Spur-K[X]-Dimension-Teiler-Satz

Theorem

Es sei $\mathbf{K}$ ein Körper und $\alpha \in End_{\mathbf{K}}\left(\mathbf{K}^m\right)$ ein Endomorphismus. Es sei μ_α das Minimalpolynom. Ferner sei $\mu_\alpha = p_\lambda \left(X-\lambda\right)^{r_\lambda}$ mit $p_\lambda\left(\lambda\right) \neq 0$. Bezeichnet $E_\alpha\left(\lambda\right)$ den verallgemeinerten Eigenraum von α bezüglich des Eigenwertes λ, so gilt die Beziehung

$$\operatorname{spur}\left(p_\lambda(\alpha)\right) = p_\lambda\left(\lambda\right)\cdot \dim_{\mathbf{K}}\left(E_\alpha\left(\lambda\right)\right) \text{ und } E_\alpha\left(\lambda\right) = p_\lambda\left(\alpha\right)\mathbf{K}^m .$$

Ist $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ eine Basis von $\mathbf{K}^m$, so erhalten wir:

$$E_\alpha\left(\lambda\right) = \left\langle p_\lambda\left(\alpha\right)\mathbf{e}_i \middle| 1 \le i \le m \right\rangle .$$

Beweis:

Für $f \in \mathbf{K}\left[X\right]$ und $\mathbf{v} \in \mathbf{K}^m$ ist $\mathbf{K}^m$ vermöge $f \cdot \mathbf{v} = f(\alpha)\mathbf{v}$ ein $\mathbf{K}\left[X\right]$-Modul. Ist nun $\mu_\alpha = p_\lambda\left(X-\lambda\right)^{r_\lambda}$ das Minimalpolynom mit $p_\lambda\left(\lambda\right) \neq 0$, so zerfällt $\mathbf{K}^m$ in die direkte Summe

$$E_\alpha\left(\lambda\right) \underset{\mathbf{K}[X]}{\oplus} \ker\left(p_\lambda\left(\alpha\right)\right).$$

Der verallgemeinerte Eigenraum $E_\alpha\left(\lambda\right)$ zerfällt weiter in eine direkte Summe von zyklischen Eigenräumen $E_\alpha^1\left(\lambda\right), \ldots, E_\alpha^s\left(\lambda\right)$. Insbesondere gibt es eine Basis $\mathbf{v}_1^i, \ldots, \mathbf{v}_{t_i}^i$ von $E_\alpha^i\left(\lambda\right)$ mit

$$\alpha\left(\mathbf{v}_1^i\right) = \lambda\mathbf{v}_1^i + \mathbf{v}_2^i, \ldots, \alpha\left(\mathbf{v}_k^i\right) = \lambda\mathbf{v}_k^i + \mathbf{v}_{k+1}^i, \ldots, \alpha\left(\mathbf{v}_{t_i}^i\right) = \lambda\mathbf{v}_{t_i}^i .$$

Folglich gilt $\alpha^n\left(\mathbf{v}_k^i\right) = \lambda^n\mathbf{v}_k^i + R_{k+1}^i$, wobei R_{k+1}^i eine Linearkombination von $\mathbf{v}_{k+1}^i, \ldots, \mathbf{v}_{t_i}^i$ und $R_{t_i+1}^i = 0$ ist. Es sei D eine Determinantenform auf $\mathbf{K}^m$. Ist $\mathbf{w}_j$ ein zyklischer Vektor, so ist

$$\begin{aligned} D\left(\mathbf{w}_1, \ldots, \alpha^n\left(\mathbf{w}_j\right), \ldots, \mathbf{w}_m\right) &= D\left(\mathbf{w}_1, \ldots, \lambda^n\mathbf{w}_j + \mathrm{R}_{j+1}, \ldots, \mathbf{w}_m\right) \\ &= D\left(\mathbf{w}_1, \ldots, \lambda^n\mathbf{w}_j, \ldots, \mathbf{w}_m\right). \end{aligned}$$

Ist $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_u$ eine Basis von $\ker\left(p_\lambda\right)$, so folgt auf der Basis der zyklischen Eigenräume und $\ker\left(p_\lambda\right)$

$$\begin{aligned} &\operatorname{spur}\left(p_\lambda(\alpha)\right)\cdot D\left(\mathbf{v}_1^1,\ldots,\mathbf{v}_{t_1}^1,\ldots,\mathbf{v}_1^s,\ldots,\mathbf{v}_{t_s}^s,\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_u\right) \\ &= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t_i} D\left(\mathbf{v}_1^1,\ldots,\mathbf{v}_{t_1}^1,\ldots,\mathbf{v}_1^i,\ldots,p_\lambda(\alpha)\mathbf{v}_j^i,\ldots,\mathbf{v}_{t_i}^i,\ldots,\mathbf{v}_1^s,\ldots,\mathbf{v}_{t_s}^s,\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_u\right) \\ &= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t_i} D\left(\mathbf{v}_1^1,\ldots,\mathbf{v}_{t_1}^1,\ldots,\mathbf{v}_1^i,\ldots,p_\lambda(\lambda)\mathbf{v}_j^i,\ldots,\mathbf{v}_{t_i}^i,\ldots,\mathbf{v}_1^s,\ldots,\mathbf{v}_{t_s}^s,\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_u\right) \\ &= p_\lambda(\lambda)\left(\sum_{i=1}^{s}\dim_{\mathbf{K}} E_\alpha^i(\lambda)\right) D\left(\mathbf{v}_1^1,\ldots,\mathbf{v}_{t_1}^1,\ldots,\mathbf{v}_1^s,\ldots,\mathbf{v}_{t_s}^s,\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_u\right) \\ &= p_\lambda(\lambda)\dim_{\mathbf{K}} E_\alpha(\lambda) D\left(\mathbf{v}_1^1,\ldots,\mathbf{v}_{t_1}^1,\ldots,\mathbf{v}_1^s,\ldots,\mathbf{v}_{t_s}^s,\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_u\right). \end{aligned}$$

Damit ist alles bewiesen.