $q = 2^{2l+1}$.

Weisen wir nun einige ***Nichtexistenzen*** mit elementaren Mitteln der linearen Algebra ohne höhere Darstellungstheorie, sondern mit linearer Darstellungstheorie nach.

Dazu beschreiben wir die Inzidenzmatrix als **Z**-Homomorphismus.

Durch die Inzidenz auf der Geometrie sind natürliche Abbildungen zwischen den freien $\mathbf{K}$-Vektorräumen $V(\Omega_1)$ und $V(\Omega_2)$ gegeben. Zur Definition freier $\mathbf{K}$-Vektorräume vgl. Lineare Algebra 2.

Definition 6:
Es sei Γ eine Geometrie vom Rang 2. Es sei V_1 der freie $\mathbf{K}$-Vektorraum erzeugt von den Punkten S_1 und V_2 der freie $\mathbf{K}$-Vektorraum erzeugt von den Geraden S_2 der Geometrie Γ (Es genügt jeweils der freie $\mathbf{Z}$-Modul). Es seien

$$\vartheta : \begin{cases} V_2 \to & V_1 \\ g \mapsto & \sum_{A I g} A \end{cases} \text{ und } \tau : \begin{cases} V_1 \to & V_2 \\ A \mapsto & \sum_{g I A} g \end{cases}$$

die Inzidenzabbildungen. Dann sind

$$\alpha := \vartheta \circ \tau \in \mathrm{End}_{\mathbf{K}}(V_1) \text{ und } \beta := \tau \circ \vartheta \in \mathrm{End}_{\mathbf{K}}(V_2).$$

Komponieren wir beide Abbildungen, so erhalten wir die Inzidenzabbildung auf den Punkten.

Ist darüber hinaus $\pi : S_1 \to S_2$ eine Polarität, also $\pi^2 = id$, so ist $\pi\vartheta\pi = \tau$, denn $(\pi\vartheta\pi)(A) = \sum\limits_{X I \pi(A)} A = \sum\limits_{\pi(X) I A} A = \sum\limits_{g I A} A = \tau(A)$.

Für weitere Berechnungen benötigen wir das ***Haupttheorem***.

Theorem 7:
Es sei $\mathbf{K}$ ein Körper und $\alpha \in \mathrm{End}\left(\mathbf{K}^m\right)$ ein Endomorphismus. Es sei μ_α das Minimalpolynom. Ferner sei $(X - \lambda)^{r_\lambda} p_\lambda = \mu_\alpha$ mit $p_\lambda(\lambda) \neq 0$. Bezeichnet $E_\alpha(\lambda)$ den verallgemeinerten Eigenraum von α bezüglich des Eigenwertes λ, so gilt die Beziehung

$$\mathrm{spur}\left(p_\lambda(\alpha)\right) = p_\lambda(\lambda) \cdot \dim_{\mathbf{K}}\left(E_\alpha(\lambda)\right) \text{ und } E_\alpha(\lambda) = p_\lambda(\alpha)\mathbf{K}^m.$$

Ist $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ eine Basis von $\mathbf{K}^m$, so erhalten wir:

$$E_\alpha(\lambda) = \left[p_\lambda(\alpha)\mathbf{e}_i \mid 1 \le i \le m\right].$$

Beweis:

Sicher ist $\mathbf{K}^m$ vermöge $f \cdot v = f(\alpha)v$ für $f \in \mathbf{K}[X]$ ein $\mathbf{K}[X]$-Modul. Ist nun $\mu_\alpha = p_\lambda \cdot (X-\lambda)^{r_\lambda}$ das Minimalpolynom mit $p_\lambda(\lambda) \neq 0$, so zerfällt $\mathbf{K}^m$ in die direkte Summe

$$E_\alpha(\lambda) \underset{\mathbf{K}[X]}{\oplus} \ker(p_\lambda)$$

Der verallgemeinerte Eigenraum $E_\alpha(\lambda)$ zerfällt weiter in eine direkte Summe von zyklischen Eigenräumen $E_\alpha^1(\lambda),\ldots,E_\alpha^s(\lambda)$. Insbesondere gibt es eine Basis $v_1^i,\ldots,v_{t_i}^i$ von $E_\alpha^i(\lambda)$ mit

$$\alpha(v_1^i) = \lambda v_1^i + v_2^i,\ \ldots,\ \alpha(v_k^i) = \lambda v_k^i + v_{k+1}^i,\ \ldots,\ \alpha(v_{t_i}^i) = \lambda v_{t_i}^i .$$

Folglich gilt $\alpha^n(v_k^i) = \lambda^n v_k^i + R_{k+1}^i$, wobei R_{k+1}^i eine Linearkombination von $v_{k+1}^i,\ldots,v_{t_i}^i$ und $R_{t_i+1}^i = 0$ ist. Es sei D eine Determinantenform auf $\mathbf{K}^m$. Ist w_j ein zyklischer Vektor, so ist

$$\begin{aligned} D(w_1,\ldots,\alpha^n(w_j),\ldots,w_m) &= D(w_1,\ldots,\lambda^n w_j + R_{j+1},\ldots,w_m) \\ &= D(w_1,\ldots,\lambda^n w_j,\ldots,w_m) \end{aligned}$$

Ist $w_1,\ldots,w_u$ eine Basis von $\ker(p_\lambda)$, so folgt auf der Basis der zyklischen Eigenräume und $\ker(p_\lambda)$

$$\begin{aligned} &\operatorname{spur}(p_\lambda(\alpha)) \cdot D(v_1^1,\ldots,v_{t_1}^1,\ldots,v_1^s,\ldots,v_{t_s}^s,w_1,\ldots,w_u) \\ &= \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t_i} D(v_1^1,\ldots,v_{t_1}^1,\ldots,v_1^i,\ldots,p_\lambda(\alpha)v_j^i,\ldots,v_{t_i}^i,\ldots,v_1^s,\ldots,v_{t_s}^s,w_1,\ldots,w_u) \\ &= \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t_i} D(v_1^1,\ldots,v_{t_1}^1,\ldots,v_1^i,\ldots,p_\lambda(\lambda)v_j^i,\ldots,v_{t_i}^i,\ldots,v_1^s,\ldots,v_{t_s}^s,w_1,\ldots,w_u) \\ &= p_\lambda(\lambda)\left(\sum_{i=1}^{s} \dim_{\mathbf{K}} E_\alpha^i(\lambda)\right) D(v_1^1,\ldots,v_{t_1}^1,\ldots,v_1^s,\ldots,v_{t_s}^s,w_1,\ldots,w_u) \\ &= p_\lambda(\lambda)\dim_{\mathbf{K}} E_\alpha(\lambda) D(v_1^1,\ldots,v_{t_1}^1,\ldots,v_1^s,\ldots,v_{t_s}^s,w_1,\ldots,w_u). \end{aligned}$$

Damit ist alles bewiesen.

Halten wir fest: $\operatorname{spur}(p_\lambda(\alpha)) = \xi_A \cdot \dim_{\mathbf{K}} E \wedge \dim_{\mathbf{K}} E = |\Omega_1|$, da wir nur Punkträume betrachten. Hierbei ist ξ_A die Auswertung von $p_\lambda(\alpha)$ auf dem Punkt A.

Bemerkung:

Es sei χ_α das charakteristische Polynom von α, dann gilt bekanntlich $\mu_\alpha \mid \chi_\alpha$. Kann das charakteristische Polynom bestimmt werden, so sind $\det(\alpha)$ und $\operatorname{spur}(\alpha)$ bekannt. Es gilt $c_m = (-1)^m \det(\alpha)$ und $c_1 = -\operatorname{spur}(\alpha)$ in $\chi_\alpha = X^m + c_1 X^{m-1} + \cdots + c_m$.

Mit Hilfe dieses Theorems und der Eigenschaft, dass das zyklotonische Polynom des Kreisteilungskörper höchstens quadratisch sein kann folgen dann die Behauptungen.

Ohne die Arbeit von Feit und Higman ist folgendes Lemma nützlich.

Lemma 8:

Es sei A die Inzidenzmatrix eines verallgemeinerten n-Ecks der Ordnung (s,t). Es sei α die zu $A^t A$ gehörige Abbildung. Es sei $d(X,Y)$ der Abstand der Punkte X und Y. Mit

$$u := \max\ \left\{ d\left(X,Y\right) \,\middle|\, X,Y \in \Omega_1 \right\}$$

gilt dann für den Grad des Minimalpolynoms μ_α:

$$\deg\left(\mu_\alpha\right) = \frac{u}{2} + 1 .$$

Der Beweis ist trivial.

Der Lernende wird aufgefordert dieses Lemma auf beliebige reguläre Geometrien zu verallgemeinern. Als Hinweis möge dienen, dass der Abstand durch die Länge der Wege zu ersetzen ist, da im allgemeinen kein Abstand definiert sein muss.

Für einen Blockplan hat das Minimalpolynom den Grad zwei. Das Minimalpolynoms einer Partialgeometrie hat den Grad vier.

Berechnungen:

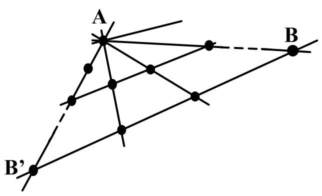
Es sei Γ ein verallgemeinertes n-Eck. Mit Hilfe des Haupttheorems erhalten wir die Minimalpolynome μ_α.

1. **$n = 3$: Projektive Ebene**

Es sei Γ ein verallgemeinertes Dreieck (projektive Ebene) und α die Inzidenzabbildung. Dann ist das Minimalpolynom gegeben durch

$$\mu_\alpha = (X - (s+1)^2)(X - s) .$$

Beweis:



Es ist $s = t$ nach Satz 5. Aus $\alpha(A) - (s+1)A = \sum_{d(B,A)=2} B$ folgt $\alpha^2(A) - (s+1)\alpha(A) = \sum_{\substack{B \\ d(B,A)=2}} \alpha(B)$. Andererseits ist

$$\alpha(B) = sB + A + \sum_{d(B',A)=2} B'$$

und damit

$$\sum_{\substack{B \\ d(B,A)=2}} \alpha\,(B) = s(s+1)A + (s^2+2s) \sum_{\substack{B \\ d(B,A)=2}} B ,$$

denn *B'* tritt bei der Summation $s^2 + (s-1)$-mal auf. Wir erhalten

$$[\alpha^2 - (s+1)\alpha]A = s(s+1)A + (s^2+2s)[(\alpha - (s+1)]A$$

Dies liefert $\alpha^2(A) - (s^2+3s+1)\alpha(A) + s(s+1)^2 A = 0$ für alle $A \in V_1$. Das Minimalpolynom für $n = 3$ lautet folglich

$$\mu_\alpha = X^2 - (s^2+3s+1)X + s(s+1)^2 . \diamond$$

Zur Berechnung der Eigenräume finden wir $\operatorname{spur}\left(p_s\left(\alpha\right)\right) = -s\left(s+1\right)\left(s^2+s+1\right)$, $p_s\left(s\right) = -\left(s^2+s+1\right)$ und $\operatorname{spur}\left(p_{(s+1)^2}\left(\alpha\right)\right) = s^2+s+1$ sowie $p_{(s+1)^2}\left(\left(s+1\right)^2\right) = s^2+s+1$.

Die Dimensionen der Eigenräume lauten:

$$\dim_{\mathbf{K}} E_\alpha(s) = s(s+1)$$
$$\dim_{\mathbf{K}} E_\alpha((s+1)^2) = 1\,.$$

Wir wollen noch das charakteristische Polynom angeben. Es lautet

$$\chi_\alpha = \left(X-(s+1)^2\right)\left(X-s\right)^{s(s+1)}.$$

Wegen $c_m = (-1)^m \det(\alpha)$ und $c_1 = -\operatorname{spur}(\alpha)$ in $\chi_\alpha = X^m + c_1 X^{m-1} + \cdots + c_m$, gilt

$$\det(\alpha) = (s+1)^2 s^{s(s+1)} \text{ und } \operatorname{spur}(\alpha) = (s+1)\left(s^2+s+1\right).$$

Eine Basis der Eigenräume ist einfach anzugeben. Es gilt:

a) $E_{\alpha,A}(s) = \left[A-B \mid B \in \Omega_1 \setminus \{A\}\right]$, wobei A ein fest gewählter Punkt ist,

b) $E_\alpha\left((s+1)^2\right) = \left[\sum_{A\in\Omega_1} A\right]$.

Die Basen der Eigenräume sind von daher interessant, da ein Automorphismus der Geometrie einen Automorphismus der freien Vektorräume bzw. Moduln induziert. Dieser lässt den Eigenraum $E_\alpha\left((s+1)^2\right)$ fest.

Gibt es eine ***Polarität*** π, so ist das Minimalpolynom von $\gamma := (\vartheta\pi)^2$ ein Teiler von $(X^2-(s+1)^2)(X^2-s)$. Insbesondere ist $\sqrt{s} \in \mathbf{Z}$. Genauer gilt $\mu_\gamma = (X-(s+1))\left(X-\sqrt{s}\right)\left(X+\sqrt{s}\right)$.

Berechnen wir die Dimensionen der Eigenräume.

$\dim_{\mathbf{K}} E_\gamma(s+1) = 1$, da $\sum_{A\in\Omega_1} A$ ein Eigenvektor ist. Sei $\boldsymbol{p}$ die Anzahl der isotropen Punkte.

Mit $p_{\sqrt{s}} = (X-(s+1))\left(X+\sqrt{s}\right)$ und $p_{-\sqrt{s}} = (X-(s+1))\left(X-\sqrt{s}\right)$ folgt:

$$p_{\sqrt{s}}\left(\sqrt{s}\right) = 2\sqrt{s}\left(\sqrt{s}-(s+1)\right) \text{ und } p_{-\sqrt{s}}\left(-\sqrt{s}\right) = 2\sqrt{s}\left(\sqrt{s}+s+1\right),$$

$$\operatorname{spur}\left(p_{\sqrt{s}}(\gamma)\right) = (s+1)\left(1-\sqrt{s}\right)\left(s^2+s+1\right) + \left(\sqrt{s}-(s+1)\right)\boldsymbol{p}$$

$$\operatorname{spur}\left(p_{-\sqrt{s}}(\gamma)\right) = (s+1)\left(1+\sqrt{s}\right)\left(s^2+s+1\right) - \left(\sqrt{s}+s+1\right)\boldsymbol{p}\,.$$

Die Dimensionen sind folglich:

$$\dim_{\mathbf{K}} E_\gamma\left(\sqrt{s}\right) = \frac{(s+1)\left(1-\sqrt{s}\right)\left(s^2+s+1\right) + \left(\sqrt{s}-(s+1)\right)\boldsymbol{p}}{2\sqrt{s}\left(\sqrt{s}-(s+1)\right)} = \frac{(s+1)\left(s^2+\sqrt{s}\right) - \boldsymbol{p}\sqrt{s}}{2s}$$

$$\dim_{\mathbf{K}} E_\gamma\left(-\sqrt{s}\right) == \frac{(s+1)\left(1+\sqrt{s}\right)\left(s^2+s+1\right) - \left(\sqrt{s}+s+1\right)\boldsymbol{p}}{2\sqrt{s}\left(\sqrt{s}+s+1\right)} = \frac{(s+1)\left(s^2-\sqrt{s}\right) + \boldsymbol{p}\sqrt{s}}{2s}$$

Es seien d_+ bzw. d_- die Dimensionen der Eigenräume zum Eigenwert $\sqrt{s}$ bzw. $-\sqrt{s}$.

Damit lautet das charakteristische Polynom $\chi_\gamma = (X-(s+1))\left(X-\sqrt{s}\right)^{d_-}\left(X+\sqrt{s}\right)^{d_+}$.
Insbesondere sind $\det(\gamma) = (-1)^{d_-}(s+1)\left(\sqrt{s}\right)^{s(s+1)}$ und $\operatorname{spur}(\gamma) = \boldsymbol{p}$. Außerdem ist $d_+ = d_- \Leftrightarrow \boldsymbol{p} = s+1$ ◊

Lemma 9:
Es sei Γ ein verallgemeinertes $2m$-Eck der Ordnung (s,t). Es sei $E_\alpha(0)$ der zur null gehörige Eigenraum. Dann ist

$$E_\alpha(0) = \left[(-s)^m X + \sum_{j=1}^{m}(-s)^{m-j}\sum_{\substack{Y\in\Omega_1\\ d(Y,X)=2j}} Y \;\middle|\; X\in\Omega_1\right].$$

Beweis durch Nachrechnen. ◊

Satz 10:
Es sei Γ ein verallgemeinertes Viereck der Ordnung (s,t). Dann ist

(i) $t \le s^2$.

Gestattet Γ eine Polarität π, also $s = t$, so ist

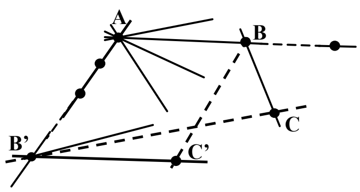
(ii) $\sqrt{2s} \in \mathbf{Z}$.

2. $\boldsymbol{n = 4}$: **Verallgemeinerte Vierecke**

Es sei Γ ein verallgemeinertes Viereck und α die Inzidenzabbildung. Dann ist das Minimalpolynom gegeben durch

$$\mu_\alpha = X[X-(s+1)(t+1)][X-(s+t)].$$

Beweis:



Aus $\alpha(B) = tB + A + \sum_{\substack{B'\\ d(B',A)=2}} B' + \sum_{\substack{C'\\ d(C',A)=4}} C'$ ‚sehen' wir durch Summieren über B $(s-1)$-mal B'. Da es zu jedem C genau t + 1 irreduzible Wege von A gibt, tritt C auch $(t+1)$-mal auf.

Wir erhalten

$$\sum_{\substack{B\\ d(B,A)=2}} \alpha(B) = s(t+1)A + (s+t)\sum_{\substack{B\\ d(B,A)=2}} B + (t+1)\sum_{\substack{C\\ d(C,A)=4}} C.$$

Hieraus folgt

$$\sum_{\substack{B\\ d(B,A)=2}} \alpha^2(B) = s(t+1)\alpha(A) + (s+t)\sum_{\substack{B\\ d(B,A)=2}} \alpha(B) + (t+1)\sum_{\substack{C\\ d(C,A)=4}} \alpha(C),$$

so dass nur noch $\sum\limits_{\substack{C\\ d(C,A)=4}} \alpha(C)$ zu bestimmen ist.

Mit $\sum\limits_{\substack{C\\ d(C,A)=4}} \alpha(C) = st \sum\limits_{\substack{B\\ d(B,A)=2}} B + s(t+1) \sum\limits_{\substack{C\\ d(C,A)=4}} C$ erhalten wir schließlich durch Ersetzen

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{B\\ d(B,A)=2}} \alpha^2(B) &= s(t+1)\alpha(A) + (s+t) \sum_{\substack{B\\ d(B,A)=2}} \alpha(B) + (t+1) \sum_{\substack{C\\ d(C,A)=4}} \alpha(C)\\ &= -s(t+1)^2(s-1)A - s(s-1)(t+1) \sum_{\substack{B\\ d(B,A)=2}} B + (st+2s+t) \sum_{\substack{B\\ d(B,A)=2}} \alpha(B).\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$(\alpha^2 - (st+2s+t)\alpha + s(s-1)(t+1)) \sum_{\substack{B\\ d(B,A)=2}} B + s(s-1)(t+1)^2 A = 0$$

und mit $\alpha(A) - (t+1)A = \sum\limits_{d(B,A)=2} B$ endlich:

$$(X^2 - (st+2s+t)X + s(s-1)(t+1))(X-(t+1)) + s(s-1)(t+1)^2 = X\left[X^2 - (st+2s+2t+1)X + (s+1)(t+1)(s+t)\right]$$

annulliert V_1 und ist das Minimalpolynom $\mu_\alpha = X[X-(s+1)(t+1)][X-(s+t)]$. ◊

Berechnung der Eigenräume

Nun ist $p_0(\alpha) = (\alpha - (s+1)(t+1))(\alpha - (s+t))$, also $\mathrm{spur}(p_0(\alpha)) = s^2(s+1)(t+1)(st+1)$ und $p_0(0) = (s+1)(t+1)(s+t)$. Folglich ist

$$\dim_{\mathbf{K}} E_\alpha(0) = \frac{s^2(st+1)}{s+t}.$$

Mit $p_{(s+1)(t+1)}(\alpha) = \alpha(\alpha - (s+t))$ erhalten wir $\mathrm{spur}(p_{(s+1)(t+1)}(\alpha)) = (s+1)(t+1)(st+1)$ und $(p_{(s+1)(t+1)}((s+1)(t+1))) = (s+1)(t+1)(st+1)$. Mithin ist

$$\dim_{\mathbf{K}} E_\alpha((s+1)(t+1)) = 1.$$

Die letzte Dimension ergibt sich aus $\mathrm{spur}(p_{s+t}(\alpha)) = -st(s+1)(t+1)(st+1)$ und $p_{s+t}(s+t) = -(s+t)(st+1)$ zu

$$\dim_{\mathbf{K}} E_\alpha(s+t) = \frac{st(s+1)(t+1)}{s+t}.$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\chi_\alpha = X^{\frac{s^2(st+1)}{s+t}} [X-(s+1)(t+1)][X-(s+t)]^{\frac{st(s+1)(t+1)}{s+t}}.$$

Daraus folgt $\det(\alpha) = 0$ und $\mathrm{spur}(\alpha) = (s+1)(t+1)(st+1)$. Wir geben eine Basis für den Eigenraum $E_\alpha((s+1)(t+1))$ an.

$$E_\alpha\left((s+1)(t+1)\right)=\left[\sum_{A\in\Omega_1} A\right]$$

Berechnen wir ein Erzeugendensystem für $E_\alpha(0)$. Es ist

$$\left(\alpha-(s+1)(t+1)\right)\left(\alpha-(s+t)\right)(A)=s^2(t+1)A-s(t+1)\sum_{d(B,A)=2} B+(t+1)\sum_{d(C,A)=4} C .$$

Folglich ist $\left\{s^2A-s\sum_{d(B,A)=2} B+\sum_{d(C,A)=4} C \;\middle|\; A\in\Omega_1\right\}$ ein Erzeugendensystem für $E_\alpha(0)$.

Berechnen wir $\alpha^2(A)-(s+1)(t+1)\alpha(A)$. Es ist

$$\alpha^2(A)-(s+1)(t+1)\alpha(A)=-st(t+1)A-t(s-1)\sum_{\substack{B\\ d(B,A)=2}} B+(t+1)\sum_{\substack{C\\ d(C,A)=4}} C .$$

Die Menge $\left\{ -st(t+1)A-t(s-1)\sum_{\substack{B\\ d(B,A)=2}} B+(t+1)\sum_{\substack{C\\ d(C,A)=4}} C \;\middle|\; A\in\Omega_1 \right\}$ ist damit ein Erzeugendensystem für $E_\alpha(s+t)$.

Gestattet Γ eine ***Polarität*** π, so gilt für $\gamma:=(\vartheta\pi)^2$ die Teilbarkeit $\mu_\gamma \mid X^2[X^2-(s+1)^2][X^2-2s]$. Insbesondere ist $\sqrt{2s}\in\mathbf{Z}$. Hat darüber hinaus die Polarität genau $\boldsymbol{p}$ isotrope Punkte, so findet man mindestens s^2+1 isotrope Punkte durch Betrachtung dünner Vierecke (geschlossene Wege) des Steinberg-Moduls. Insbesondere ist $\gamma(A)=A$ und $\gamma\left(\sum_{d(B,A)=2} B\right)=sA$, falls *A* isotrop,. Ist *A* nicht isotrop, so erhalten wir $\gamma\left(\sum_{d(B,A)=2} B\right)=A$.

Man zeigt leicht, dass $\mu_\gamma=\gamma\left(\gamma-(s+1)\right)\left(\gamma-\sqrt{2s}\right)\left(\gamma+\sqrt{2s}\right)$ und $\dim_{\mathbf{K}} E_\gamma(s+1)=1$, da $\sum_{A\in\Omega_1} A$ ein Eigenvektor von γ ist. Wir erhalten $\operatorname{spur}\left(p_{s+1}(\gamma)\right)=(s+1)\left(s^2+1\right)$ und $p_{s+1}(s+1)=(s+1)\left(s^2+1\right)$. Da andererseits die Dimension des Eigenraums eins ist, gibt es genau $(s+1)\left(s^2+1\right)$ isotrope Punkte für verallgemeinerte Vierecke. Berechnen wir die anderen Dimensionen der Eigenräume.

Mit $p_0(\gamma)=\left(\gamma-(s+1)\right)\left(\gamma^2-2s\right)$ erhalten wir $\operatorname{spur}\left(p_0(\gamma)\right)=s^2(s+1)\left(s^2+1\right)$ und $p_0(0)=2s(s+1)$. Folglich gilt

$$\dim_{\mathbf{K}} E_\gamma(0)=\tfrac{1}{2}s\left(s^2+1\right).$$

Mit $p_{\sqrt{2s}}(\gamma)=\gamma\left(\gamma-(s+1)\right)\left(\gamma+\sqrt{2s}\right)$ folgt $p_{\sqrt{2s}}\left(\sqrt{2s}\right)=4s\left(\sqrt{2s}-(s+1)\right)$ und $\operatorname{spur}\left(p_{\sqrt{2s}}(\gamma)\right)=\left((s+1)\sqrt{2s}-2s\right)\left[(s+1)\left(s^2+1\right)-\boldsymbol{p}\right]-s^2(s+1)\left(s^2+1\right)$. Wir erhalten

$$\dim_K E_\gamma\left(\sqrt{2s}\right)=\frac{s^2(s+1)(s^2+1)-\left((s+1)\sqrt{2s}-2s\right)\left((s+1)(s^2+1)-\boldsymbol{p}\right)}{4s\left(s+1-\sqrt{2s}\right)}=\frac{s^2(s+1)^2+\left(\boldsymbol{p}-(s+1)\right)\sqrt{2s}}{4s}.$$

Mit $p_{-\sqrt{2s}}(\gamma)=\gamma\left(\gamma-(s+1)\right)\left(\gamma-\sqrt{2s}\right)$ folgt $p_{-\sqrt{2s}}\left(-\sqrt{2s}\right)=-4s\left(\sqrt{2s}+(s+1)\right)$ und $\mathrm{spur}\left(p_{-\sqrt{2s}}(\gamma)\right)=s^2(s+1)\left(s^2+1\right)+\left((s+1)\left(s^2+1\right)-\boldsymbol{p}\right)\left(2s+(s+1)\sqrt{2s}\right)$. Wir erhalten

$$\dim_K E_\gamma\left(-\sqrt{2s}\right)=\frac{s^2(s+1)(s^2+1)+\left((s+1)(s^2+1)-\boldsymbol{p}\right)\left(2s+(s+1)\sqrt{2s}\right)}{4\left(s+1+\sqrt{2s}\right)}=\frac{s^2(s+1)^2+(s+1-\boldsymbol{p})\sqrt{2s}}{4s}.$$

Insbesondere muss s gerade sein!

Lemma 11:
Es sei Γ ein verallgemeinertes $2m$-Eck, $m\geq 3$ und α die Inzidenzabbildung. Es seien A, X, Y sowie Z Punkte. Dann gilt:

1. $$\sum_{\substack{Y\\ d(Y,A)=2(m-1)}}\alpha(Y)=st\sum_{d(X,A)=2(m-2)}X+(s+t)\sum_{d(Y,A)=2(m-1)}Y+(t+1)\sum_{d(Z,A)=2m}Z$$

2. $$\sum_{\substack{Y\\ d(Y,A)=2(m-2)}}\alpha(Y)=st\sum_{d(X,A)=2(m-3)}X+(s+t)\sum_{d(Y,A)=2(m-2)}Y+\sum_{d(Z,A)=2(m-1)}Z$$

3. $$\sum_{\substack{Z\\ d(Z,A)=2m}}\alpha(Z)=st\sum_{d(Y,A)=2(m-1)}Y+s(t+1)\sum_{d(X,A)=2(m-2)}X$$

4. $$[\alpha^2-(st+2s+t)\alpha+s^2(t+1)]\sum_{d(Y,A)=2(m-1)}Y-[st\alpha-s^2t(t+1)]\sum_{d(X,A)=2(m-2)}X=0$$

Beweis:
Orientieren wir uns an Satz 9, so ist in 1. nur der Punkt X zu verifizieren. Von X gehen t Geraden zu je s Punkten Y.

Für 2. ist nun der Weg irreduzibel.

In 3. ist nur zu zählen. Von Y gehen t Geraden, die je s Punkte Z tragen. Jedes Z kommt auch $(s-1)(t+1)$-mal vor.

Wir wenden α auf die 1. Gleichung an und setzen 1. sowie 3. ein. Dies liefert 4. $\diamond$

3. $\boldsymbol{n=6,8,12}$:
Es sei Γ ein verallgemeinertes $2m$-Eck und α die Inzidenzabbildung. Dann lauten die Minimalpolynome:

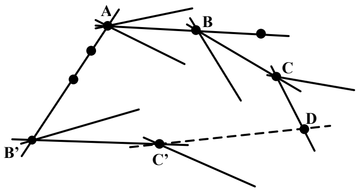
$2m=6$: $\mu_\alpha=X[X-(s+1)(t+1)][X-(s+t+\sqrt{st})][X-(s+t-\sqrt{st})]$

$2m=8$: $\mu_\alpha=X[X-(s+1)(t+1)][X-(s+t)][X-(s+t+\sqrt{2st})][X-(s+t-\sqrt{2st})]$

$2m=12$: $\mu_\alpha=X[X-(s+1)(t+1)][X-(s+t)][X-(s+t+\sqrt{st})][X-(s+t-\sqrt{st})][X-(s+t+\sqrt{3st})][X-(s+t-\sqrt{3st})]$

Beweis:
Nach Lemma 11 ist 3. zu berechnen. Dazu benötigen wir irreduzible Wege.

Für $2m=6$ ist $[\alpha^2-(st+2s+t)\alpha+s^2(t+1)]\sum\limits_{d(C,A)=4} C-[st\alpha-s^2t(t+1)]\sum\limits_{d(B,A)=2} B=0$ zu bestimmen. Nun ist



$$\sum_{d(C,A)=4} C=[\alpha-(s+t)]\sum_{d(B,A)=2} B-s(t+1)A$$
$$=[\alpha-(s+t)][\alpha-(t+1)]A-s(t+1)A$$
$$=[\alpha^2-(s+2t+1)\alpha+t(t+1)]A$$

und $\sum\limits_{d(B,A)=2} B=\alpha(A)-(s+1)A$.

Aus der 3. Gleichung Lemma 11 folgt nun die Behauptung.

Für $2m=8$ ist $[\alpha^2-(st+2s+t)\alpha+s^2(t+1)]\sum\limits_{d(D,A)=6} D-[st\alpha-s^2t(t+1)]\sum\limits_{d(C,A)=4} C=0$ zu bestimmen. Es ist mit 2. Lemma 11 $[\alpha-(s+t)]\sum\limits_{d(C,A)=4} C-st\sum\limits_{d(B,A)=2} B=\sum\limits_{d(D,A)=6} D$ und $\sum\limits_{d(C,A)=4} C=[\alpha^2-(s+2t+1)\alpha+t(t+1)]A$. Die Behauptung folgt durch Einsetzen in die 4. Gleichung Lemma 11.

Für $2m=12$ ist $[\alpha^2-(st+2s+t)\alpha+s^2(t+1)]\sum\limits_{d(F,A)=10} F-[st\alpha-s^2t(t+1)]\sum\limits_{d(E,A)=8} E=0$ zu bestimmen. Dazu bestimmen wir $[\alpha-(s+t)]\sum\limits_{d(E,A)=8} E-st\sum\limits_{d(D,A)=6} D=\sum\limits_{d(F,A)=10} F$ und $[\alpha-(s+t)]\sum\limits_{d(D,A)=6} D-st\sum\limits_{d(C,A)=4} C=\sum\limits_{d(E,A)=8} E$. Setzen wir zunächst $\sum\limits_{d(F,A)=10} F$ und dann $\sum\limits_{d(E,A)=8} E$ ein, so erhalten wir die Behauptung, wenn wir $[\alpha-(s+t)]\sum\limits_{d(C,A)=4} C-st\sum\limits_{d(B,A)=2} B=\sum\limits_{d(D,A)=6} D$ und $\sum\limits_{d(C,A)=4} C=[\alpha^2-(s+2t+1)\alpha+t(t+1)]A$ einsetzen. ◊

Damit sind alle Minimalpolynome bestimmt.

3. $n=6$: Verallgemeinerte Sechsecke

$$\mu_\alpha=X[X-(s+1)(t+1)][X-(s+t+\sqrt{st})][X-(s+t-\sqrt{st})]$$

Wir berechnen

$\operatorname{spur}\left(p_{(s+1)(t+1)}(\alpha)\right)=(s+1)(t+1)(st+1)\left((st)^2+st+1\right)$, $\operatorname{spur}\left(p_0(\alpha)\right)=-s^3(s+1)(t+1)\left((st)^2+st+1\right)$,
$\operatorname{spur}\left(p_{s+t+\sqrt{st}}(\alpha)\right)=-st\sqrt{st}(s+1)(t+1)\left((st)^2+st+1\right)$, $\operatorname{spur}\left(p_{s+t-\sqrt{st}}(\alpha)\right)=st\sqrt{st}(s+1)(t+1)\left((st)^2+st+1\right)$,

und $p_{(s+1)(t+1)}\left((s+1)(t+1)\right)=(s+1)(t+1)(st+1)\left((st)^2+st+1\right)$, $p_0(0)=-(s+1)(t+1)\left(s^2+st+t^2\right)$,

$p_{s+t+\sqrt{st}}\left(s+t+\sqrt{st}\right)=-2\sqrt{st}\left(s+t+\sqrt{st}\right)\left(st+1-\sqrt{st}\right)$, $p_{s+t-\sqrt{st}}\left(s+t-\sqrt{st}\right)=2\sqrt{st}\left(s+t-\sqrt{st}\right)\left(st+1+\sqrt{st}\right)$.

Die Dimensionen der Eigenräume lauten folglich:

$$\dim_{\mathbf{K}} E_\alpha((s+1)(t+1))=1$$

$$\dim_{\mathbf{K}} E_\alpha(0)=\frac{s^2((st)^2+st+1)}{s^2+st+t^2}$$

$$\dim_{\mathbf{K}} E_\alpha\left(s+t+\sqrt{st}\right) = \frac{st(s+1)(t+1)(st+1+\sqrt{st})(s+t-\sqrt{st})}{2(s^2+st+t^2)}$$

$$\dim_{\mathbf{K}} E_\alpha\left(s+t-\sqrt{st}\right) = \frac{st(s+1)(t+1)(st+1-\sqrt{st})(s+t+\sqrt{st})}{2(s^2+st+t^2)}$$

Darüber hinaus gilt: $\dim_{\mathbf{K}} E_\alpha(s+t+\sqrt{st}) = \dim_{\mathbf{K}} E_\alpha(s+t-\sqrt{st}) \Leftrightarrow s=1 \vee t=1$.

Das charakteristische Polynom ist folglich:

$$\chi_\alpha = X^{\frac{s^2[(st)^2+st+1]}{s^2+st+t^2}}[X-(s+1)(t+1)][X-(s+t+\sqrt{st})]^{\frac{st(s+1)(t+1)(st+1+\sqrt{st})}{2(s+t+\sqrt{st})}}[X-(s+t-\sqrt{st})]^{\frac{st(s+1)(t+1)(st+1-\sqrt{st})}{2(s+t-\sqrt{st})}}.$$

Ferner $\det(\alpha)=0$ und $\operatorname{spur}(\alpha)=(s+1)(t+1)\left((st)^2+st+1\right)$.

$E_\alpha\left((s+1)(t+1)\right)=\left[\sum_{A\in\Omega_1} A\right]$, $\left\{s^3A-s^2\sum_{d(B,A)=2}B+s\sum_{d(C,A)=4}C+\sum_{d(D,A)=6}D \;\middle|\; A\in\Omega_1\right\}$ ist ein Erzeugendensystem für $E_\alpha(0)$.

Gibt es eine Polarität, so erhalten wir $\sqrt{s},\sqrt{3s}\in\mathbf{Z}$.

4. $n=8$: Verallgemeinerte Achtecke

$$\mu_\alpha = X[X-(s+1)(t+1)][X-(s+t)][X-(s+t+\sqrt{2st})][X-(s+t-\sqrt{2st})]$$

$$\dim_{\mathbf{K}} E_\alpha(0) = \frac{s^4(st+1)((st)^2+1)}{(s+t)(s^2+t^2)}$$

$$\dim_{\mathbf{K}} E_\alpha((s+1)(t+1)) = 1$$

$$\dim_{\mathbf{K}} E_\alpha(s+t) = \frac{st(s+1)(t+1)((st)^2+1)}{2(s+t)}$$

$$\dim_{\mathbf{K}} E_\alpha(s+t+\sqrt{2st}) = \frac{st(s+1)(t+1)(st+1)(st+1+\sqrt{2st})(s+t-\sqrt{2st})}{4(s^2+t^2)}$$

$$\dim_{\mathbf{K}} E_\alpha(s+t-\sqrt{2st}) = \frac{st(s+1)(t+1)(st+1)(st+1-\sqrt{2st})(s+t+\sqrt{2st})}{4(s^2+t^2)}$$

Darüber hinaus gilt:

$\dim_{\mathbf{K}} E_\alpha(s+t+\sqrt{2st}) = \dim_{\mathbf{K}} E_\alpha(s+t-\sqrt{2st}) \Leftrightarrow s=1 \vee t=1$.

Ferner gilt: $\det(\alpha)=0$ und $\operatorname{spur}(\alpha)=(s+1)(t+1)\left((st)^3+(st)^2+st+1\right)$

Gäbe es eine Polarität, so wäre $\sqrt{2s}$, $\sqrt{s\left(2+\sqrt{2}\right)}$, $\sqrt{s\left(2-\sqrt{2}\right)}\in\mathbf{Z}$. Das ist unmöglich.

5. $n=12$: Verallgemeinerte Zwölfecke

Da $\sqrt{st}\in\mathbf{Z}$ sowie $\sqrt{3st}\in\mathbf{Z}$ für $s>1$ und $t>1$ nicht möglich sind, existiert kein verallgemeinertes 12-Eck.

Literatur

1955 G. Pickert: Projektive Ebenen, Grundlehren, Springer-Verlag.

1959 J. Tits: Sur le trialité et certains groupes qui s'en déduisent, Publ. Math. I.H.E.S. **2**, 14-60.

1962 J. Tits: Théorème de Bruhat et sous-groupes paraboliques, C. R. Acad. Sci. Paris **2**, 14-60.

1964 J. Tits: Algebraic and abstract simple groups, Ann. Math. **80,** 313-329.

1964 W. Feit and G. Higman: The Nonexistence of Certain Generalized Polygons, J. Alg. **1**, 114-131.

1973 R. Kilmoyer and L. Solomon: On the Theorem of Feit-Higman, J. Combi. Th. (A) **15**, 310-322.

1974 N. L. Biggs: Algebraic graph theory, Cambridge Univ. Press.

1974 J. Tits: Buildings of Spherical Type and finite BN-Pairs, Lecture Notes in Math. **386,** Springer-Verlag, Berlin.

1976 J. Tits: Non-existence de certain polygons généralisés, 1, Invent. Math. **36,** 275-284.

1979 J. Tits: Non-existence de certain polygons généralisés, II, Invent. Math. **51**, 267-269.

1979 R. Weiss: The nonexistence of certain Moufang polygons, Invent. Math. **51,** 261-266.

1984 W. M. Kantor: Generalized polygons, SCABs and GABs, in: *Buildings and the Geometry of Diagrams* (ed. L. A. Rosati), Springer Verlag, Berlin, 79-158.

Konstruktionen zu Vierecken

1968 S. E. Payne: Symmetric Representations of Nondegenerate Generalized *n*-gons, Proc. Amer. Math. Soc. **19**, 1271-1326.

1969 R. W. Ahrens & G. Szekeres: On a combinatorial generalization of the 27 lines associated with a cubic surface, J. Austral. Math. Soc. **10**, 485-492.

1971 M. Hall, Jr.: Affine generalized quadrilaterals, in: *Studies in pure mathematics* (L. Mirsky ed.), Academic Press, 113-116.

1971 S. E. Payne: Nonisomorphic generalized quadrangles, J. Algebra 18, 201-212.

1971 D. G. Higman: Partial geometries, generalized quadrangles and strongly regular graphs, in: *Atti Convegno di Geometria e sue Applicazioni,* Perugia, 141-159.

1972 S. E. Payne: Generalized quadrangles of order $(s-1,s+1)$, J. Algebra **22**, 97-119.

1974 P. J. Cameron: Partial quadrangles, Quart. J. Math **26**, 61-73.

1980 S. E. Payne: Generalized quadrangles as group coset geometries, Congr. Numer. **29**, 717-734.

1980 W. M. Kantor: Generalized quadrangles associated with $G_2(q)$, J. Combin. Theory Ser. A **29**, 212-219.

1981 J. A. Thas: New combinatorial characterization of generalized quadrangles, European J. of Combin. **2**, 299-303.

1985 S. E. Payne: A new infinite family of generalized quadrangles, Congr. Numer. **49**, 115-128.

1985 W. M. Kantor: Generalized quadrangles and translation planes, Algebras Groups Geom. **3**, 313-322.

1986 **W. M. Kantor:** Some generalized quadrangles with Parameters $\left(q^2, q\right)$, Math. Z. **192**, 45-50.

1988 **H. Gevaert** and **N. L. Johnsen:** Flocks of quadratic cones, generalized quadrangles and translation planes, Geom. Dedicata **27**, 301-317.

1991 **A. E. Brouwer:** A non-degenerate generalized quadrangle with lines of size four is finite, in: *Advances in Finite Geometries and Designs* (J. W. P. Hirschfeld, D. R. Hughes and J. A. Thas ed.), Oxford Science Publications, 7-18.

Übersichtsartikel für Vierecke

1973 **S. E. Payne:** Finite generalized quadrangles: a survey, in: *Proc. Int. Conf. on projective planes,* Wash. State Univ. Press, 291-361.

1976 **J. A. Thas** & **S. E. Payne:** Classical finite generalized quadrangles: a combinatorial study, Ars Combinatoria **2**, 57-110.

1977 **J. A. Thas:** Combinatorics of partial geometries and generalized quadrangles, in: *Higher Combinatorics* (M. Aigner ed.), Reidel, Dordrecht, 183-199.

1984 **J. A. Thas** & **S. E. Payne:** *Finite Generalized Quadrangles,* Pitman, London.

Konstruktionen für Sechsecke

1981 **W. Haemers** and **C. Roos:** An inequality for generalized hexagons, Geom. Dedicata **10**, 219-222.

1991 **L. Bader:** Flocks of cones and generalized hexagons, in: *Advances in Finite Geometries and Designs* (**J.** W. P. Hirschfeld, D. R. Hughes and J. A. Thas ed.), Oxford Science Publications, 7-18.

Übersichtsartikel für Sechsecke

1962 **G. J. Schellekens:** On a hexagonic strukture 1 & II, Ind. Math. **24**, 218-234.

1975 **R. Mathon:** 3-class association schemes, in: *Proc. Conf. on Algebraic Aspects of Combinatorics* (D. G. Corneil & E. Mendelsohn eds.), Congressus Numerantium XIII, Utilitas, Winnipeg 123-155.

1976 **A. Yanushka:** Generalized hexagons of order (s, s), Israel J. Math. **23,** 309-324.

1978 **M. A. Ronan:** A geometric characterization of Moufang hexagons, Ph. D. Thesis, University of Illinois.

1982 **U. Ott:** Eine Bemerkung über Polaritäten eines verallgemeinerten Hexagons, Geom. Dedicata,

Konstruktionen für Achtecke

1974 **D. G. Higman: Invariant** relations, coherent configurations and generalized polygons, in: *Combinatorics; part 3: combinatorial group theory,* (eds. M. Hall, Jr. and J. H. van Lint), Tracts **57**, Math. Centre, Amsterdam, 27-43.