6. Homotopie und das Lemma von Poincaré

In diesem Abschnitt betrachten wir nur Banachräume. Der Leser ist also aufgefordert mittels Karten die Aussagen auf Mannigfaltigkeiten zu übertragen. Dies ist keine schwierige Anforderung, da alle Aussagen lokaler Natur sind.

Es seien $\mathbf{E}$ und $\mathbf{F}$ Banachräume und es sei $U \subset \mathbf{E}$ offen. Es sei $\omega \in \Omega_r^k(U_{\mathbf{F}})$ eine Differentialform mit Werten in $\mathbf{F}$ (alle Vektorraumbündel sind trivial und D ist die kanonische Ableitung). ω heißt ***geschlossen*** oder ein ***Kozyklus***, wenn $d\omega = \mathbf{0}$ ist. Die Menge aller geschlossenen Differentialformen vom Grad k bezeichnen wir mit $Z_r^k(U_{\mathbf{F}})$.

Also $Z_r^k(U_{\mathbf{F}}) = \ker(d^k)$. Das Bild $d^{k-1}(\Omega_r^k(U_{\mathbf{F}}))$ heißt der Raum der ***exakten*** Differentialformen oder der ***Koränder*** und wird mit $B_r^k(U_{\mathbf{F}})$ bezeichnet. Wegen $dd = 0$ (man beachte, dass hier die Krümmung verschwindet) ist $B_r^k(U_{\mathbf{F}}) \subset Z_r^k(U_{\mathbf{F}})$.

Definition 6.1

Der Vektorraum $H_r^k(U_{\mathbf{F}}) := \ker(d^k)/im(d^{k-1})$ heißt der k-te ***Kohomologieraum von de Rham***.

Satz 6.2

Ist $f: U \to V$ eine differenzierbare Abbildung der Klasse C^r, so erinnern wir uns, dass für das pull-back von f gilt:

$$f^*: \Omega_r^k(V_{\mathbf{F}}) \to \Omega_r^k(U_{\mathbf{F}}).$$

Wegen $f^* d\omega = d(f^*\omega)$ induziert f daher eine lineare Abbildung

$$f^\#: H_r^k(V_{\mathbf{F}}) \to H_r^k(U_{\mathbf{F}}).$$

Es gelten wieder die bekannten Eigenschaften

$\mathbf{1}^\# = \mathbf{1}$, $(f \circ g)^\# = g^\# \circ f^\#$ und $(f^{-1})^\# = (f^\#)^{-1}$.

Definition 6.3

Es seien $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ Banachräume, $U \subseteq \mathbf{E}$, $V \subseteq \mathbf{F}$ und $f, g: U \to V$ differenzierbare Abbildungen der Klasse C^r.

f und g heißen C^r-homotop, wenn es eine Abbildung

$$\mathrm{H}: [0,1] \times U \to V$$

der Klasse C^r gibt, mit $\mathrm{H}(0, \bullet) = f$ und $\mathrm{H}(1, \bullet) = g$.

Die Differentiation der partiellen Abbildung $\mathrm{H}(\bullet, x)$, wobei $x \in U$ fest, ist als links- beziehungsweise rechtsseitige Ableitung zu verstehen.

Satz 6.4

Sind f und g C^r-homotop, dann ist $f^\# = g^\#$.

Beweis

Zuerst definieren wir Abbildungen $\alpha, \beta: U \to [0,1] \times U$, durch $\alpha(x) := (0, x)$ und $\beta(x) := (1, x)$. Ferner die Abbildung $K: \Omega_r^k(([0,1] \times U)_{\mathbf{F}}) \to \Omega_r^k(U_{\mathbf{F}})$ durch $(K\omega)(x)(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k-1}) = \int_0^1 \omega(t, x)((1,0), \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k-1})dt$, wobei wir $(0, \mathbf{e}_1)$ mit $\mathbf{e}_i \in \mathbf{E}$ identifizieren. Dann gilt: $Kd\omega + dK\omega = \beta^*\omega - \alpha^*\omega$.

$$
\begin{aligned}
(Kd\omega)(x)(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_k) &= \int_0^1 d\omega(t,x)((1,0),\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_k)dt \\
&= \int_0^1 \omega(t,x)(1)(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_k)dt + \sum_{i=1}^k (-1)^i \int_0^1 \omega'(t,x)(\mathbf{e}_i)((1,0),\mathbf{e}_1,\ldots,\overset{\wedge}{\mathbf{e}_i},\ldots,\mathbf{e}_k)dt \\
&= (\beta^*\omega - \alpha^*\omega)(x)(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_k) + \sum_{i=1}^k (-1)^i \int_0^1 \omega'(t,x)(\mathbf{e}_i)((1,0),\mathbf{e}_1,\ldots,\overset{\wedge}{\mathbf{e}_i},\ldots,\mathbf{e}_k)dt
\end{aligned}
$$

Ferner

$$
\begin{aligned}
(dK\omega)(x)(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_k) &= -\sum_{i=1}^k (-1)^i (K\omega)'(t,x)(\mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_1,\ldots,\overset{\wedge}{\mathbf{e}_i},\ldots,\mathbf{e}_k) \\
&= -\sum_{i=1}^k (-1)^i \int_0^1 \omega'(t,x)(\mathbf{e}_i)((1,0),\mathbf{e}_1,\ldots,\overset{\wedge}{\mathbf{e}_i},\ldots,\mathbf{e}_k)dt
\end{aligned}
$$

Nun sei H die differentielle Homotopie zwischen f und g. Es sei $\omega \in Z_r^k(V_{\mathbf{F}})$, dann ist

$$
\begin{aligned}
dK\,\mathrm{H}^*\,\omega &= \beta^*\,\mathrm{H}^*\,\omega - \alpha^*\,\mathrm{H}^*\,\omega \\
&= (\mathrm{H}\circ\beta)^*\,\omega - (\mathrm{H}\circ\alpha)^*\,\omega \\
&= g^*\omega - f^*\omega.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt $g^\# = f^\#$, denn f^* und g^* unterscheiden sich nur durch einen Korand.

Korollar 6.5 (Lemma von Poincaré)

Ist U zu einem Punkt zusammenziehbar, dann ist $H_k^r(U_{\mathbf{F}}) = 0$ für alle $k \geq 0$.

Mit anderen Worten: Ist $\omega \in \Omega_r^k(U_{\mathbf{F}})$ eine geschlossene Differentialform, dann existiert eine Differentialform $\sigma \in \Omega_{r+1}^{k-1}(U_{\mathbf{F}})$ mit $d\sigma = \omega$.

Beweis:
Wir setzen $f = 1_U$ und $g(x) = a$ für alle $x \in U$, dann ist $f^* = 1_{\Omega_r^k(U_{\mathbf{F}})}$ und $g^* = 0$ für alle $k > 1$.

Also $f^\# = 1_{H_r^k(U_{\mathbf{F}})}$ und $g^\# = 0$ implizieren $\omega = f^\#\omega = g^\#\omega = 0$.

Der Fall $k = 0$ ist offensichtlich, denn es gibt nur eine Zusammenhangskomponente. Folglich ist $H_k^r(U_{\mathbf{F}}) = Z_r^0(U_F) = 0$, denn $df = 0$ impliziert $f = const$ auf U.

Beispiele:

1. Es sei $U = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ und $\omega = \frac{1}{x^2+y^2}(dx + dy) \in \Omega_\infty^2(\mathbf{R}^2{}_{\mathbf{R}})$. Dann ist ω geschlossen, aber nicht exakt. Folglich ist $H_\infty^2(\mathbf{R}^2{}_{\mathbf{R}}) \neq 0$.

Auf welchem einfach zusammenhängenden Gebiet $U \subseteq \mathbf{R}^2$ ist ω exakt?

2. Es sei $\alpha = y\,dx - x\,dy + dz$. Es seien $f, g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ von der Klasse C^2. Wann ist $\alpha - g\,df$ geschlossen?
Man zeige, dass dann f und g unabhängig von z sind.

3. Es sei $U = \mathbf{R}^3$. Für $\omega = x\,y\,dx \wedge dy + 2x\,y\,dy \wedge dz - 2y\,dz \wedge dx$ finde man α mit $d\alpha = \omega$. Wir müssen $\alpha = -K\,H^*\omega$ berechnen. Da $\mathbf{R}^3$ einfachzusammenhängend, insbesondere sternförmig bezüglich Nullpunkt ist, dürfen wir $H(t,x) = (1-t)x$ wählen. Dies ist eine differentielle Homotopie zwischen der Identität und der konstanten Abbildung auf null. Also

$$
\begin{aligned}
H^*(\omega) &= H^*(xy\,dx\wedge dy + 2x\,dy\wedge dz - 2y\,dz\wedge dx)\\
&= ((1-t)x(1-t)y\,d((1-t)x)\wedge d((1-t)y)\\
&\quad + 2(1-t)x\,d((1-t)y)\wedge d((1-t)z)\\
&\quad - 2(1-t)y\,d((1-t)z)\wedge d((1-t)x))\\
&= (1-t)^2xy(-x\,dt+(1-t)dx)\wedge(-y\,dt+(1-t)dy)\\
&\quad + 2(1-t)x(-y\,dt+(1-t)\,dy)\wedge(-z\,dt+(1-t)\,dz)\\
&\quad - 2(1-t)y(-z\,dt+(1-t)\,dz)\wedge(-x\,dt+(1-t)\,dx)\\
&= [-((1-t)^3xy^2+2(1-t)^2yz)\,dx\\
&\quad -((1-t)^3x^2y-2(1-t)^2xz)\,dy\\
&\quad +(2(1-t)^2xy+2(1-t)^2xy)\,dz]\wedge dt+\rho
\end{aligned}
$$

Jetzt liefert K das Integral

$$
\begin{aligned}
-KH^*(\omega) &= \int_0^1 [(1-t)^3xy^2-2(1-t)^2y]dx\wedge dt\\
&\quad -\int_0^1 [(1-t)^3x^2y-2(1-t)^2xz]dy\wedge dt\\
&\quad +\int_0^1 4(1-t)xy\,dz\wedge dt\\
&= -(\frac{1}{4}xy^2+\frac{2}{3}yz)\,dx+(\frac{1}{4}x^2y-\frac{2}{3}xz)\,dy+\frac{4}{3}xy\,dz.
\end{aligned}
$$

Aufgabe:

Für $\omega := \sum_{i_1<\cdots<i_k} \omega_{i_1\ldots i_k}\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k} \in \Omega^k(U_{\mathbf{F}})$ mit $d\omega=0$ leite man eine Formel für $K\omega$ ab.

Hier erst noch Flüsse!

In vielen Fällen ist eine Differentialform noch zeitabhängig und werden über zeitlich veränderliche Gebiete integriert. Es soll daher noch ein Satz über die zeitliche Differentiation von nach Flüssen zeitabhängiger Vektorfelder zurückgeholter zeitabhängiger Differentialformen herleiten. Der Einfachheit halber verwenden wir folgende Abkürzungen.

$$
\dot{\beta}_t(x) := D_1\beta(t,x) \qquad\qquad \beta'_t(x) := D_2\beta(t,x)
$$

Satz

Es sei $\omega_t \in \Omega^r(M_{\mathbf{R}})$ eine zeitabhängige Differentialform, also

$$
\omega_t(p)(X_1(p),\ldots,X_r(p)) = \omega(t,p)(X_1(p),\ldots,X_r(p)) \in \mathbf{R}\,.
$$

Es sei α_t der Fluss des zeitabhängigen Vektorfeldes X_t, d. h. $\dot{\alpha}_t = X_t\circ\alpha_t$, oder $D_1\alpha(t,p) = X(t,\alpha(t,p))$. Wir setzen $\gamma_t := \alpha_t^*(\omega_t)$. Dann gilt

$$
\dot{\gamma}_t := \alpha_t^*(\dot{\omega}_t) + \alpha_t^*(L_{X_t}\omega_t)\,.
$$

Beweis:

Da die Aussage lokaler Natur ist, genügt es die Hauptteile zu betrachten. Hierbei lassen wir die Trivialisierungsumgebung weg. Wir setzen

$$
\beta_1(t) := \omega(t,\alpha(t,x)),\ \beta_2(t) := (\alpha'_t(x)X_1(x),\ldots,\alpha'_t(x)X_r(x)) \text{ und } w(t) := \beta_1(t)(\beta_2(t))\,.
$$

Mit 0.2.22 (8) und unter der Beachtung, dass $\beta_1(t)$ selbst eine Multilinearform ist, bekommen wir

$$
w'(t) = \beta'_1(t)(\beta_2(t)) + \sum_{i=1}^r \omega(t,\alpha(t,x))(\alpha'_t(x)X_1(x),\ldots,D_1D_2\alpha(t,x)X_i(x),\ldots,\alpha'_t(x)X_r(x))\,,
$$

so dass nur $\beta'_1(t)$ zu berechnen ist.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1'(t) &:= \boldsymbol{\omega}'(t,\boldsymbol{\alpha}(t,x))(1_{\mathbf{R}} \times \boldsymbol{\alpha}_x)'(t) \\
&\overset{*}{=} D_1\boldsymbol{\omega}(t,\boldsymbol{\alpha}(t,x)) + D_2\boldsymbol{\omega}(t,\boldsymbol{\alpha}(t,x))(D_1\boldsymbol{\alpha}(t,x)) \\
&= \dot{\boldsymbol{\omega}}_t(\boldsymbol{\alpha}_t(x)) + \boldsymbol{\omega}_t'(\boldsymbol{\alpha}_t(x))(X_t(\boldsymbol{\alpha}_t(x))
\end{aligned}
$$

wobei die Gleichheit * durch die Formel 0.23 (9) gegeben ist. Insgesamt erhalten wir mit $\boldsymbol{\gamma}_t := \boldsymbol{\alpha}_t^*(\boldsymbol{\omega}_t)$:

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\gamma}}_t(X_1(x),\dots,X_r(x)) &= \boldsymbol{\alpha}_t^*(\dot{\boldsymbol{\omega}}_t(x))(X_1(x),\dots,X_r(x)) + \boldsymbol{\omega}_t'(\boldsymbol{\alpha}_t(x))(X_t(\boldsymbol{\alpha}_t(x)))(\boldsymbol{\alpha}_t'(x)X_1(x),\dots,\boldsymbol{\alpha}_t'(x)X_r(x)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{\omega}(t,\boldsymbol{\alpha}(t,x))(\boldsymbol{\alpha}_t'(x)X_1(x),\dots,D_1D_2\boldsymbol{\alpha}(t,x)X_i(x),\dots,\boldsymbol{\alpha}_t'(x)X_r(x)) \\
&= \boldsymbol{\alpha}_t^*(\dot{\boldsymbol{\omega}}_t(x))(X_1(x),\dots,X_r(x)) + \boldsymbol{\omega}_t'(\boldsymbol{\alpha}_t(x))(X_t(\boldsymbol{\alpha}_t(x)))(\boldsymbol{\alpha}_t'(x)X_1(x),\dots,\boldsymbol{\alpha}_t'(x)X_r(x)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{\omega}(t,\boldsymbol{\alpha}(t,x))(\boldsymbol{\alpha}_t'(x)X_1(x),\dots,D_2(X_t\circ\boldsymbol{\alpha}_t)(x)X_i(x),\dots,\boldsymbol{\alpha}_t'(x)X_r(x)) \\
&= \boldsymbol{\alpha}_t^*(\dot{\boldsymbol{\omega}}_t(x))(X_1(x),\dots,X_r(x)) + \boldsymbol{\omega}_t'(\boldsymbol{\alpha}_t(x))(X_t(\boldsymbol{\alpha}_t(x)))(\boldsymbol{\alpha}_t'(x)X_1(x),\dots,\boldsymbol{\alpha}_t'(x)X_r(x)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{\omega}(t,\boldsymbol{\alpha}(t,x))(\boldsymbol{\alpha}_t'(x)X_1(x),\dots,X_t'(\boldsymbol{\alpha}_t(x))\boldsymbol{\alpha}_t'(x)X_i(x),\dots,\boldsymbol{\alpha}_t'(x)X_r(x)) \\
&= \boldsymbol{\alpha}_t^*(\dot{\boldsymbol{\omega}}_t(x))(X_1(x),\dots,X_r(x)) + \boldsymbol{\alpha}_t^*(L_{X_t}\boldsymbol{\omega}_t)(x)(X_1(x),\dots,X_r(x)) \\
&= \left(\boldsymbol{\alpha}_t^*(\dot{\boldsymbol{\omega}}_t(x)) + \boldsymbol{\alpha}_t^*(L_{X_t}\boldsymbol{\omega}_t)(x)\right)(X_1(x),\dots,X_r(x))
\end{aligned}
$$

Die letzte Gleichung ergibt sich mit 3.14 3. Aussage, wenn man die lokale Darstellung des Hauptteils betrachtet.

Zum Abschluss wollen wir uns ein wenig mit Strömen beschäftigen.