1. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

1.1 Differenzierbare Strukturen auf topologischen Räumen

Um auf einer Menge eine differenzierbare Struktur einführen zu können, bedarf es einen Raum, der es gestattet Ableitungen zu bilden. Da differenzieren eine lokale Eigenschaft ist, wird man versuchen die offen Mengen eines Banachraumes oder allgemeiner eines topologischen Vektorraumes auf die Menge zurückzuholen, sie dort „zu verkleben" um so eine differenzierbare Struktur zu erhalten. Man erinnere sich an Parameterdarstellungen von Kurven und Flächen. Diese Idee lässt sich verallgemeinern. Dabei gehen wir so vor, wie konkrete Konstruktionen vorgenommen werden können, um zu einer C^r–Struktur zu gelangen.

Zuvor jedoch ein **einführendes Beispiel**.

Es sei $M := \{ (x,y,z) \mid (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \wedge x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0 \}$. Es sei $\alpha : (0,2\pi) \times \mathbf{R} \to M$ definiert durch

$$\alpha(s,t) := (\cos(s)\sinh(t), \sin(s)\sinh(t), \cosh(t)).$$

Verifizieren Sie $\alpha\big((0,2\pi)\times\mathbf{R}\big) \subseteq M$ und α ist injektiv. α ist sogar C^∞. Mithin existiert α^{-1} und ist nach dem lokalen Umkehrsatz 0.4.4. stetig differenzierbar. Mithin ist $U := \alpha\big((0,2\pi)\times\mathbf{R}\big) \subseteq M$ offen und $h_U := \alpha^{-1} : U \to \mathbf{R}^2$ ein Diffeomorphismus auf $(0,2\pi)\times\mathbf{R}$. Es sei nun $V \subseteq M$ offen, so dass $M \subseteq U \cup V$ und $h_V : V \to \mathbf{R}^2$ ein weiterer Diffeomorphismus. Beachten Sie, dass es sich um zwei Exemplare des $\mathbf{R}^2$ handelt. Dann ist $h_V \circ h_U^{-1} : (0,2\pi)\times\mathbf{R} \to h_V(V)$ ein Diffeomorphismus. Wären h_U, h_V nur Abbildungen und wir wüssten nicht, dass sie differenzierbar sind, so kann aber $h_V \circ h_U^{-1} : (0,2\pi)\times\mathbf{R} \to h_V(V)$ auf Differenzierbarkeit untersucht werden, ohne $M \subseteq \mathbf{R}^3$ auf einzugehen.

Diese Betrachtungsweise führt uns zur richtigen Idee.

Es wird in dieser Vorlesung immer $1 \le r$ für alle C^r-Abbildungen vorausgesetzt.

Definition 1.1.1:
Es sei M eine Menge und $S \subseteq 2^M \setminus \{\varnothing\}$ eine Teilmenge. Es sei $\mathbf{E}$ ein Banachraum. Ein ***einfacher* E*-wertiger C^r-Atlas*** oder ein ***einfacher C^r-Atlas mit Werten in* E *für*** M ist eine Menge von Abbildungen $H(S) := \{ h_U \mid U \in S \}$, wobei $h_U : U \to U' \subseteq \mathbf{E}$ bijektiv ist und die Abbildungen

$$a_V^U := h_V \circ h_U^{-1} : h_U(U \cap V) \to h_V\big(U \cap V\big),$$

$h_U, h_V \in H(S)$, von der Klasse C^r sind. Die Abbildungen a_V^U heißen ***Übergangsabbildungen***. Die Elemente aus S heißen ***Koordinatenbereiche für*** M, h_U heißt ***lokale Karte*** und $h_U(p)$ heißt ***die Koordinate des Punktes*** $p \in M$ in der lokalen Karte h_U.

Bemerkung: Stellen Sie sich der Einfachheit halber die Mengen $h_U(U \cap V)$ als relativ offen vor. Zu jeder Teilmenge $U \in S$ gibt es also genau eine Abbildung h_U. Daher einfacher Atlas!

Es sei $H(S) := \{ h_U \mid U \subseteq S \}$ ein einfacher **E**-wertiger C^r-Atlas für M. Eine lokale Karte $g_V, V \subseteq M$ heißt ***verträglich*** mit $H(S)$, wenn die Übergangsabbildungen $h_U \circ g_V^{-1}$ und $g_V \circ h_U^{-1}$ für alle h_U in $H(S)$ von der Klasse C^r sind. Entsprechend heißen zwei einfache **E**-wertige C^r-Atlanten verträglich.

Ein einfacher E-wertiger C^r-Atlas $H(S)$ für M heißt ein ***einfacher überdeckender*** **E**-wertiger C^r-Atlas, wenn $M \subseteq \bigcup_{V \in S} V$.

Es seien $H_i(S_i), i \in I$ einfache verträgliche **E**-wertige C^r-Atlanten für M. Eine Teilmenge $\mathscr{A} \subseteq \bigcup_{i\in I} H_i(S_i)$ heißt ein **E**-***wertiger*** C^r ***-Atlas für M***.

Entsprechend heißt ein **E**-wertiger C^r-Atlas $\mathscr{A}$ ein ***überdeckender*** **E**-***wertiger*** C^r ***-Atlas***, wenn $M \subseteq \bigcup_{V \in \bigcup_{i\in I} S_i} V$.

Ein **E**-wertiger C^r-Atlas $\mathscr{A}$ heißt ***vollständig*** oder ***maximal***, wenn $\mathscr{A}$ ein überdeckender C^r-Atlas ist und $\mathscr{A}$ alle verträglichen C^r-Atlanten mit Werten in **E** enthält.

Bemerkung:
Jeder vollständige **E**-wertige C^r-Atlas lässt sich als Vereinigung einfacher **E**-wertiger C^r-Atlanten beschreiben.

Proposition 1.1.2:
Jeder überdeckende C^r-Atlas $\mathscr{A}$ mit Werten in **E** kann in genau einen vollständigen **E**-wertigen C^r-Atlas $\mathscr{A}_{\mathrm{v}}$ eingebettet werden.

Beweis:
1. Es seien $h_U \in \mathscr{A}$, $g_V \notin \mathscr{A}$ zwei lokale Karten und es sei $h_U \circ g_V^{-1}$ von der Klasse C^r. Dann ist g_V mit $\mathscr{A}$ verträglich. Dazu sei $k_W \in \mathscr{A}$ beliebig, dann ist

$$(k_W \circ g_V^{-1})|_{g_V(W\cap V\cap U)} = (k_W \circ h_U^{-1})|_{h_U(W\cap V\cap U)} \circ (h_U \circ g_V^{-1})|_{g_V(W\cap V\cap U)}$$

Wegen $h_U(W\cap V\cap U) \subseteq h_U(W\cap U), g_V(W\cap V\cap U) \subseteq g_V(W\cap U)$ folgt nun die Behauptung aus der „Kettenregel“ und

$$(k_W \circ g_V^{-1})|_{g_V(W\cap V)} = (k_W \circ g_V^{-1})|_{\bigcap_{T\in \mathbf{X}} g_V(T\cap W\cap V)}, \; \mathbf{X} \in \mathrm{Cov}(M).$$

2. Es sei nun $\mathscr{A}_{\mathrm{v}}$ ein vollständiger C^r-Atlas, der mit allen lokalen Karten von $\mathscr{A}$ verträglich ist. Dann folgt aus **1.**, dass $\mathscr{A}$ in $\mathscr{A}_{\mathrm{v}}$ enthalten und $\mathscr{A}_{\mathrm{v}}$ mit $\mathscr{A}$ ein überdeckender C^r-Atlas mit Werten in **E** ist.

Es sei $\mathscr{B}$ ein weiterer **E**-wertiger C^r-Atlas, der $\mathscr{A}$ enthält. Dann ist jede lokale Karte aus $\mathscr{B}$ mit $\mathscr{A}_{\mathrm{v}}$ verträglich. Folglich gilt $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}_{\mathrm{v}}$. Ist $\mathscr{B}$ vollständig, so gilt auch $\mathscr{A}_{\mathrm{v}} \subseteq \mathscr{B}$, also $\mathscr{B} = \mathscr{A}_{\mathrm{v}}$.

Definition 1.1.3:
Ein vollständiger **E**-wertiger C^r-Atlas $\mathscr{A}$ auf M heißt eine C^r ***-Struktur auf M***. Das Tripel $(M, \mathscr{A}, \mathbf{E})$ heißt dann eine C^r ***-Mannigfaltigkeit***.

Satz 1.1.4:
Es sei $(M, \mathscr{A}, \mathbf{E})$ eine C^r-Mannigfaltigkeit. Auf M gibt es genau eine Topologie, so dass alle $h_U \in \mathscr{A}$ Homöomorphismen sind.

Beweis:
Es seien $\{h_U(U), \tau_{h_U(U)}\}_{h_U \in \mathrm{A}}$ die relativtopologischen Räume, wobei τ die Topologie auf **E** ist, die durch die Norm induziert wird. Es sei

$$\boldsymbol{S} := \bigcup_{h_U \in \mathrm{A}} \left\{ h_U^{-1}(V) \,\middle|\, V \in \tau_{h_U(U)} \right\}.$$

Dann ist $\boldsymbol{S}$ Subbasis einer eindeutigen Topologie. Mit anderen Worten:
Das System der Durchschnitte endlich vieler Mengen von $\boldsymbol{S}$ ist eine Basis $\boldsymbol{B}$ dieser Topologie.

Bemerkung:
Aufgrund des Satzes 1.1.4 wird M ab sofort als topologischer Raum betrachtet, für den alle lokalen Karten Homöomorphismen sind. Ferner sprechen wir nur noch kurz von den Atlanten.

Beispiele und Aufgaben:

1. Der $\mathbf{R}^\mathbf{n}$ versehen mit der einzigen lokalen Karte $1_{\mathbf{R}^\mathbf{n}}$ als $\mathbf{R}^\mathbf{n}$- wertigen Atlas ist selbst eine C^∞-Mannigfaltigkeit.

2. Die reellen Zahlen $\mathbf{R}$ versehen mit der lokalen Karte $\iota^3, \iota^3(x) = x^3$ als $\mathbf{R}$-wertigen Atlas ist eine C^∞-Mannigfaltigkeit.

3. Sind $h_U \in H(S_1)$ und $g_V \in G(S_2)$ zwei unverträgliche Karten, so sind $H(S_1)$ und $G(S_2)$ unverträglich.

4. Zeigen Sie, dass die Atlanten in 2. und 1. für $n = 1$ nicht verträglich sind.

Satz 1.1.5:
Es seien $(M, \mathcal{A}, \mathbf{E})$ und $(N, \mathcal{B}, \mathbf{F})$ C^r-Mannigfaltigkeiten. Dann ist $(M \times N, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mathbf{E} \times \mathbf{F})$ eine C^r-Mannigfaltigkeit.

Der Beweis ist eine leichte Übungsaufgabe.

Vereinbarung:
Jeder Banachraum $\mathbf{E}$ wird mit dem Atlas $\{1_\mathbf{E}\}$ als C^∞-Mannigfaltigkeit angesehen.

Definition 1.1.6:
Es seien $(M, \mathcal{A}, \mathbf{E})$ und $(N, \mathcal{B}, \mathbf{F})$ C^r-Mannigfaltigkeiten. Es sei $f: M \to N$ eine Abbildung.

i) f heißt ***differenzierbar an der Stelle*** $p \in M$, wenn für je eine lokale Karte $h_U \in \mathcal{A}$ und $k_V \in \mathcal{B}$ mit $p \in U \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ die Abbildung

$$f_V^U := k_V \circ f \circ h_U^{-1} : h_U(U) \to k_V(V)$$

an der Stelle $h_U(p)$ differenzierbar ist.

ii) f heißt ***von der Klasse*** $C^s, 1 \le s \le r$, wenn für jede lokale Karte $h_U \in \mathcal{A}$ und $k_V \in \mathcal{B}$ mit $U \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ die Abbildung $f_V^U := k_V \circ f \circ h_U^{-1} : h_U(U) \to k_V(V)$ von der Klasse C^s ist.

f_V^U heißt die ***Koordinatendarstellung*** von f in den Karten h_U und k_V.

iii) Ist f sogar ein Homöomorphismus von U auf V, so heißt f ***lokaler U-Diffeomorphismus***, wenn f auf U und f^{-1} auf V von der Klasse C^1 sind.

Entsprechend heißt f ein C^s***-Diffeomorphismus***.

Bemerkung:
Alle Übergangsabbildungen a_V^U sind C^r-Diffeomorphismen. Dies folgt mit $f = 1_M$.

Proposition 1.1.7:
Die Differenzierbarkeit von f hängt nicht von der Wahl einer Karte der C^r-Struktur ab.

Beweis:
Es seien hat $h_{U'}$ und hat $k_{V'}$ zwei weitere lokale Karten sowie $p \in U \cap U'$ und $f(p) \in V \cap V'$. Dann ist $f_{V'}^{U'} := b_{V'}^V \circ f_V^U \circ a_U^{U'}$ auf den Schnittmengen. Da hat $b_{V'}^V := k_{V'} \circ k_V^{-1}$ und $a_U^{U'} := h_U \circ h_{U'}^{-1}$ zwei C^r-Diffeomorphismen sind, ist damit alles gezeigt.

Satz 1.1.8:
Es seien $(M, \mathscr{A}, \mathbf{E})$, $(N, \mathscr{B}, \mathbf{F})$ und $(L, \mathscr{C}, \mathbf{G})$ C^r-Mannigfaltigkeiten. Sind $f : M \to N$, $g : N \to L$ von der Klasse C^s, und ist $f(M) \cap g^{-1}(L) \neq \emptyset$, so ist $g \circ f : M \to L$ ebenfalls von der Klasse C^s.

Beweis:
$g_W^V \circ f_V^U = (g \circ f)_W^U$.

Definition 1.1.9:
Es sei $(M, \mathscr{A}, \mathbf{E})$ eine C^r-Mannigfaltigkeit. Eine ***offene*** ***C^r-Untermannigfaltigkeit*** von M ist eine offene Menge $O \subseteq M$ versehen mit der C^r-Struktur $\mathscr{A}_O$, die wie folgt definiert ist:

Zu jedem $V \in \tau_O := \{U \cap O \mid U \in \tau_M \wedge U \cap O \neq \emptyset\}$, wähle ein $h_W \in \mathscr{A}$ mit $W \cap O = V$. Dann ist $\mathscr{A}(O) := \{\, h_W |_{W \cap O} \;\big|\; W \cap O \neq \emptyset \,\}$, ein einfacher **E**-wertiger C^r-Atlas auf *O*.

Es sei $\mathscr{A}_O$ der nach 1.1.2 eindeutig bestimmte vollständige **E**-wertige C^r-Atlas auf *O*, dann hängt $\mathscr{A}_O$ nicht von der Konstruktion $\mathscr{A}(O)$ ab.
Dazu sei $\widehat{H}(O)$ ein anderer einfacher **E**-wertiger C^r-Atlas auf *O*. Es genügt zu zeigen, dass hat $\widehat{H}(O)$ mit $\mathscr{A}(O)$ verträglich ist. Sei $g_D \in \widehat{H}(O)$. Dann gibt es $\widehat{D} \in \tau_M$ mit $g_D = g_{\widehat{D}} |_{\widehat{D} \cap O}$. Ist $g_D \in \mathscr{A}(O)$, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls ist $g_{\widehat{D}}$ mit h_U für $h_U |_{U \cap O} \in \mathscr{A}(O)$ verträglich, da $g_D,\ h_U \in \mathscr{A}$. Folglich ist g_D mit $h_U |_{U \cap O} \in \mathscr{A}(O)$ verträglich.

Diese Untermannigfaltigkeit bezeichnen wir mit $(O, \mathscr{A}_O, \mathbf{E})$.

Definition 1.1.10:
Es sei $(M, \mathscr{A}, \mathbf{E})$ eine C^r-Mannigfaltigkeit. Eine C^r-Untermannigfaltigkeit von *M* ist eine Teilmenge $K \subseteq M$ mit folgender Eigenschaft:
Zu jedem Punkt $p \in K$ existiert eine lokale Karte $h_U \in \mathscr{A}$ mit $x \in U$, so dass gilt:

$$h_U : U \to \mathbf{F} \times \mathbf{G} \quad \text{und} \quad h_U(U \cap K) = h_U(U) \cap (\mathbf{F} \times \{\mathbf{0}\}).$$

Vereinbarung :
Im folgenden bezeichnen wir mit $\mathbf{M_r}$ die Menge aller C^r-Mannigfaltigkeiten.

Bemerkung:
In der Arbeit: On manifolds homeomorphic to the 7-sphere (in: Ann. of Math. 64, S 94 – 405 (1956)) zeigte Milnor, dass es verschiedene C^r-Strukturen gibt, die nicht diffeomorph sind.

In einer anderen Arbeit: A manifold which does not admit any differentiable structure (in: Comment Math. Helv. 34, 257-270 (1960)) zeigte Kervaire, dass es sogar topologische Mannigfaltigkeiten gibt, die überhaupt keine C^r-Struktur zulassen.

1.2 Tangentialvektorraum und Kotangentialvektorraum

In diesem Abschnitt sollen verschiedene Konstruktionsmöglichkeiten für Tangentialvektoren vorgestellt werden. Natürlich werden wir dabei immer auf die lokale Differenzierbarkeit im Banachraum zurückgreifen.

Es sei $I \subseteq \mathbf{R}$ ein Intervall und $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung mit $f'(s) \neq 0$. Wir sagen: $f(s) = (f_1(s), \cdots, f_n(s))$ ist eine parametrisierte Kurve im $\mathbf{R}^n$. Die Ableitung $f'(s)$ ist ein Element aus $\mathscr{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$. Vermöge $f'(s)(1) \in \mathbf{R}^n$ identifizieren wir $f'(s)(1)$ mit $f'(s)$. Folglich ist $f'(s_0)\mathbf{R}$ eine Gerade im $\mathbf{R}^n$ und $f(s_0) + f'(s_0)\mathbf{R}$ eine affine Gerade durch den Punkt $f(s_0)$ mit Richtung $f'(s_0)$.

Wie wir wissen, beschreiben diese affinen Geraden die Tangentialgeraden der Kurve. Folglich sind zur Beschreibung zwei Werte von Interesse. Erstens der Punkt der Kurve und zweitens die Richtung der Tangente.

Ist nun umgekehrt eine Kurve *K* abstrakt gegeben, $p \in K$ ein Punkt und t_p ein Tangentenvektor in *p*, so wird der Tangentialraum im Punkt *p* vollständig durch das Paar (p, t_p) beschrieben. Es sei *U* eine Umgebung von *p*, so dass $K \cap U$ zusammenhängend ist. Es bezeichne $V := K \cap U$ die auf *V* eingeschränkte Kurve. Dann wird der Tangentialraum im Punkt *p* auch durch (p, t_p) beschrieben, denn tangieren ist eine lokale Eigenschaft. Bezeichnen wir den Tangentialraum im Punkt *p* durch T_pK, so ist $T_pK = T_pV \cong \{p\} \times \mathbf{R}$.

Als erstes geben wir eine Definition mittel Kurven durch einen Punkt an.

Definition 1.2.1:
Es sei $M \in \mathbf{M_r}$, $r \geq 1$. Es sei $I \subseteq \mathbf{R}$ offen mit $0 \in I$. Es sei

$$C_p^r(I, M) := \left\{ c \in C^r(I, M) \mid c(0) = p \right\}$$

die Menge der in einer offenen Umgebung von $0 \in I$ stetig differenzierbaren Kurven durch *p*.

Zwei Kurven $c_1, c_2 \in C_p^r(I, M)$ heißen ***äquivalent***, wenn für eine lokale Karte h_U mit $p \in U$ gilt:

$$(h_U \circ c_1)'(0) = (h_U \circ c_2)'(0).$$

Man zeige, dass hierdurch eine Äquivalenzrelation definiert wird.

Eine Äquivalenzklasse $[c]_p := \left\{ c_1 \in C_p^r(I, M) \mid c_1 \underset{p}{\approx} c \right\}$ heißt ***Tangentialvektor an p von M***. Die Menge aller Tangentialvektoren an *p* wird mit T_pM bezeichnet, also

$$T_pM := \left\{ [c]_p \mid c \in C_p^r(I, M) \right\}.$$

Wir haben noch zu verifizieren, dass die Definition unabhängig von der lokalen Karte ist. Seien daher $c_1, c_2 \in C_p^r(I, M)$ und g_V eine weitere lokale Karte der C^r-Mannigfaltigkeit *M* mit $p \in V$. Es sei $a_U^V := h_U \circ g_V^{-1}$. Dann ist

$$\begin{aligned}(h_U \circ c_1)'(0) &= (h_U \circ g_V^{-1} \circ g_V \circ c_1)'(0)\\ &= (h_U \circ g_V^{-1})'((g_V \circ c_1)(0))((g_V \circ c_1)'(0))\\ &= (a_U^V)'(g_V(p))((g_V \circ c_1)'(0))\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$(a_U^V)'(g_V(p))(g_V \circ c_1)'(0) = (a_U^V)'(g_V(p))(g_V \circ c_2)'(0).$$

Nun ist aber a_U^V ein lokaler $g_V(V \cap U)$-Diffeomorphismus, denn $a_V^U \circ a_U^V = 1_{g_V(V \cap U)}$ und $a_U^V \circ a_V^U = 1_{h_U(V \cap U)}$. Nach 0.2.22 (1) und (4) gilt damit $(a_V^U)'(h_U(p))(a_U^V)'(g_V(p)) = 1_E$ und $(a_U^V)'(g_V(p))(a_V^U)'(h_U(p)) = 1_E$. Daraus folgt die Behauptung $(g_V \circ c_1)'(0) = (g_V \circ c_2)'(0)$.

Da die Definition unabhängig von der lokalen Karte ist, setzen wir $h_U \circ c =: c_U$ als lokale Darstellung der Kurve *c*.

Proposition 1.2.2:

Es sei $M \in \mathbf{M_r}$ und $p \in M$ ein Punkt. Es sei **e** ein Vektor im Banachraum **E** als Modell für *M*.

1. Es gibt eine Kurve $c \in C^\infty(I, M)$, so dass $[c]_p$ die lokale Darstellung **e** hat.

2. Die **K**-Vektorraumstruktur auf **E** induziert auf T_pM eine Vektorraumstruktur, so dass $T_pM \cong \mathbf{E}$.

Beweis:

1. Wir definieren $c(t) := h_U^{-1}(h_U(p) + t\mathbf{e})$ in der lokalen Karte h_U. Dann ist $c(0) = p$ und $c_U'(0)(1) = \mathbf{e}$. Insbesondere ist $c \in C_p^\infty(I, M)$.

2. Zuerst definieren wir eine Abbildung

$$T_p h_U : \begin{cases} T_pM & \to & \{h_U(p)\} \times \mathbf{E} \\ [c]_p & \mapsto & (h_U(p), c_U'(0)(1)) \end{cases}.$$

Nach 1.2.1 ist $T_p h_U$ injektiv und nach 1. auch surjektiv. Sei pr_2 die Projektion auf den zweiten Faktor, dann ist $pr_2 \circ T_p h_U$ eine bijektive Abbildung.

Es seien **a** und **b** zwei Vektoren in **E**. Es sei $r \in \mathbf{K}$. Nach 1. seien $[c_\mathbf{a}]_p$ und $[c_\mathbf{b}]_p$ die zu **a** und **b** korrespondierenden Tangentialvektoren. Dann ist

$$[c_\mathbf{a}]_p + [c_\mathbf{b}]_p := (pr_2 \circ T_p h_U)^{-1}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \text{ und}$$

$$r \cdot [c_\mathbf{a}]_p := (pr_2 \circ T_p h_U)^{-1}(r \cdot \mathbf{a}).$$

Der Vektor $c_U'(0)(1)$ heißt der Hauptteil der lokalen Darstellung des Tangentialvektors $[c]_p$.

Korollar 1.2.3:

Ist *M* endlichdimensional, also $\mathbf{E} = \mathbf{R}^n$, so folgt mit der Basis $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$:

Die Tangentialvektoren $[c_{\mathbf{e}_1}]_p, \ldots, [c_{\mathbf{e}_n}]_p$ mit $c_{\mathbf{e}_1}(t) := h_U^{-1}(h_U(p) + t\mathbf{e}_i)$, bilden eine Basis des Tangentialraumes T_pM. Ist $\{\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n\}$ die zu $\{[c_{\mathbf{e}_1}]_p, \ldots, [c_{\mathbf{e}_n}]_p\}$ korrespondierende Basis in der lokalen Karte g_V, dann gilt mit $a_V^U := g_V \circ h_U^{-1}$ die Transformationsformel (vgl. 0.2.24 (10)):

$$\mathbf{d}_j = \left((a_V^U)'(h_U(p))\right)\mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^n D_j(a_V^U)_k(h_U(p))\mathbf{e}_k.$$

Beweis:

Aus $\mathbf{d}_j = (g_V \circ h_U^{-1} \circ h_U \circ c_{\mathbf{e}_j})'(0)(1)$ und

$$\left(D_i(a_V^U)_m(h_U(p))_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le m \le n}}\right) = \begin{pmatrix} D_1(a_V^U)_1 & \cdots & D_1(a_V^U)_n \\ \vdots & & \vdots \\ D_n(a_V^U)_1 & \cdots & D_n(a_V^U)_n \end{pmatrix}\left(h_U(p)\right)$$

folgt die Behauptung.

Definition und Proposition 1.2.4:
Es seien $L, M, N \in \mathbf{M}_r$. Es $f \in C^s(L, M)$ sei eine s-mal stetig differenzierbare Abbildung von L in M.
1. f induziert eine ***Tangentialabbildung***

$$T_p f : \begin{cases} T_p L & \to & T_{f(p)} M \\ [c]_p & \mapsto & [f \circ c]_{f(p)} \end{cases}.$$

2. Ist $g \in C^s(M, N)$, so gilt: $T_p(g \circ f) = T_{f(p)} g \circ T_p f$.
3. $T_p 1_M = 1_{T_p M}$
4. Die lokale Darstellung von $T_p f$ ist

$$\begin{aligned}(T_p f)_V^U (h_U(p), c_U'(0)(1)) &= (f_V^U(h_U(p)), (f_V^U)'(h_U(p))(c_U'(0)(1)) \\ &= (k_V(f(p)), (f \circ c)_V{}'(0)(1))\end{aligned}.$$

Beweis:
1. Da $f \circ c$ eine Kurve in M ist, bleibt nur die Wohldefiniertheit zu zeigen. Seien dazu c und $\hat{c}$ zwei Kurven durch p: $[c]_p = [\hat{c}]_p$, also $c(0) = p = \hat{c}(0)$ und $c_U{}'(0) = \hat{c}_U{}'(0)$. Aus $f \in C^s(L, M)$ folgt $(f_V^U)'(h_U(p)) \in \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. Folglich ist

$$\begin{aligned}(k_V \circ f \circ c)'(0) &= (k_V \circ f \circ h_U^{-1} \circ h_U \circ c)'(0) \\ &= (f_V^U)'(h_U(p))(c_U{}'(0)) \\ &= (f_V^U)'(h_U(p))(\hat{c}_U{}'(0)) \\ &= (k_V \circ f \circ \hat{c})'(0)\end{aligned}.$$

2. $T_p(g \circ f)[c]_p = [g \circ f \circ c]_{g(f(p))} = T_{f(p)} g [f \circ c]_{f(p)} = T_{f(p)} g \circ T_p f [c]_p$.

3. $T_p 1_M [c]_p = [1_M \circ c]_p = [c]_p = 1_{T_p M}[c]_p$.

4. Mit $(T_p f)_V^U = T_{f(p)} k_V \circ T_p f \circ T_p h_U^{-1}$ ist

$$\begin{aligned}(T_p f)_V^U (h_U(p), c_U{}'(0)(1)) &= (T_{f(p)} k_V \circ T_p f \circ T_p h_U^{-1})(c_U{}'(0)(1)) \\ &= (T_{f(p)} k_V \circ T_p f)[c]_p \\ &= T_{f(p)} k_V [f \circ c]_{f(p)} \\ &= (k_V(f(p)), (f \circ c)_V{}'(0)(1)) \\ &= (f_V^U(h_U(p)), (f_V^U)'(h_U(p))(c_U{}'(0)(1)))\end{aligned}$$

Bemerkung 1.2.5:
Fassen wir die Banachräume als Mannigfaltigkeiten auf, so dürfen wir $T_x \mathbf{E}$ mit $\{x\} \times \mathbf{E}$ identifizieren. Hierdurch erhalten wir $(T_p f)_V^U = T_p(f_V^U)$ und $[f_V^U \circ c_U]_{f_V^U(h_U(p))} = (T_p f)[c_U]_{h_U(p)}$.

Definition 1.2.6:
Es sei $M \in \mathbf{M}_r$ eine C^r-Mannigfaltigkeit und $\mathbf{F}$ ein Banachraum. Es seien $f, g \in C^s(M, \mathbf{F})$.
Die Abbildungen f und g heißen ***äquivalent über*** $p \in M$, wenn es eine offene Umgebung U mit $p \in U$ gibt, so dass $f|U = g|U$. Wir bezeichnen diese Äquivalenzrelation mit $f \underset{p}{\approx} g$, die Äquivalenzklasse mit $\overline{f}$ und die Menge aller über p äquivalenten Klassen mit $K_p^s(M, \mathbf{F})$. Die Äquivalenzklassen heißen ***Keime*** der Abbildungen.
Durch $\overline{f} + \overline{g} = \overline{f + g}$ und $k\overline{f} = \overline{kf}$ für $k \in \mathbf{K}$, $\mathbf{K} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$ wird $K_p^s(M, \mathbf{F})$ zu ein $\mathbf{K}$-Modul.

Definition 1.2.7:
Eine Abbildung $D:R\to S$, wobei R ein Ring und S eine R-Algebra ist, heißt eine ***Derivation***, wenn folgende Bedingungen für $\lambda,\mu\in\mathbf{K}$ und $a,b\in R$ erfüllt sind:

1. $D(\lambda a+\mu b)=\lambda D(a)+\mu D(b)$,

2. $D(ab)=D(a)b+aD(b)$.

An dieser Stelle wollen wir einen Vorgriff auf ***Vektorfelder*** vornehmen, obwohl die Definition eines Vektorfeldes noch nicht vorliegt. Ein Vektorfeld ist eine Abbildung $X:M\to\bigcup_{p\in M}T_pM=:TM$ der Klasse C^r, wobei $X(p)\in T_pM$ ein Tangentialvektor ist.

Theorem 1.2.8:
Es sei $M\in\mathbf{M_r}$ mit Darstellungsraum $\mathbf{E}$. Es sei $\mathbf{F}$ ein Banachraum und $\mathcal{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ nicht der Nullraum. Es existiere eine stetige Bilinearform Φ auf **F** mit Werten in **F**, so dass $\Phi(\Phi(a,b),c)=\Phi(a,\Phi(b,c))$, dann wird

1. $K_p^s(M,\mathbf{F})$ durch $(\overline{f}\cdot\overline{g})(p):=\Phi(f(p),g(p))$ zu einer $K_p^q(M,\mathbf{F})$-Algebra, $q\geq s$.

2. Jedes Vektorfeld X auf M definiert eine Derivation $\delta_X:K_p^s(M,\mathbf{F})\to K_p^{s-1}(M,\mathbf{F})$ durch

$$\delta_X(\overline{f})(p):=(f^U)'(h_U(p))(c_U'(0)(1)).$$

Verschiedene Tangentialvektoren definieren verschiedene Derivationen.

Beweis:
Die Aussage **1.** ist eine Übungsaufgabe.
2. Da für $g\in\overline{f}$ in einer ganzen offenen Umgebung V die Gleichheit $g|V=f|V$ gilt, ist die Definition unabhängig vom Repräsentanten. Sie ist auch unabhängig von den gewählten lokalen Karten, denn $k_W^{-1}\circ h_U$ und $h_U^{-1}\circ k_W$ sind inverse Diffeomorphismen.
Seien also $\overline{f},\overline{g}\in K_p^s(M,\mathbf{F})$ und $\lambda,\mu\in K$.

$$\begin{aligned}\delta_X(\lambda\overline{f}+\mu\overline{g})(p)&=\delta_X(\overline{\lambda f+\mu g})(p)\\&=((\lambda f+\mu g)^U)'(h_U(p))(c_U'(0)(1))\\&=(\lambda f^U+\mu g^U)'(h_U(p))(c_U'(0)(1))\\&=((\lambda f^U)'+(\mu g^U)')(h_U(p))(c_U'(0)(1))\\&=(\lambda f^U)'(h_U(p))(c_U'(0)(1))+(\mu g^U)'(h_U(p))(c_U'(0)(1))\\&=\lambda(f^U)'(h_U(p))(c_U'(0)(1))+\mu(g^U)'(h_U(p))(c_U'(0)(1))\\&=(\lambda\delta_X(f)+\mu\delta_X(g))(p)\end{aligned}$$

Damit ist die erste Bedingung erfüllt. Es sei nun $w(x):=\Phi(u(x),v(x))$.

$$\begin{aligned}\delta_X(\overline{f}\cdot\overline{g})(p)&=(w\circ h_U^{-1})'(h_U(p))(c_U'(0)(1))\\&=\Phi((f^U)'(h_U(p))(c_U'(0)(1)),g^U(h_U(p)))+\Phi(f^U(h_U(p)),(g^U)'(h_U(p))(c_U'(0)(1)))\\&=\Phi(\delta_X(f)(p),g^U(h_U(p)))+\Phi(f^U(h_U(p)),\delta_X(g)(p))\\&=(\delta_X(f)\cdot g)(p)+(f\cdot\delta_X(g))(p)\\&=(\delta_X(f)\cdot g+f\cdot\delta_X(g))(p)\end{aligned}$$

Es bleibt die Eindeutigkeit zu beweisen. Dazu seien $X(p),Y(p)\in T_pM$ verschiedene Tangentialvektoren. Wir setzen $Z(p)=X(p)-Y(p)\in T_pM$. Dann korrespondiert $Z(p)$ zu einem eindimensionalen Teilraum in **E**. Es sei c eine Kurve durch p mit $[c]_p=Z(p)$. Da $\mathcal{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ nicht der Nullraum ist, sei $L\in\mathcal{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ gegeben. Wir setzen $f:=L\circ h_U$, also $f^U=L$. Dann ist $\overline{f}\in K_p^s(M,\mathbf{F})$ und $((L\circ h_U)\circ h_U^{-1})'(h_U(p))=L$
Nach Hahn-Banach gibt es ein $\beta\in\mathbf{F}'$ mit $\beta(L(c_U'(0)(1))\neq 0$. Wir erhalten nun

$$\begin{aligned}\delta_X(\overline{f})(p) &= (f^U)'(h_U(p))(c_U'(0)(1)) \\ &= L'(h_U(p))(c_U'(0)(1)) \\ &= L(c_U'(0)(1)) \\ &\neq 0\end{aligned}$$

Damit ist das Theorem vollständig bewiesen.

Bemerkung:

Ist $\mathbf{F}$ endlichdimensional, so ist $\mathscr{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ niemals der Nullraum. Denn für jeden Vektor $\mathbf{e}\in\mathbf{E}$ existiert nach Hahn-Banach ein $\alpha\in\mathbf{E}'$ mit $\alpha(\mathbf{e})\neq 0$. Definiere nun $\Lambda(\alpha(\mathbf{e})):=(\alpha(\mathbf{e}),0,\ldots,0)\in\mathbf{F}$, dann ist $\Lambda\circ\alpha\in\mathscr{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$. Ist auch $\mathbf{E}$ endlichdimensional, so existiert die Dualbasis und somit auch α.

Wir wollen der Vollständigkeit halber **1.2.4** für den endlichdimensionalen Fall notieren.

Proposition 1.2.9:

Es sei nun $M\in\mathbf{M}_r$ n-dimensional. Es sei h_U eine lokale Karte. Dann ist $h_U(p)=(h_{1,U}(p),\ldots,h_{n,U}(p))$. Sei $[c_i]_p$ die zu $\mathbf{e}_i$ in der lokalen Karte h_U korrespondierende Basis. Sei $\dfrac{\partial}{\partial h_{i,U}}$ die spezielle Derivation definiert durch $\dfrac{\partial}{\partial h_{i,U}}(\overline{f})(p):=((f^U)'(h_U(p))(c_{i,U}'(0)(1))$, dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial h_{i,U}}(\overline{f})(p)=(D_i f^U)(h_U(p)).$$

Ferner ist

1.
$$\frac{\partial}{\partial h_{i,U}}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial h_{j,W}}{\partial h_{i,U}}\frac{\partial}{\partial h_{j,V}}.$$

Ist $N\in\mathbf{M}_r$ m-dimensional und $g\in C^r(M;N)$, so ist

2.
$$T_p g\Big(\frac{\partial}{\partial h_{i,U}}(p)\Big)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial(k_W\circ g)_j}{\partial h_{i,U}}(p)\frac{\partial}{\partial k_{j,W}}(g(p))$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial h_{i,U}}(\overline{f})(p) &= (f^U)'(h_U(p))(c_{i,U}'(0)(1)) \\ &= (f^U)'(h_U(p))(\mathbf{e}_i) \\ &= (D_i f^U)(h_U(p))\end{aligned}$$

Wir beweisen zuerst die Aussage **2.**

$$\begin{aligned}T_p g\Big(\frac{\partial}{\partial h_{i,U}}(p)\Big) &= (T_p g[c_i]_p)(\overline{f}) \\ &= [g\circ c_i]_{g(p)}(\overline{f}) \\ &= \delta_{[g\circ c_i]}(f)(g(p)) \\ &= (f^W)'(k_W(g(p)))(g\circ c_i)'(0)(1) \\ &= (f^W)'(k_W(g(p)))(g_W^U\circ c_{i,U})'(0)(1) \\ &= (f^W)'(k_W(g(p)))(g_W^U)'(h_U(p))(c_{i,U})'(0)(1) \\ &= (f^W)'(k_W(g(p)))(g_W^U)'(h_U(p))(\mathbf{e}_i)\end{aligned}$$

$$\overset{1.2.5}{=} \sum_{j=1}^{m} D_i(g_W^U)_j(h_U(p))(f^W)'(k_W(g(p)))(\mathbf{d}_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{m} D_i(g_W^U)_j(h_U(p))(D_j f^W)(k_W(g(p)))$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial(k_W \circ g)_j}{\partial h_{i,U}}(p)\frac{\partial}{\partial k_{j,W}}(g(p))(\overline{f})$$

Aus der letzten Formel folgt mit $g = 1_M$ und $D_i(1_M)_j(h_U(p)) = \delta_{ij}$ die Formel 1.

Lemma 1.2.10:

Es sei $f \in \mathcal{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ eine stetige lineare Abbildung von Banachräumen. Dann induziert f eine stetige lineare Abbildung $f^* \in \mathcal{L}(\mathbf{F}',\mathbf{E}')$ der Dualräume durch $f^*(\beta) := \beta \circ f$.

Mit f ist auch f^* ein Isomorphismus und es gilt $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

Beweis: Übungsaufgabe.

Definition und Proposition 1.2.11:

Es sei $M \in \mathbf{M}_r$. Es sei $p \in M$ ein Punkt. Nach **1.2.2** ist $T_p h_U$ ein Isomorphismus von T_pM auf $\{h_U(p)\} \times \mathbf{E}$. Es sei $T_p^* h_U := (T_p h_U^{-1})^*$ der durch $T_p h_U$ induzierte Isomorphismus von $(T_pM)'$ auf $\{h_U(p)\} \times \mathbf{E}'$. Wir setzen $(T_pM)' =: T_p'M$. Für $\alpha_p \in T_p'M$ ist dann $T_p^* h_U(\alpha_p) := (h_U(p), \alpha_p^U)$. Wieder heißt $\alpha^U : M \to TM$ der Hauptteil der Linearform α. Beachtet man

$$T_p^* h_U T_p^* g_V^{-1} = (T_p g_V T_p h_U^{-1})^*,$$

so ergeben sich die Übergangsabbildungen zu

$$(T_p^* h_U T_p^* g_V^{-1})(g_V(p), \alpha_p^V) = (h_U(p), \alpha_p^U),$$

wobei

$$T_p^* h_U T_p^* g_V^{-1} = a_U^V(p) \times (a_U^V)'(h_U(p)).$$

Folglich gilt:

$$\begin{aligned}\alpha_p^U(c_U'(0)(1)) &= ((a_U^V)'(h_U(p)))^* \alpha_p^V((a_V^U)'(g_V(p))(c_V'(0)(1))) \\ &= \alpha_p^V(c_V'(0)(1))\end{aligned},$$

und die Zahl $\alpha_p([c]_p) \in T_p'M$ hängt nicht von der Wahl der linearen Karten ab. Der Dualraum $(T_pM)' = T_p'M$ heißt der ***Kotangentialraum*** von T_pM.

Proposition 1.2.12:

Es seien $L, M, N \in \mathbf{M}_r$, $f \in C^s(L,M)$, $g \in C^s(M,N)$ und $T_p'L$, $T_{f(p)}'M$ $T_{g(f(p))}'N$ die Kotangentialräume.

1. Sind λ^V und λ^U die Hauptteile der Linearform λ in $T_p'L$, so gilt die Transformation

$$\lambda^U = \lambda^V (a_V^U)'(h_U(p)).$$

2. Für $(T_pf)^* : T_{f(p)}'M \to T'_p L$ gilt $(T_pf)^*(\alpha_{f(p)}) = \alpha_{f(p)} \circ T_pf$

3. $(T_p(gf))^* = (T_pf)^*(T_{f(p)}g)^*$.

4. $(T_p 1_L)^* = 1_{T_p' L}$.

5. Ist L n-dimensional, so definiert die zusammengesetzte Abbildung

$$T_p L \xrightarrow{T_p h_U} \{h_U(p)\} \times \mathbf{K}^n \xrightarrow{\pi_2} \mathbf{K}^n \xrightarrow{pr_i} \mathbf{K}$$

eine Linearform auf $T_p U$, die wir mit $d_p h_{i,U}$ bezeichnen. Insbesondere gilt für $c_j(t) = h_U^{-1}(h_U(p) + t\mathbf{e}_j)$ die Gleichung $d_p h_{i,U}([c_j]) = \delta_{ij}$.

6. $d_p h_{i,U} = \sum_{j=1}^n \dfrac{\partial h_{i,U}}{\partial g_{j,V}}(p)\, d_p g_{j,V}$.

7. $(T_p f)^*(d_{f(p)} k_{i,W}) = \sum_{j=1}^n \dfrac{\partial (f_i^W)}{\partial g_{j,V}}(p)\, d_p g_{j,V}$.

Beweis: Übungsaufgabe.

Aufgaben

1. Es sei $f : M \to N$ ein Homöomorphismus von der Menge M auf die C^r – Mannigfaltigkeit N. Dann existiert genau eine C^r – Struktur auf M, so dass $f \in Diff^r(M,N)$.

2. Es sei M eine C^r – Mannigfaltigkeit modelliert durch den Banachraum $\mathbf{E}$. ein Tangentialvektor an $p \in M$ ist eine Äquivalenzklasse $[(p, h_U, \mathbf{e})] := \{ (p, g_V, \mathbf{a}) \mid \mathbf{a} = (g_V \circ h_U^{-1})'(h_U(p))\mathbf{e} \}$, mit $\mathbf{a}, \mathbf{e} \in \mathbf{E}$. Zeigen Sie, dass diese Definition zur Definition 1.2.1 äquivalent ist.

3. Es seien $M, N \in \mathbf{M}_r$. Für $(m,n) \in M \times N$ gilt $T_{(m,n)}(M \times N) \cong T_m M \times T_n N$.

4. Es seien $L, M, N, R \in \mathbf{M}_r$ und $f \in C^s(L,M)$, $g \in C^s(N,R)$.
   Für $(l,n) \in L \times N$ gilt $T_{(l,n)}(f \times g) \cong T_l f \times T_n g$.

5. Es sei $f \in C^s(M,N)$ und $F : M \to M \times N$ definiert durch $F(x) := (x, f(x))$.
   Dann ist $T_x F([c]_x) = ([c]_x, T_x f([c]_x))$.

6. Berechne für $M := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0\}$ den Tangentialraum $T_{(a,b,c)}M$ für $a = b = 0, c = 1$; $a = c = 0, b = 1$; $b = c = 0, a = 1$.

7. Es sei $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definiert durch $f(x,y) := (x^2 + 2y^2, 3xy)$. Der $\mathbf{R}^2$ werde als C^∞-Mannigfaltigkeit aufgefasst. Berechne $T_{(1,1)} f(\dfrac{\partial}{\partial x}(1,1) + 3\dfrac{\partial}{\partial y}(1,1))$.

8. Es sei $\mathbf{R}_1^3 := \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ mit sphärischen Koordinaten versehen und $\mathbf{R}_2^3 := \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ mit kartesischen Koordinaten versehen. Es sei $\dfrac{\partial}{\partial r}(r_0, \theta_0, \phi_0) \in T_{(r_0,\theta_0,\phi_0)}\mathbf{R}_1^3$ der Tangentialvektor längs der Kurve $\theta = const$, $\phi = const$. Es sei $f : \mathbf{R}_1^3 \to \mathbf{R}_2^3$ definiert durch $f(r,\theta,\phi) := (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r\cos\theta)$. Beide Räume tragen die gewöhnliche C^∞-Struktur.
   Berechne $T_p f(\dfrac{\partial}{\partial r}(p))$ für $p = (r_0, \theta_0, \phi_0)$.