3. Absolute Differentialrechnung (Globale Analysis)

DEFINITION 3.1
Es seien η und ξ Vektorraumbündel über M. Es sei $\mathbf{K} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$ und $r \geq q \geq t \geq 2$. Die Elemente der Menge

$$\Sigma_t(\eta,\xi) := \left\{ \Lambda \in \Gamma_t\left(\mathscr{L}_{C^r(M,\mathbf{K})}(\eta,\xi)\right) \middle| \; \Lambda \in \mathscr{L}_{C^r(M,\mathbf{K})}\left(\Gamma_q(\eta),\Gamma_t(\xi)\right) \right\}$$

heißen Σ_t - ***Morphismen*** von η in ξ. Wir setzen stets voraus, dass alle Schnitte *M*- Morphismen sind. Beachte hierzu den Satz von Serre für endliche Dimensionen. Σ_t- *Morphismen*

Ist $\eta = \tau_M$, so schreiben wir $\Sigma_t(\tau_M,\xi) =: \Sigma_t(\xi)$.

DEFINITION 3.2
Es sei ξ ein Vektorraumbündel über M. Es sei τ_M das Tangentialbündel. Es seien ξ und τ_M von der Klasse *r*. Es sei $\mathbf{K} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$.

a) Eine $\mathbf{K}$ - lineare Abbildung

$$D : \Gamma_r(\xi) \to \mathscr{L}_{C^r M,\mathbf{K})}\left(\Gamma_r(\tau_M),\Gamma_{r-1}(\xi)\right) \qquad (*)$$

mit der Eigenschaft

$$\bigwedge_{s\in\Gamma_r(\xi)} \bigwedge_{X\in\Gamma_r(\tau_M)} \bigwedge_{f\in C^r(M,\mathbf{K})} D(f\cdot s)(X) = X(f)\cdot s + f\cdot D(s)(X), \qquad (**)$$

die zugleich ein Σ_t -Morphismus ist, heißt ***globale Ableitung*** auf ξ über *M*. **Globale Ableitung**

Die Ableitung ***D*** heißt auch ***absolute Ableitung*** oder ***linearer Zusammenhang*** über *M*.
Wir setzen $\nabla := D$ für die globale Ableitung. Ist $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\tau}_M$, so sagen wir ∇ ist eine kovariante Ableitung auf *M*.

Lie-Ableitung

b) Eine $\mathbf{K}$ - lineare Abbildung

$$D : \Gamma_r(\xi) \to \mathscr{L}_{\mathbf{K}}\left(\Gamma_r(\tau_M),\Gamma_{r-1}(\xi)\right)$$

heißt *D* ***schwache Ableitung*** oder ***Lie-Ableitung***, wenn sie $(**)$ für $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\tau}_M$ erfüllt sowie $D(X)(X) = \mathbf{0}$ gilt. Wir setzen $\mathcal{L} := D$ für die Lie-Ableitung. $\mathcal{L}$ ist folglich eine alternierende $\mathbf{K}$-Bilinearform. Es ist $\mathcal{L}(X)(Y) = [Y;X]$.

Ist $\xi = M_{\mathbf{K}}$ das triviale Bündel, so heißt *D* ***Graßmann-Ableitung***. Wir setzen $\hat{d} := D$ für die Graßmann-Ableitung. Beachte $\hat{f} : M \to M \times \mathbf{K}$ mit $\hat{f}(p) := (p, f(p))$ für $f \in C^1(M;\mathbf{K})$ **Graßmann-Ableitung**

$D(\hat{f})(X) = X\hat{(f)}$. Identifizieren wir $\hat{f}$ mit *f*, so ist $D(f)(X) = X(f) = df(X)$.

BEMERKUNG 3.3
Es gilt $\mathcal{L}(g\cdot Y)(X) = X(g)\cdot Y + g\cdot\mathcal{L}(Y)(X)$ nach $(**)$. Hieraus folgt für alle $f, g \in C^r(M;\mathbf{K})$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(g\cdot X)(Y) - \mathcal{L}(X)(f\cdot Y) &= Y(g)\cdot X + g\cdot\mathcal{L}(X)(Y) + X(f)\cdot Y + f\cdot\mathcal{L}(Y)(X)\\ &= Y(g)\cdot X + X(f)\cdot Y + (g-f)\cdot\mathcal{L}(X)(Y)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}[g\cdot Y, f\cdot X] &= \mathcal{L}(f\cdot X)(g\cdot Y)\\ &= (g\cdot Y)(f)\cdot X + f\cdot\mathcal{L}(X)(g\cdot Y)\\ &= (g\cdot Y)(f)\cdot X + f\cdot(-\mathcal{L}(g\cdot Y)(X))\\ &= (g\cdot Y)(f)\cdot X - f\cdot(X(g)\cdot Y + g\cdot\mathcal{L}(Y)(X))\\ &= (g\cdot Y)(f)\cdot X - (f\cdot X)(g)\cdot Y + f\cdot g\cdot\mathcal{L}(X)(Y)\\ &= (g\cdot Y)(f)\cdot X - (f\cdot X)(g)\cdot Y + f\cdot g\cdot[Y,X]\end{aligned}$$

DEFINITION 3.4
Ist ∇ ein globale Ableitung auf ξ über *M*, so heißt $\nabla(s)$ für $s \in \Gamma_r(\xi)$ ***kovariante*** oder ***absolute Ableitung von*** *s*. Ist $\mathcal{L}$ ein schwache Ableitung auf τ_M, so heißt $\mathcal{L}(X)$ für $X \in \Gamma_r(\tau_M)$ ***Lie-Ableitung von*** *X*.

Kovariante Ableitung

LIE-Ableitung

LEMMA 3.5
Ist *D* eine Ableitung auf ξ über *M*, dann induziert *D* für jede offene Teilmenge $V \subseteq M$ eine Ableitung auf ξ_V :

$$D_V : \Gamma_r(\xi_V) \to \mathcal{L}_A\left(\Gamma_r(\tau_V), \Gamma_{r-1}(\xi_V)\right).$$

BEWEIS:
V ist eine Untermannigfaltigkeit. Also genügt es die Abbildung $\iota_V : V \to M$ vorzuschalten.

LEMMA 3.6
Ist $\mathcal{O} \in Cov(M)$, und sind D_V für $V \in \mathcal{O}$ Ableitungen auf ξ über *V*, so definiert die Menge $D_V \mid V \in \mathcal{O}$ eine Ableitung auf ξ über *M*.

BEWEIS:
Seien $D_V \mid V \in \mathcal{O}$, $V, W \in \mathcal{O}$ mit $V \cap W \neq \varnothing$. Es ist nur zu beachten, dass $(D_V)_W = D_{V \cap W} = (D_W)_V$ gilt. Jetzt erstelle man aus *Cov*(*M*) einen Atlas.

DEFINITION 3.7
Es sei ∇ eine kovariante Ableitung von ξ über *M*. Die Schnitte $s \in \Gamma_r(\xi)$ mit $\nabla(s) = 0$ heißen ***horizontal***.

Horizontale Schnitte

BEISPIEL: Für horizontale Schnitte gilt $\nabla(f \cdot s)(X) = X(f) \cdot s$. Dies folgt aus

$$\begin{aligned} \nabla(f \cdot s)(X) &= X(f) \cdot s + f \cdot \nabla(s)(X) \\ &= X(f) \cdot s \end{aligned}$$

SATZ 3.8
Es sei ∇ eine kovariante Ableitung auf ξ über *M*. Es sei $\mathcal{O}$ eine Trivialisierung für ξ und τ_M, oder es sei $N \subseteq M$ offen, so dass ξ_N trivialisierbar ist.

1. Für $V \in \mathcal{O}$ oder $V = N$ existiert ein

$$\begin{aligned} \Gamma_V &\in \mathcal{L}_{C^r(M,\mathbf{K})}\left(\Gamma_r(\xi_V); \mathcal{L}_{C^r(M,\mathbf{K})}\left(\Gamma_r(\tau_V), \Gamma_{r-1}(\xi_V)\right)\right) \\ &\cong \mathcal{L}_{C^r(M,\mathbf{K})}\left(\Gamma_r(\xi_V), \Gamma_r(\tau_V); \Gamma_{r-1}(\xi_V)\right) \end{aligned}$$

so dass in der Trivialisierung $V \times \mathbf{E}$ bzw. $V \times \mathbf{F}$ gilt:

$$\nabla^V(s_V) = s_V' + \Gamma^V(s_V).$$

Beachte $\nabla^V := \nabla \circ H_V^{-1}$, $s_V := H_V \circ s \circ \iota_V$ und $\Gamma^V := \Gamma_V \circ H_V^{-1}$, wobei H_V eine Trivialisierungsabbildung ist. Mit anderen Worten:
Es sei h_R eine lokale Karte, $Z := R \cap V \neq \varnothing$, $h_R(R) \subseteq \mathbf{E}$. Dann ist

$$H_V \mid \pi^{-1}(Z) : \pi^{-1}(Z) \to Z \times \mathbf{F}$$

eine Trivialisierungsabbildung und der Hauptteil eines Schnittes ist eine Abbildung von $h_R(Z)$ in $\mathbf{F}$. Folglich dürfen wir $R = V$ annehmen.
Es sei $h_V(V) = U$. Ist $\sigma_U = pr_2 \circ s_V \circ h_V^{-1} : U \to \mathbf{F}$ der Hauptteil der lokalen Darstellung von s_V und $\nabla_U(\sigma_U) : U \to \mathcal{L}(\mathbf{E}; \mathbf{F})$ der Hauptteil in der Bündelkarte über der lokalen Karte, so ist

$$\nabla_U(\sigma_U) = \sigma_U' + \Gamma_U(\sigma_U).$$

2. Für Γ_V bzw. $\Gamma_{V'}$ auf $V \cap V'$ gilt in den lokalen Karten h_V, $g_{V'}$ mit $h_V(V \cap V') = U$, $g_{V'}(V \cap V') = W$ und $a_U^W := h_V \circ g_{V'}^{-1}$ für die Hauptteile folgende Übergangsrelation:

$$b_U^W \bullet \Gamma_W = (\Gamma_U \circ a_U^W) \bullet (b_U^W \bullet (\iota_1 \circ pr_1) + (a_U^W)' \bullet (\iota_2 \circ pr_2)) + (b_U^W)',$$

wobei $b_U^W(x) \in \mathscr{L}(\mathbf{F};\mathbf{F})$ für $x \in g_{V'}(V') = W$ definiert ist durch den Hauptteil des Schnittes s_V an der Stelle $y = a_U^W(x)$, also $\sigma_U(y) = b_U^W(x)\sigma_W(x)$.

Beweis:
Wir erinnern, dass *V* eine offene Untermannigfaltigkeit von *M* ist.

1. Für $p \in V$ definieren wir $\Gamma^V(s_V)(p) = \nabla^V(s_V)(p) - s_V'(p)$. Damit gilt mit dem Hauptteil der lokalen Darstellung von *s*, $\sigma_U := pr_2 \circ s_V \circ h_V^{-1}$, $\sigma_U : (U = h_V(V)) \to \mathbf{F}$ die Gleichheit

$$\begin{aligned}
\Gamma_U(f^U \cdot \sigma_U) &= \nabla_U(f^U \cdot \sigma_U) - (f^U \cdot \sigma_U)' \\
&= f^U \cdot \nabla_U(\sigma_U) + (f^U)' \cdot \sigma_U - (f^U)' \cdot \sigma_U - f^U \cdot \sigma_U' \\
&= f^U \cdot \nabla_U(\sigma_U) - f^U \cdot \sigma_U' \\
&= f^U \cdot (\nabla_U(\sigma_U) - \sigma_U') \\
&= f^U \cdot \Gamma_U(\sigma_U).
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Darstellung $X(f)(p) = (f^U)'(x) X_U(x)$ aus 1.2.5 verwendet, wobei $c_U'(0) = X_U(c_U(0))$.

2. Wir erinnern an die Übergangsrelationen auf $V \cap V'$ in den lokalen Karten h_V und $g_{V'}$:

$$\begin{aligned}
((\nabla_U(\sigma_U))(t_U) \circ a_U^W &= b_U^W \bullet (((\nabla_W(\sigma_W))(t_W)), \\
\sigma_U \circ a_U^W &= b_U^W \bullet \sigma_W, \\
t_U \circ a_U^W &= (a_U^W)' \bullet t_W, \\
(\sigma_U \circ a_U^W)' &= (\sigma_U' \circ a_U^W) \bullet (a_U^W)' \\
&= (b_U^W)' \bullet \sigma_W + b_U^W \bullet \sigma_W'.
\end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir

$$\begin{aligned}
(\sigma_U' \circ a_U^W) \bullet (t_U \circ a_U^W) &= (\sigma_U' \circ a_U^W) \bullet ((a_U^W)' \bullet t_W) \\
&= ((\sigma_U' \circ a_U^W) \bullet (a_U^W)') \bullet t_W \\
&= ((b_U^W)' \bullet \sigma_W + b_U^W \bullet \sigma_W') \bullet t_W \\
&= (b_U^W)' \bullet \sigma_W \bullet t_W + b_U^W \bullet \sigma_W' \bullet t_W.
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
\Gamma_U(\sigma_U)(t_U) \bullet a_U^W &= (\Gamma_U \circ a_U^W) \bullet (\sigma_U \circ a_U^W) \bullet (t_U \circ a_U^W) \\
&= (\Gamma_U \circ a_U^W) \bullet (b_U^W \bullet \sigma_W) \bullet ((a_U^W)' \bullet t_W)
\end{aligned}$$

folgt schließlich

$$\begin{aligned}
(\Gamma_U \circ a_U^W) \bullet (b_U^W \bullet pr_1) \bullet ((a_U^W)' \bullet pr_2)(\sigma_W, t_W) &= (\Gamma_U \circ a_U^W) \bullet (b_U^W \bullet \sigma_W) \bullet ((a_U^W)' \bullet t_W) \\
&= (\Gamma_U \circ a_U^W) \bullet (\sigma_U \circ a_U^W) \bullet (t_U \circ a_U^W) \\
&= \Gamma_U(\sigma_U)(t_U) \bullet a_U^W \\
&= (\nabla_U(\sigma_U)(t_U)) \circ a_U^W - (\sigma_U' \circ a_U^W) \bullet (t_U \circ a_U^W) \\
&= b_U^W \bullet (\nabla_W(\sigma_W)(t_W)) - b_U^W \bullet \sigma_W' \bullet t_W - (b_U^W)' \bullet \sigma_W \bullet t_W \\
&= b_U^W \bullet (\nabla_W(\sigma_W) - \sigma_W') \bullet t_W - (b_U^W)' \bullet \sigma_W \bullet t_W \\
&= b_U^W \bullet \Gamma_W \bullet \sigma_W \bullet t_W - (b_U^W)' \bullet \sigma_W \bullet t_W
\end{aligned}$$

$$= (b_U^W \bullet \Gamma_W - (b_U^W)') \bullet \sigma_W \bullet t_W$$
$$= (b_U^W \bullet \Gamma_W - (b_U^W)')(\sigma_W, t_W)$$

und damit die gesuchte Übergangsfunktion

$$(\Gamma_U \circ a_U^W) \bullet (b_U^W \bullet (\iota_1 \circ pr_1) + (a_U^W)' \bullet (\iota_2 \circ pr_2)) = b_U^W \bullet \Gamma_W - (b_U^W)' .$$

Ist insbesondere $\xi = \tau_M$, so ist $b_U^W = (a_U^W)'$.

DEFINITION 3.9 Christoffel-abbildung

Die Abbildung Γ_V in der Trivialisierung ξ_V heißt ***Christoffelabbildung***.

ÜBUNG

Im endlichdimensionalen zeige man:

$$\Gamma_V = \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k \lambda^i \otimes dx^i \bullet s_k = \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k \lambda^i \otimes dx^i \otimes s_k ,$$

wobei λ^i die zu s_i dualen Basisschnitte sind. Hierzu identifiziere man

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathbf{F}, \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathbf{E}, \mathbf{F})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathbf{F}, \mathbf{E}; \mathbf{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathbf{F}, \mathbf{E}, \mathbf{F}^*; \mathbf{K}) .$$

BEMERKUNG 3.10

Aufgrund des Übertragungsverhalten der Christoffelabbildung ***transformiert sich*** $D(s)$ ***wie ein Schnitt in*** $\mathscr{L}(\tau_M, \xi)$, so dass wir $D(s)$ auch als Schnitt interpretieren dürfen.
$D(s)$ ist also ein $\Sigma_t(\xi)$ - Morphismus.

SATZ 3.11

Es sei ξ ein Vektorraumbündel über M. Es seien ξ und M von der Klasse C^r, $r \geq 2$. Es sei $\mathscr{O} \in Cov(M)$ ein Bündelatlas für ξ. Für jedes $V \in \mathscr{O}$ existiere auf ξ_V eine Ableitung D_V. Existiert auf M eine $\mathscr{O}$ untergeordnete Partition der Einheit, dann existiert eine Ableitung D auf ξ über M.

BEWEIS:

Es sei $\Sigma_{W \in \mathscr{F}} p_W = \mathbf{1}$ eine $\mathscr{O}$ untergeordnete Partition der Eins, dann ist $\mathrm{supp}(p_W) \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq V$

und

$$D := \sum_{W \in \mathscr{F}} p_W \cdot D_V$$

eine Ableitung auf ξ über M. Ist $m \in M$ und $s \in \Gamma(\xi)$, so ist

$$p_W(m)(D_V(s_V))(m) = \begin{cases} (D_V(s_V))(m), & \text{falls } m \in \overline{W} \\ 0, & \text{falls } m \in V - W \end{cases}$$

Folglich ist $p_W \cdot D_V$ eine Ableitung auf ganz ξ. Da $\mathscr{F}$ lokal endlich ist, treten für jedes $m \in M$ nur endlich viele W auf, so dass nur noch die Unabhängigkeit von der gewählten Partition zu zeigen bleibt. Dies sei dem Leser überlassen. Ist nun $\mathscr{O}$' irgendeine Trivialisierung, so folgt aus Lemma 3.4 eine Ableitung für $\mathscr{O}$'.

SATZ 3.12

Es sei ξ ein Vektorraumbündel über M. Existiert eine Partition der Einheit auf M, dann existiert eine Ableitung auf ξ über M.

BEWEIS:

Es sei $\mathscr{O} \in Cov(M)$ ein Bündelatlas für ξ. Wir dürfen annehmen, dass es eine zu $\mathscr{O}$ untergeordnete Partition der Eins gibt. Es sei $V \in \mathscr{O}$, $\xi_V = V \times \mathbf{F}$, $s \in \Gamma_r(\xi)$ ein Schnitt in ξ und $X \in \Gamma_r(\tau_M)$ ein Vektorfeld. Seien σ_U, t_U die Hauptteile von s_V, X_V in einer lokalen Karte h_W mit $U = h_W(V \cap W)$. Dann können wir lokal definieren:

$$(\nabla_U(\sigma_U)(x))((t_U)(x)) := \sigma'_U(x)(t_U(x)),$$

$$(\mathcal{L}_U(v_U)(t_U))(x) := v'_U(x)(t_U(x)) - t'_U(x)(v_U(x))$$

Dies sind Ableitungen auf U. Sei nun $\Sigma_{W\in\mathscr{F}} p_W = \mathbf{1}$ eine $\mathscr{O}$ untergeordnete Partition der Eins, dann ist $D := \sum_{W\in\mathscr{F}} p_W \cdot D_V$ eine Ableitung auf ξ über M.

BEMERKUNG 3.13

Der Satz 3.12 sagt aus, dass man immer eine Trivialisierung finden kann, in der Γ verschwindet. In einer anderen Trivialisierung kann die Situation ganz anders sein.

BEMERKUNG 3.14

Auf dem Tangentialbündel τ_M existiert stets eine Ableitung. Wir bezeichnen sie mit Θ.

KOROLLAR 3.15

Es sei M eine endlichdimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse r und ∇ eine Ableitung auf M. Dann ist

$$\nabla_U\sigma_U = \sigma'_U + \Gamma_U(\sigma_U) \text{ in } U = h_V(V) \text{ äquivalent zu } \sigma^i_{|j} = D_j\sigma^i + \sum_{k=1}^n \Gamma^i_{kj}\sigma^k .$$

BEWEIS:

In diesem Fall existieren auf τ_M und M Partitionen der Eins.

Wir erinnern die Regel $\sigma'(a) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_i \circ D_j\sigma^i(a) \circ q_j$. Ferner setzen wir für Basisschnitte $(\mathbf{e}_i)_{1\le i\le n}$: $(\Gamma^i_{kj})_U(x) := \Gamma^i_V(x)(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j)$. Damit erhalten wir:

$$(\Gamma_V(\sigma))(x)(\mathbf{e}_j) = \sum_{k=1}^n (\Gamma_V(x)(\mathbf{e}_k))(\mathbf{e}_j)\sigma^k(x) = \sum_{k=1}^m \Gamma_V(x)(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j)\sigma^k(x) = \sum_{k=1}^n (\Gamma_{kj})_V(x)\sigma^k(x)$$

und für die i-te Koordinate:

$$(\Gamma_V(\sigma))^i(x)(\mathbf{e}_j) = \sum_{k=1}^n (\Gamma^i_{kj})_V(x)\sigma^k(x)$$

Daraus folgt die Gleichung

$$\sigma^i_{|j} = (D_V\sigma)^i(\mathbf{e}_j) = (\sigma^i)' \bullet \mathbf{e}_j + (\Gamma_V\sigma)^i \bullet \mathbf{e}_j = D_j\sigma^i + \sum_{k=1}^n \Gamma^i_{kj}\sigma^k .$$

DEFINITION UND SATZ 3.16

Es sei D eine Ableitung auf ξ über M. Es sei $\hat{D}$ eine Ableitung auf η über M.

1. Auf dem ***dualen Bündel*** ξ^* wird durch **Duales Bündel**

$$(D^*(\boldsymbol{\lambda}))(X)(s) := X(\boldsymbol{\lambda}(s)) - \boldsymbol{\lambda}(D(s)(X))$$

eine Ableitung definiert.

2. Auf dem ***Endomorphismenbündel*** $\mathscr{L}(\xi,\xi)$ wird durch **Endomorphis-menbündel**

$$(\overline{D}(\boldsymbol{\vartheta}))(X)(s) := D(\boldsymbol{\vartheta}(s))(X) - \boldsymbol{\vartheta}(D(s)(X))$$

eine Ableitung definiert.

3. Auf dem ***Tensorbündel*** $\mathscr{L}^l_k(\xi^*,\xi;\eta)$ mit Werten in η wird durch **Tensorbündel**

$$\begin{aligned}(\tilde{D}(t))(X)(\lambda^1, \ldots, \lambda^k, s_1, \ldots, s_l) := {} & \hat{D}(t(\lambda^1, \ldots, \lambda^k, s_1, \ldots, s_l))(X) \\ & -\sum_{i=1}^k t(\lambda^1, \ldots, D^*(\lambda^i)(X), \ldots, \lambda^k, s_1, \ldots, s_l) \\ & -\sum_{i=1}^l t(\lambda^1, \ldots, \lambda^k, s_1, \ldots, D(s_i)(X), \ldots, s_l)\end{aligned}$$

eine Ableitung definiert. Beachte, dass hier auch *Bilinearformen* definiert sind.

Für $s \in \Gamma_r(\xi)$, $\alpha \in \Gamma_r(\xi^*)$ sei $\mathbf{C}^{i,s}_{j,\alpha} : \mathscr{L}^l_k(\xi^*,\xi;\eta) \to \mathscr{L}^{l-1}_{k-1}(\xi^*,\xi;\eta)$ definiert durch

$$(\mathbf{C}^{i,s}_{j,\alpha}(t))(\lambda^1,\dots,\lambda^{k-1},s_1,\dots,s_{l-1}) := t(\lambda^1,\dots,\underbrace{\alpha,}_{\text{j-te Stelle}}\dots,\lambda^{k-1},s_1,\dots,\underbrace{s}_{i\text{-te Stelle}},\dots,s_{l-1}).$$

$\mathbf{C}^{i,s}_{j,\alpha}$ ist eine $C^r(M,\mathbf{K})$-lineare Abbildung und heißt ***innere Kontraktion vom Typ*** (i, j) ***vermöge*** (α, s). **Innere Kontraktion**

4. Es sei $\mathscr{A}^p(\tau_M;\eta)$ das ***alternierende Teilbündel*** von $\mathscr{L}^p(\tau_M;\eta)$ mit Werten in η und D eine Ableitung auf η über M. Es sei $\mathscr{A}^p(\Gamma_r(\tau_M);\Gamma_r(\eta))$ die Menge der alternierenden M-Morphismen. Es sei **Alternierendes Bündel**

$$\Omega^p_r(\eta) := \left\{ \omega \in \Gamma_r\left(\mathscr{A}^p(\tau_M;\eta)\right) \mid \omega \in \mathscr{A}^p(\Gamma_r(\tau_M);\Gamma_r(\eta)) \right\}.$$

Ein Element $\omega \in \Omega^p_r(\eta)$ heißt ***Differentialform vom Grade p mit Werten in*** η. Wir setzen noch $\Omega^0_r(\eta) := \Gamma_r(\eta)$ und $\Omega^1_r(\eta) := \mathscr{L}\left(\Gamma_r(\tau_M);\Gamma_r(\eta)\right)$. Es existiert ein ***Differential*** d^∇ mit **Differentialform** **Differential**

$$d^\nabla(\Omega^p_r(\eta)) \subset \Omega^{p+1}_{r-1}(\eta)$$

definiert durch

$$\begin{aligned} d^\nabla\omega(X_1,\dots,X_p) &:= \sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\nabla(\omega(X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_p))(X_i) \\ &+\sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}\omega([X_i,X_j],X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_p). \end{aligned}$$

Ist $\eta = M_{\mathbf{K}}$ das triviale Bündel, so setzen wir $d^\nabla = d$.

5. Für $\omega \in \Omega^p_r(\eta)$ und $X \in \Gamma_r(\tau_M)$ sei $\iota_X : \Omega^p_r(\eta) \to \Omega^{p-1}_r(\eta)$ definiert durch **Inneres Produkt**

$$(\iota_X\omega)(X_1,\dots,X_{p-1}) := \omega(X,X_1,\dots,X_{p-1}).$$

ι_X ist eine $C^r(M,\mathbf{K})$-lineare Abbildung und heißt ***inneres Produkt*** auf $\Omega^p(\xi)$.

Wir setzen noch $\iota_X(\Omega^0_r(\eta)) := \mathbf{0}$. Außerdem gilt trivialerweise $\iota_{f\cdot X} = f\cdot\iota_X$ für $f \in C^r(M,\mathbf{K})$.

BEWEIS:

1. Die Definition ist legitim, also $(*)$ in 3.1 ist erfüllt, d.h. $(D^*(\lambda))(X) \in \mathscr{L}\left(\Gamma_r(\xi);\Gamma_{r-1}(M_{\mathbf{K}})\right)$:

$$\begin{aligned} (D^*(\lambda))(X)(f\cdot s) &= X(\lambda(f\cdot s)) - \lambda(D(f\cdot s)(X)) \\ &= X(f\cdot\lambda(s)) - \lambda(X(f)\cdot s + f\cdot D(s)(X)) \\ &= X(f)\lambda(s)) + f\cdot X(\lambda(s)) - X(f)\cdot\lambda(s) - f\cdot\lambda(D(s)(X)) \\ &= f\cdot X(\lambda(s)) - f\cdot\lambda(D(s)(X)) \\ &= f\cdot(D^*(\lambda))(X)(s) \end{aligned}$$

Es bleibt $(**)$ in 3.1 ist erfüllt zu zeigen: $\nabla^*(f\cdot\lambda)(X) = X(f)\cdot\lambda + f\cdot\nabla^*(\lambda)(X)$.

$$\begin{aligned} (\nabla^*(f\cdot\lambda))(X)(s) &= X((f\cdot\lambda)(s)) - f\cdot\lambda(\nabla(s)(X)) \\ &= X(f\cdot(\lambda(s)) - f\cdot\lambda(\nabla(s)(X)) \\ &= X(f)\cdot(\lambda(s) + f\cdot X(\lambda(s)) - f\cdot\lambda(\nabla(s)(X)) \\ &= X(f)\cdot(\lambda(s) + f\cdot(X(\lambda(s)) - \lambda(\nabla(s)(X))) \\ &= X(f)\cdot(\lambda(s) + f\cdot(\nabla^*\lambda)(X)(s) \end{aligned}$$

Der Leser ist aufgefordert, diese Gleichungen für die Lie-Ableitung zu überprüfen.
Zum Beispiel: $(D^*(\lambda))(f \cdot X)(Y) = Y(f) \cdot (\lambda(X) + f \cdot (D^*\lambda)(X)(Y)$

2. und **3.** wird dem Leser empfolen.

4. Die Definition ist legitim, d.h. $d^\nabla \omega \in \Omega^{p+1}_{r-1}(\eta)$.

a) d^∇ ist alternierend: Sei dazu o.B.d.A. $X_k = X_l$ für $k < l$. Dann ist mit $l = k+n$, $n \geq 1$

$$\sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} \nabla(\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_p))(X_i) = \mathbf{0}$$

$$\sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_p) = \mathbf{0}$$

nachzuweisen. Von der ersten Summe bleiben nur die Terme

$$(-1)^{k+1} \nabla(\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_k, \ldots, X_p)(X_k) + (-1)^{k+n+1} \nabla(\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_{k+n}, \ldots, X_p)(X_k)$$

Im ersten Term steht X_{k+n} an der (*k* + *n* – 1)-ten Stelle. Um nun X_{k+n} durch Vertauschungen an die *k*-te Stelle zu bringen, benötigen wir (n – 1) nachbarschaftliche Vertauschungen. Damit verändert sich $(-1)^{k+1}$ auf $(-1)^{k+n}$ und die beiden Summanden verschwinden.

Im zweiten Summand verschwinden schon mal die Glieder mit $X_i = X_k$, $X_j = X_{k+n}$, da $[X_k, X_k] = \mathbf{0}$ sowie die Terme mit $X_i \neq X_k$ und $X_j \neq X_{k+n}$. Folglich bleibt (i) $X_i = X_{k+n}$, (ii) $X_i = X_k$, $X_j \neq X_{k+n}$ und (iii) $X_j = X_k$. Also

$$\sum_{k+n<j} (-1)^{k+n+j+1} \omega([X_k, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_{k+n}, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_p)$$

$$+ \sum_{k<j<k+n} (-1)^{k+j+1} \omega([X_k, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_k, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_p)$$

$$+ \sum_{k+n<j} (-1)^{k+j+1} \omega([X_k, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_k, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_p)$$

$$+ \sum_{i<k} (-1)^{i+k+1} \omega([X_i, X_k], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_k, \ldots, X_p)$$

Im dritten Summand steht X_{k+n} an der (*k* + *n* – 2)-ten Stelle. Es müssen folglich k + n – 3 Vertauschungen vorgenommen werden, um X_{k+n} an die *k*-te Stelle zu bringen. Damit ist

$$\sum_{k+n<j} (-1)^{k+n+j+1} \omega([X_k, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_{k+n}, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_p)$$

$$+ \sum_{k+n<j} (-1)^{k+j+1} \omega([X_k, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_k, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_p) = \mathbf{0}$$

Folglich bleibt

$$\sum_{k<j<k+n} (-1)^{k+j+1} \omega([X_k, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_k, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_p)$$

$$+ \sum_{i<k} (-1)^{i+k+2} \omega([X_k, X_i], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_k, \ldots, X_p)$$

Im beiden Termen steht X_{k+n} an der (*k* + *n* – 2)-ten Stelle. Die Auslassungen in beiden Summanden sind aber gleich. Folglich darf im zweiten Term $\hat{X}_i$ mit $\hat{X}_k$ vertauscht und *i* = *j* gesetzt werden. Damit verschwinden auch diese Summen.

b) $d^\nabla \omega$ ist $C^r(M, \mathbf{K})$-linear.
Nach **a)** genügt es die Aussage für $f \cdot X_1$ zu beweisen.

$$
\begin{aligned}
d^{\nabla}\omega(f\cdot X_1,\dots,X_p) &= \nabla(\omega(X_2,\dots,X_p))(f\cdot X_1)\\
&+\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\nabla(\omega(f\cdot X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_p))(X_i)\\
&+\sum_{j=1}^{p}(-1)^{j+1}\omega([f\cdot X_1,X_j],X_2,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_p)\\
&+\sum_{0<i<j}(-1)^{i+j+1}\omega([X_i,X_j],f\cdot X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_p)
\end{aligned}
$$

Nun ist

$$\nabla(\omega(X_2,\dots,X_p))(f\cdot X_1) = f\cdot\nabla(\omega(X_2,\dots,X_p))(X_1)$$

Für die zweite Summe erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\nabla(\omega(f\cdot X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_p))(X_i) &= \sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\nabla(f\cdot\omega(X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_p))(X_i)\\
&=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}X_i(f)\cdot\omega(f\cdot X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_p)\\
&+f\cdot\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\nabla(\omega(X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_p))(X_i)
\end{aligned}
$$

Für den dritten Summe erhalten wir mit $L(g\cdot Y)(X) = X(g)\cdot Y + g\cdot L(Y)(X)$ und $L(Y)(X) = [X;Y] = -[Y;X]$ (vgl. 3.2, 3.3):

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p}(-1)^{j+1}\omega([f\cdot X_1,X_j],X_2,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_p) &= \sum_{j=1}^{p}(-1)^{j+2}\omega(X_j(f)\cdot X_1,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_p)\\
&+\sum_{j=1}^{p}(-1)^{j+1}\omega(f\cdot[X_1,X_j],X_2,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_p)\\
&=\sum_{j=1}^{p}(-1)^{j+2}X_j(f)\cdot\omega(X_1,X_2,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_p)\\
&+f\cdot\sum_{j=1}^{p}(-1)^{j+1}\omega([X_1,X_j],X_2,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_p)
\end{aligned}
$$

Betrachten wir den letzten Summanden

$$
\begin{aligned}
&\sum_{1<i<j}(-1)^{i+j+1}\omega([X_i,X_j],f\cdot X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_p) =\\
&\qquad f\cdot\sum_{1<i<j}(-1)^{i+j+1}\omega([X_i,X_j],X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_p)
\end{aligned}
$$

und fassen zusammen.

$$
\begin{aligned}
d^{\nabla}\omega(f\cdot X_1,\dots,X_p) &= f\cdot\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\nabla(\omega(X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_p))(X_i)\\
&+f\cdot\sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}\omega([X_i,X_j],X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_p)\\
&= f\cdot d^{\nabla}\omega(X_1,\dots,X_p)
\end{aligned}
$$

Ist $\eta = M_{\mathbf{K}}$ das Trivalbündel, so ist $d\omega(f\cdot X_1,\dots,X_p) = f\cdot d\omega(X_1,\dots,X_p)$.

Ist $D = L$, so ergibt sich

DEFINITION 3.17

Es sei D eine Ableitung von ξ über M. Für $D=\nabla$ sei $A = C^r(M, M_{\mathbf{K}})$ und für $A = \mathbf{K}$ sei $D = \mathcal{L}$. Es sei $s\in\Gamma_r(\xi)$ und

$$d^{\nabla}d^{\nabla}s\in\mathscr{A}^2(\tau_M;\xi).$$

Es seien $X, Y \in \Gamma_r(\tau_M)$ und $\Omega^D(X,Y)(s) := d^D d^D s(X,Y)$, dann ist $\Omega^D(X,Y) \in \mathscr{L}_A(\Gamma_r(\xi), \Gamma_r(\xi))$.
Die Abbildung

$$\Omega^D : \Gamma(\tau_M) \oplus \Gamma(\tau_M) \to \mathscr{L}_A(\Gamma_r(\xi), \Gamma_r(\xi))$$

Krümmungs-form

heißt ***Krümmungsform*** auf ξ über M.

BEWEIS:
Wir haben $\Omega^D(X,Y)(f \cdot s) = f \cdot \Omega^D(X,Y)(s)$ nachzuweisen.

$$\begin{aligned}
\Omega^D(X,Y)(f \cdot s) &= d^D d^D (f \cdot s)(X,Y) \\
&= D(d^D(f \cdot s)(Y))(X) - D(d^D(f \cdot s)(X))(Y) - d^D(f \cdot s)[X;Y] \\
&= D(D(f \cdot s)(Y))(X) - D(D(f \cdot s)(X))(Y) - D(f \cdot s)[X;Y] \\
&= D(Y(f) \cdot s + f \cdot D(s)(Y))(X) \\
&\quad - D(X(f) \cdot s + f \cdot D(s)(X))(Y) \\
&\quad - [X;Y](f) \cdot s - f \cdot D(s)[X;Y] \\
&= D(Y(f) \cdot s)(X) + D(f \cdot D(s)(Y))(X) \\
&\quad - D(X(f) \cdot s)(Y) - D(f \cdot D(s)(X))(Y) \\
&\quad - [X;Y](f) \cdot s - f \cdot D(s)[X;Y] \\
&= X(Y(f)) \cdot s + Y(f) \cdot Ds(X) + X(f) \cdot Ds(Y) + f \cdot D(D(s)(Y))(X) \\
&\quad - Y(X(f)) \cdot s - X(f) \cdot Ds(Y) - Y(f) \cdot Ds(X) - f \cdot D(D(s)(X))(Y) \\
&\quad - X(Y(f)) \cdot s + Y(X(f)) \cdot s - f \cdot D(s)[X;Y] \\
&= f \cdot (D(D(s)(Y))(X) - D(D(s)(X))(Y) - D(s)[X;Y]) \\
&= f \cdot d^D d^D(s)(X,Y) \\
&= f \cdot \Omega^D(X,Y)(s)
\end{aligned}$$

KOROLLAR 3.18

1. Setzen wir $D_X s := D(s)(X)$, so ist $\Omega^D(X,Y) = D_X \circ D_Y - D_Y \circ D_X - D_{[X,Y]}$.

2. Es seien α, β und σ die Hauptteile von X_V, Y_V und s_V. Dann ist lokal

$$\Omega^\nabla(\alpha,\beta)(\sigma) = \Gamma'(\alpha)(\sigma)(\beta) - \Gamma'(\beta)(\sigma)(\alpha) + \Gamma(\Gamma(\sigma)(\beta))(\alpha) - \Gamma(\Gamma(\sigma)(\alpha))(\beta)$$

3. Ist $\eta = M_{\mathbf{K}}$ das triviale Bündel, so ist $ddf = 0$, also $\Omega = 0$.

4. Ist $\eta = \tau_M$ das Tangentialbündel, so ergibt sich die ***Jacobi-Identität*** $\Omega^{\mathscr{L}} = \mathbf{0}$. **Jacobi-Identität**

BEWEIS:
1. Steht in der dritten Zeile des Beweises von 3.17.
2. Aufgabe.
3. Ergibt sich mit 1. und $\Omega(X,Y)(f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) - [X,Y](f)$
4. $\Omega^{\mathscr{L}}(X,Y) = \mathscr{L}_X \circ \mathscr{L}_Y - \mathscr{L}_Y \circ \mathscr{L}_X - \mathscr{L}_{\mathscr{L}_X(Y)}$ wende man auf $Z \in \tau_M$ an und beachte $\mathscr{L}_X(Y) = -\mathscr{L}_Y(X)$.

SATZ 3.19
Es sei ∇ eine starke Ableitung für η über M.

1. $d^\nabla(\alpha + \beta) = d^\nabla \alpha + d^\nabla \beta$ für $\alpha, \beta \in \Omega^p(\eta)$.

2. $d^\nabla d^\nabla \omega(X_1, \ldots, X_{p+2}) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \Omega^\nabla(X_i, X_j)\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{p+2})$ für $\omega \in \Omega^p(\eta)$.

3. $d^\nabla d^\nabla(f \cdot \omega) = f \cdot d^\nabla d^\nabla \omega$ für $f \in C^r(M, \mathbf{K})$

4. Genau dann ist $d^{\nabla}d^{\nabla} = \mathbf{0}$, wenn $\Omega^{\nabla} = \mathbf{0}$.

5. $d^{\nabla}\Omega^{\nabla} = \mathbf{0}$

6. $\iota_X \circ \iota_X = \mathbf{0}$

7. $\iota_X \circ \iota_Y = -\iota_Y \circ \iota_X$

8. $d^{\nabla}\iota_X + \iota_X d^{\nabla} = \nabla_X + \sum_X$, wobei $(\sum_X \omega)(X_1,\dots,X_p) := \sum_{i=1}^{p} \omega(X_1,\dots,(\nabla_X - \mathcal{L}_X)X_i,\dots,X_p)$

9. $(\iota_X d^{\nabla}\iota_X \omega)(X_1,\dots,X_{p-1}) = \omega(X,X_1,\dots,X_{p-1}) + \sum_{i=1}^{p-1} \omega(X,[X,X_i],X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_{p-1})$

Beweis:
Die **1.** Aussage ist trivial.

Wir beweisen **2.**:

$$\begin{aligned} d^{\nabla}d^{\nabla}\omega(X_1,\dots,X_{p+2}) &= \sum_{i=1}^{p+2} (-1)^{i+1}\nabla(d^{\nabla}\omega(X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_{p+2}))(X_i) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} d^{\nabla}\omega([X_i,X_j],X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_{p+2}) \end{aligned}$$

Wir berechnen die einzelnen Summanden getrennt.

$$\begin{aligned} \nabla(d^{\nabla}\omega(X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_{p+2}))(X_i) &= \sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{j+1}\nabla(\nabla(\omega(X_1,\dots,\hat{X}_j,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_{p+2}))(X_i))(X_j) \\ &+ \sum_{j=i+1}^{p+2}(-1)^{j}\nabla(\nabla(\omega(X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_{p+2}))(X_i))(X_j) \\ &+ \sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}\nabla(\omega([X_i,X_j],X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_{p+2}))(X_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^{\nabla}\omega([X_i,X_j],X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_{p+2}) &= \nabla(\omega(X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_{p+2}))([X_i,X_j]) \\ &+ \sum_{k=1}^{i-1}(-1)^{i+2}\nabla(\omega([X_i,X_j],X_1,\dots,\hat{X}_k,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_{p+2}))(X_k) \\ &+ \sum_{k=i+1}^{j-1}(-1)^{i+1}\nabla(\omega([X_i,X_j],X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_k,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_{p+2}))(X_k) \\ &+ \sum_{k=j+1}^{p+2}(-1)^{i+2}\nabla(\omega([X_i,X_j],X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,\hat{X}_k,\dots,X_{p+2}))(X_k) \\ &\left.\begin{aligned} &+ \sum_{k=1}^{i-1}(-1)^{k}\omega([[X_i,X_j],X_k],X_1,\dots,\hat{X}_k,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_{p+2}) \\ &+ \sum_{k=i+1}^{j-1}(-1)^{k+1}\omega([[X_i,X_j],X_k],X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_k,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_{p+2}) \\ &+ \sum_{k=j+1}^{p+2}(-1)^{k}\omega([[X_i,X_j],X_k],X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,\hat{X}_k,\dots,X_{p+2}) \end{aligned}\right\} = 0 \\ &\left.\begin{aligned} &+ \sum_{k<m<i}(-1)^{k+m+1}\omega([X_k,X_m],[X_i,X_j],X_1,\dots,\hat{X}_k,\dots,\hat{X}_m,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_{p+2}) \\ &+ \sum_{k<i<m<j}(-1)^{k+m}\omega([X_k,X_m],[X_i,X_j],X_1,\dots,\hat{X}_k,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_m,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_{p+2}) \\ &+ \sum_{k<i<j<m}(-1)^{k+m+1}\omega([X_k,X_m],[X_i,X_j],X_1,\dots,\hat{X}_k,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,\hat{X}_m,\dots,X_{p+2}) \\ &+ \sum_{i<k<j<m}(-1)^{k+m}\omega([X_k,X_m],[X_i,X_j],X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_k,\dots,\hat{X}_j,\dots,\hat{X}_m,\dots,X_{p+2}) \\ &+ \sum_{j<k<m}(-1)^{k+m+1}\omega([X_k,X_m],[X_i,X_j],X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,\hat{X}_k,\dots,\hat{X}_m,\dots,X_{p+2}) \end{aligned}\right\} = 0 \end{aligned}$$

Der geneigte Leser weise die Summationen zu null aus! Wir fassen nun zusammen und erhalten:

$$\begin{aligned} d^\nabla d^\nabla \omega(X_1,\dots,X_{p+2}) &= \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1}\nabla(\nabla\omega(X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_{p+2}))(X_i))(X_j) \\ &-\sum_{i<j} (-1)^{i+j+1}\nabla(\nabla\omega(X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_{p+2}))(X_j))(X_i) \\ &+\sum_{i<j} (-1)^{i+j+1}\nabla\omega(X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_{p+2})([X_i,X_j]) \\ &=\sum_{i<j} (-1)^{i+j}\Omega^\nabla(X_i,X_j)(\omega(X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_{p+2})) \end{aligned}$$

3. Folgt aus 2. unter Verwendung von 3.17.
4. Ist $d^\nabla d^\nabla = \mathbf{0}$, so so ist nach 3.17 auch $d^\nabla d^\nabla s = \mathbf{0}$ für alle $s \in \Omega^0(\eta)$ und damit $\Omega^\nabla = \mathbf{0}$. Die umgekehrte Richtung folgt aus 2.
5. Beachte $\Omega^\nabla \in \Omega^2(\mathscr{L}(\eta,\eta))$ und $d^\nabla\Omega^\nabla \in \Omega^3(\mathscr{L}(\eta,\eta))$.
Einerseits ist

$$\begin{aligned} d^\nabla\Omega^\nabla(X,Y,Z)s &= \nabla(\Omega^\nabla(Y,Z))(X)(s) - \nabla(\Omega^\nabla(X,Z))(Y)(s) + \nabla(\Omega^\nabla(X,Y))(Z)(s) \\ &+\Omega^\nabla([X,Y],Z)s - \Omega^\nabla([X,Z],Y)s + \Omega^\nabla([Y,Z]),X)s \end{aligned}$$

Andererseits ist nach 3.16 2. $\nabla(\Omega^\nabla(U,V))(W)(s) = \nabla(\Omega^\nabla(U,V)s)(W) - \Omega^\nabla(U,V)(\nabla s(W))$.
Mit 3.16 4. erhalten wir einmal

$$\begin{aligned} d^\nabla(d^\nabla d^\nabla s)(X,Y,Z) &= \nabla(\Omega^\nabla(Y,Z)s)(X) - \nabla(\Omega^\nabla(X,Z)s)(Y) + \nabla(\Omega^\nabla(X,Y)s)(Z) \\ &+\Omega^\nabla([X,Y],Z)s - \Omega^\nabla([X,Z],Y)s + \Omega^\nabla([Y,Z]),X)s \end{aligned}$$

und mit 3.16 folgt

$$d^\nabla d^\nabla(d^\nabla s)(X,Y,Z) = \Omega^\nabla(Y,Z)(d^\nabla s)(X) - \Omega^\nabla(X,Z)(d^\nabla s)(Y) + \Omega^\nabla(X,Y)(d^\nabla s)(Z).$$

Dies zeigt $d^\nabla\Omega^\nabla(X,Y,Z)s = d^\nabla(d^\nabla d^\nabla s)(X,Y,Z) - d^\nabla d^\nabla(d^\nabla s)(X,Y,Z) = \mathbf{0}$ für alle $s \in \Omega^0(\eta)$ und für alle $X,Y,Z \in \Gamma_r(\tau_M)$. Damit ist 5. bewiesen.

Die Aussagen 6. bis 9. sind durch einfaches Nachrechnen zu verifizieren.

Definition und Satz 3.20
Es sei $I:\Gamma(\tau_M) \to \Gamma(\tau_M)$ die Identität, also $I \in \Omega^1(\tau_M)$. Das Differential $d^\nabla I =: T^\nabla$ heißt ***Torsionsform*** von ∇. Mit 3.17 4. folglich Torsionsform

$$T^\nabla(X,Y) = \nabla Y(X) - \nabla X(Y) - [X,Y].$$

Lokal gilt folgedessen

$$T_V^\nabla(X_V,Y_V) = \Gamma_V(Y_V)(X_V) - \Gamma_V(X_V)(Y_V).$$

Bemerkung 3.21
Mit der Torsionsform T^∇ ist nach 3.17 3. und 4.

$$\begin{aligned} d^\nabla\omega(X_1,\dots,X_p) &= \sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}(\tilde{\nabla}\omega)(X_i)(X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_p)) \\ &+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega(T^\nabla(X_i,X_j),X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_p) \end{aligned}$$

Satz 3.22
Es sei ∇ eine Ableitung auf η über M. Verschwindet die Torsionsform T^∇, so ist

1. $$\Omega^\nabla(Y,Z)X + \Omega^\nabla(X,Z)Y + \Omega^\nabla(X,Y)Z = \mathbf{0}$$

2. $$d^{\nabla}\omega(X_1,\dots,X_p)=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}(\tilde{\nabla}(\omega))(X_i)(X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_p))$$

und die *2. Bianchi-Identität*

3. $$(\tilde{\nabla}(\Omega^{\nabla})(X))(Y,Z)+(\tilde{\nabla}(\Omega^{\nabla})(Y))(Z,X)+(\tilde{\nabla}(\Omega^{\nabla})(Z))(X,Y)=\mathbf{0}$$ 2. Bianchi-Identität

BEWEIS:
Die 1. Aussage folgt aus $d^{\nabla}d^{\nabla}I=d^{\nabla}T^{\nabla}$ unter Beachtung von 3.18 2. und $T^{\nabla}=\mathbf{0}\Rightarrow d^{\nabla}T^{\nabla}=\mathbf{0}$. Mit 3.20 erhalten wir 2. Die Aussage 3. ist ein Spezialfall von 2.

DEFINITION 3.23
Es sei T^{∇} die Torsionsform und Ω^{∇} die Krümmungsform. Es sei $\omega\in\Gamma(\tau_M^*)$ und $\alpha\in\Gamma(\xi^*)$. Dann heißt
$$\hat{T}^{\nabla}(\omega,X,Y):=\omega(T^{\nabla}(X,Y))$$ Torsionstensor
der ***Torsionstensor*** bezüglich ∇ und
$$\hat{\Omega}^{\nabla}(\alpha,X,Y,s):=\alpha(\Omega^{\nabla}(X,Y)s)$$ Krümmungstensor
der ***Krümmungstensor*** bezüglich ∇ .

DEFINITION 3.24
Es sei ∇ ein Zusammenhang auf η über M.

1. Der $C^r(M,\mathbf{K})$ -Modul
$$\Omega_r(\eta):=\bigoplus_{i=0}^{\infty}\Omega_r^i(\eta)$$ Graßmann-Modul
heißt ***Graßmann-Modul***.

2. Es sei $\Phi\in\mathscr{L}(\Gamma_r(\gamma),\Gamma_r(\eta);\Gamma_r(\eta))$. Es seien $\alpha\in\Omega^p(\gamma),\beta\in\Omega^q(\eta)$, dann ist durch
$$(\alpha\underset{\Phi}{\wedge}\beta)(X_1,\dots,X_{p+q}):=\sum_{\substack{\sigma\in S_{p+q}\\ \sigma(1)<\dots<\sigma(p)\\ \sigma(p+1)<\dots<\sigma(p+q)}}\operatorname{sgn}(\sigma)\Phi(\alpha(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(p)}),\beta(X_{\sigma(p+1)},\dots,X_{\sigma(p+q)}))$$
ein Produkt zwischen α und β definiert mit $\alpha\underset{\Phi}{\wedge}\beta\in\Omega^{p+q}(\eta)$.

3. Ist $\gamma=\eta$ und gilt $\Phi(s_1,\Phi(s_2,s_3))=\Phi(\Phi(s_1,s_2),s_3)$ für alle $s_1,s_2,s_3\in\Gamma(\eta)$, so wird der Graßmann-Modul $\Omega^{p+q}(\eta)$ durch $\alpha\underset{\Phi}{\wedge}\beta$ zu einer $C^r(M,\mathbf{K})$ - Algebra. Graßmann-Algebra
Sie heißt ***Graßmann-Algebra***.

AUFGABE : Weisen Sie $\alpha\underset{\Phi}{\wedge}\beta$ als alternierend nach.

SATZ 3.25
Es sei ∇ ein Zusammenhang auf η über M und $\Phi\in\mathscr{L}(\Gamma_r(\eta),\Gamma_r(\eta);\Gamma_r(\eta))$ sowie $f\in C^r(M,\mathbf{K})$. Es seien $\alpha\in\Omega^p(\eta),\beta\in\Omega^q(\eta)$, dann gilt

1. $$d^{\nabla}(f\cdot\alpha)=df\wedge\alpha+f\cdot d^{\nabla}\alpha$$

2. $$d^{\nabla}(\alpha\underset{\Phi}{\wedge}\beta)=d^{\nabla}\alpha\underset{\Phi}{\wedge}\beta+(-1)^{\deg(\alpha)}\alpha\underset{\Phi}{\wedge}d^{\nabla}\beta$$

BEWEIS:
Wir rechnen 1. nach:

$$
\begin{aligned}
(d^{\nabla}(f\cdot\alpha))(X_1,\dots,X_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}\nabla(f\cdot\alpha(X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_{p+1}))(X_i)\\
&\quad+\sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}f\cdot\alpha([X_i,X_j],X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots X_{p+1})\\
&=\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}X_i(f)\cdot\alpha(X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_{p+1})\\
&\quad+\sum_{i=1}^{p+1} f\cdot\nabla(\alpha(X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_p))(X_i)\\
&\quad+\sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}f\cdot\alpha([X_i,X_j],X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots X_{p+1})\\
&=(df\wedge\alpha+f\cdot d^{\nabla}\alpha)(X_1,\dots,X_{p+1})
\end{aligned}
$$

Die Aussage 2. folgt aus Satz 0.6.4 und Korrollar 0.6.5
Für die linke Seite gilt:

$$
\begin{aligned}
d^{\nabla}(\alpha\underset{\Phi}{\wedge}\beta)(X_0,\dots,X_{r+s+1}) &= \sum_{i=1}^{r+s+1}(-1)^{i+1}\nabla_{X_i}(\alpha\underset{\Phi}{\wedge}\beta)(X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_{r+s+1})\\
&\quad+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}(\alpha\underset{\Phi}{\wedge}\beta)([X_i,X_j],X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_{r+s+1})
\end{aligned}
$$

Setzen wir die Definition von $\underset{\Phi}{\wedge}$ ein und beachten $\overset{\wedge}{\nabla}\Phi=\mathbf{0}$ so folgt:

$$
\begin{aligned}
\nabla_{X_i}(\alpha\underset{\Phi}{\wedge}\beta)(Y_1,\dots,Y_{p+q}) &= \nabla_{X_i}\sum_{\substack{\sigma\in S_{p+q}\\ \sigma(1)<\dots<\sigma(p)\\ \sigma(p+1)<\dots<\sigma(p+q)}}\operatorname{sgn}(\sigma)\Phi(\alpha(Y_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(p)}),\beta(Y_{\sigma(p+1)},\dots,Y_{\sigma(p+q)}))\\
&=\sum_{\substack{\sigma\in S_{p+q}\\ \sigma(1)<\dots<\sigma(p)\\ \sigma(p+1)<\dots<\sigma(p+q)}}\operatorname{sgn}(\sigma)\nabla_{X_i}\Phi(\alpha(Y_{\sigma(1)},\dots,Y_{\sigma(p)}),\beta(Y_{\sigma(p+1)},\dots,Y_{\sigma(p+q)}))\\
&=\sum_{\substack{\sigma\in S_{p+q}\\ \sigma(1)<\dots<\sigma(p)\\ \sigma(p+1)<\dots<\sigma(p+q)}}\operatorname{sgn}(\sigma)\sum_{j=1}^{p}\Phi(\alpha(Y_{\sigma(1)},\dots,\nabla_{X_i}Y_{\sigma(j)},\dots,Y_{\sigma(p)}),\beta(Y_{\sigma(p+1)},\dots,Y_{\sigma(p+q)}))\\
&\quad+\sum_{\substack{\sigma\in S_{p+q}\\ \sigma(1)<\dots<\sigma(p)\\ \sigma(p+1)<\dots<\sigma(p+q)}}\operatorname{sgn}(\sigma)\sum_{k=1}^{q}\Phi(\alpha(Y_{\sigma(1)},\dots,Y_{\sigma(p)}),\beta(Y_{\sigma(p+1)},\dots,\nabla_{X_i}Y_{\sigma(k)},\dots,Y_{\sigma(p+q)}))
\end{aligned}
$$

Pull back und push out eines Bündels

Ist $f\in C^r(N,M)$ und ξ ein Vektorraumbündel über *M*, so ist die Frage naheliegend, ob eine Ableitung *D* auf ξ über *M* eine Ableitung f^*D auf $f^*\xi$ über *N* auf kanonische Weise induziert? Entsprechend ergibt sich die Frage, ob ein Diffeomorphismus $f\in \operatorname{Diff}^r(N,M)$ eine Ableitung $f_\bullet D$ auf $f_\bullet\eta$ für ein Vektorraumbündel η über *N* induziert, wenn *D* eine Ableitung auf η ist?

Wir untersuchen dazu zuerst den Spezialfall, dass $f\in \operatorname{Diff}^r(N,M)$ ist.

SATZ 3.26

1. Es sei ∇ eine globale Ableitung auf η über *N*. Es sei $f\in \operatorname{Diff}^r(N,M)$ und $f_\bullet\eta$ das ***push out***-Bündel. Es sei $s\in\Gamma(f_\bullet\eta)$ und $X\in\Gamma(\tau_M)$.
Wir definieren $(f_\bullet\nabla)(s)(X):=\nabla((f^{-1})^*s)(f_\bullet X)$. Dann ist $f_\bullet\nabla$ eine Ableitung auf $f_\bullet\eta$.

2. Es sei ∇ eine Ableitung auf ξ über *M*. Es sei $f \in \mathrm{Diff}^r(N,M)$ und $f^*\xi$ das ***pull back***-Bündel von ξ durch *f*. Es seien $s \in \Gamma(f^*\xi)$ und $X \in \Gamma(\tau_N)$. Beachte, dass $(\pi^* f)(s) \in \Gamma(\xi)$ und $f_*(X) = Tf \circ X \circ f^{-1}$ ist.
Wir definieren $(f^*\nabla)(s)(X) := (\nabla(\pi^* f)(s))(f_* X)$. Dann ist $f^*\nabla$ eine Ableitung auf $f^*\xi$ über *N*.

Beweis:

2. Wir betrachten die Aussage lokal.

$$\begin{aligned}((f^*\nabla)(s)(X))_{|V}(n) &= \nabla((\pi^* f)(s))(f^* X)_{|f(V)}(f(n)) \\ &= ((\pi^* f)(s)_{|f(V)})'(f(n)) \bullet (f'(n)X_V(n)) \\ &\quad + \Gamma_{|f(V)}(f(n))(\pi^* f(s)_{f(V)}(f(n), f'(n)X_V(n)) \\ &= s_V'(n)(X_V(n)) + (\Gamma \circ f)_V(s_V(n), f'(n)(X_V(n)).\end{aligned}$$

Die rechte Seite hängt also nur von *n* ab. Also kurz

$$(f^*\nabla)(s)(X) = s' \circ X + (\Gamma \circ f) \bullet (s \times f' \circ X).$$

Ist $\xi = \tau_M$ und $D = \mathcal{L}$, so ist

$$(f^*\mathcal{L})Y(X) = (\mathcal{L}(\pi^* f)(Y))(X) = (\mathcal{L}(\pi^* f)(Y))(f_* X) = [f_* X, \pi^* f(Y)].$$

Identifizieren wir τ_N mit $f^*\tau_M$ (dies ist hier möglich), so ist

$$(f^*\mathcal{L})Y(X) = [f_* X, f_* Y] = f_*[X,Y] = f_*(\mathcal{L}(Y)(X)).$$

Da wir $(f^*\xi)_n = \xi_{f(n)}$ identifiziert haben, dürfen wir $(\pi^* f)(s) = s$ interpretieren und erhalten als Verallgemeinerung:

Definition 3.27

Es sei ∇ eine globale Ableitung auf ξ über *M*, $f \in C^r(N,M)$ und $f^*\xi$ das ***pull back-Bündel*** von ξ. Es seien $s \in \Gamma(f^*\xi)$ und $X \in \Gamma(\tau_N)$. Dann ist durch **Pull back-Bündel**

$$((f^*\nabla)(s)(X))_V = s_V' \circ X_V + (\Gamma \circ f)_V \bullet (s_V \times f' \circ X_V),$$

wobei Γ die zu ∇ gehörige Christoffelabbildung ist, eine globale Ableitung auf $f^*\xi$ über *N* definiert.

Entsprechend definiert $((f^*\mathcal{L})(Y)(X))_V := \mathcal{L}(f' \circ Y_V)(f' \circ X_V) = f' \circ (\mathcal{L}(Y)(X))_V$ einen LIE-Ableitung auf $f^*(\tau_M)$ über *N*.

Man weist nun leicht nach, dass $f^*\nabla$ in kanonischer Weise (vergleiche Definition 3.2) eine globale Ableitung auf $(f^*\xi)'$, $\mathscr{L}(f^*\xi, f^*\xi)$ und $\mathscr{L}_k^1\left((f^*\xi)', f^*\xi; f^*\eta\right)$ induziert.

Entsprechendes gilt für $f^*\mathcal{L}$.

Ferner existiert ein Differential $d^{f^*\nabla}(\Omega^p(f^*\xi)) \subset \Omega^{p+1}(f^*\xi)$. Dazu sei $\alpha \in \Omega^p(f^*\xi)$, und es seien $X_1, \ldots, X_p \in \Gamma(\tau_N)$, also $\alpha(X_1, \ldots, X_p) \in \Gamma(f^*\xi)$.

$$\begin{aligned}d^{f^*\nabla}\alpha(X_1, \ldots, X_{p+1}) &:= \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}(f^*\nabla)(\alpha(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{p+1}))(X_i) \\ &\quad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}\alpha([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{p+1})\end{aligned}$$

DEFINITION 3.28

Es sei $\omega \in \Omega^p(\xi)$ und $f \in C^r(N,M)$. Es seien $X_1,\ldots,X_p \in \Gamma(\tau_N)$. Es sei $f^*\omega$ definiert durch

$$((f^*\omega)(X_1,\ldots,X_p))(n) := \omega(f(n))(T_nf(X_1(n)),\ldots,T_nf(X_p(n))).$$

Die durch *f* zurückgeholte Differentialform $f^*\omega \in \Omega^p(f^*\xi)$ heißt ***pull back von*** ω ***durch*** *f*. **pull back**

LEMMA 3.29

Es seien $\alpha,\beta \in \Omega(\xi)$, $f \in C^r(N,M)$ und D eine Ableitung auf ξ über M. Es seien $X_1,\ldots,X_p \in \Gamma(\tau_N)$.

Gibt es zu jedem $X \in \Gamma(\tau_N)$ ein $Y \in \Gamma(\tau_M)$ mit $T_nf(X(n)) = Y(f(n))$, dann ist

$$(f^*D)((f^*\omega)(X_1,\ldots,X_p))(X) = D(\omega(Y_1,\ldots,Y_p)\circ f)(Y\circ f)$$

und

$$f^*(\alpha \underset{\Phi}{\wedge} \beta) = f^*\alpha \underset{\Phi}{\wedge} f^*\beta$$

sowie

$$d^{f^*\nabla}(f^*\alpha) = f^*(d^\nabla\alpha).$$

BEWEIS:

Nach 3.25 ist

$$\begin{aligned}(f^*\nabla)_X((f^*\omega)(X_1,\ldots,X_r)) &= (f^*\nabla)_X(\omega(Tf(X_1),\ldots,Tf(X_r)) \\ &= (f^*\nabla)_X(\omega(Y_1,\ldots,Y_r).\end{aligned}$$

Folglich gilt mit $V \subset N$:

$$\begin{aligned}((f^*\nabla)_X(\omega(Y_1,\ldots,Y_r)\circ f)_V &= (\omega(Y_1,\ldots,Y_r)\circ f)'_V \bullet X_V + (\Gamma\circ f)_V \bullet (((\omega(Y_1,\ldots,Y_r)\circ f)\times Y\circ f)_V \\ &= (\omega(Y_1,\ldots,Y_r)'_{f(V)}\circ f)\bullet f'\bullet X_V + \Gamma_{f(V)}\circ f \bullet (\omega(Y_1,\ldots,Y_r)\circ f\times Y\circ f) \\ &= \left(\omega(Y_1,\ldots,Y_r)'_{f(V)}\bullet f'\bullet X_V + \Gamma_{f(V)}\bullet(\omega(Y_1,\ldots,Y_r)\times Y\right)\circ f \\ &= \left(\nabla_Y(\omega(Y_1,\ldots,Y_r))_{f(V)}\right)\circ f\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $T_nf([X_i(n),X_j(n)] = [Y_i(f(n)),Y_j(f(n))]$.

Damit ist

$$\begin{aligned}(d^{f^*\nabla}f^*\omega)(X_1,\ldots,X_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r+1}(-1)^i(f^*\nabla)_{X_i}(f^*\omega)(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{r+1}) \\ &\quad -\sum_{i<j}(-1)^{i+j}(f^*\omega)([X_i,X_j],X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{r+1}) \\ &\overset{(\#)}{=} \sum_{i=1}^{r+1}(-1)^i\nabla_{Y_i}(\omega(Y_1,\ldots,\hat{Y}_i,\ldots,Y_{r+1}))\circ f \\ &\quad -\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([Y_i,Y_j],Y_1,\ldots,\hat{Y}_i,\ldots,\hat{Y}_j,\ldots,Y_{r+1})\circ f \\ &= ((d^\nabla\omega)(Y_1,\ldots,Y_{r+1}))\circ f \\ &= ((d^\nabla\omega)\circ f)(Tf\,X_1,\ldots,Tf\,Y_{r+1}) \\ &= (f^*(d^\nabla\omega))(X_1,\ldots,X_{r+1}).\end{aligned}$$

Die Gleichheit (#) gilt nach Lemma 3.22.

Den Fall $\xi = \tau_M$ und $D = \mathcal{L}$ behandelt man entsprechend. Die Aussage $f^*(\alpha \underset{\Phi}{\wedge} \beta) = f^*\alpha \underset{\Phi}{\wedge} f^*\beta$ ist als Übungsaufgabe aufzufassen.

Wiederholen wir noch einmal die innere Kontraktion und das innere Produkt, um ihre Eigenschaften aufzulisten.

DEFINITION UND SATZ 3.30
Es seien $t \in \Gamma(\mathscr{L}^l_k(\xi',\xi;\,\eta))$, $\alpha \in \Gamma(\xi')$ und $s \in \Gamma(\xi)$. Durch

$$(C^{i,s}_{j,\alpha}t)(\alpha^1,\ldots,\alpha^{k-1},s_1,\ldots,s_{l-1}) := t(\alpha^1,\ldots,\alpha^{j-1},\alpha^j,\alpha^{j+1},\ldots,\alpha^{k-1},s_1,\ldots,s_{i-1},s_i,s_{i+1},\ldots,s_{l-1})$$

ist eine $\mathscr{C}^p(M,\mathbf{K})$ – lineare Abbildung

$$C^{i,s}_{j,\alpha} : \Gamma\left(\mathscr{L}^l_k(\xi',\xi;\,\eta)\right) \to \Gamma\left(\mathscr{L}^{l-1}_{k-1}(\xi',\xi;\,\eta)\right)$$

definiert. Sie heißt ***innere Kontraktion*** vom Type (i,j) vermöge (α,s). Innere Kontraktion

Es sei $\omega \in \Omega^r(\xi)$ und $X \in \Gamma(\tau_M)$. Durch

$$(\iota_X\omega)(X_1,\ldots,X_r) := \omega(X,X_1,\ldots,X_r)$$

ist eine $\mathscr{C}^p(M,\mathbf{K})$ – lineare Abbildung

$$\iota_X : \Omega^r(\xi) \to \Omega^{r-1}(\xi)$$

definiert. Sie heißt ***inneres Produkt*** auf $\Omega(\xi)$. Inneres Produkt

Mit diesen Definitionen gilt:

1. $\iota_X \circ \iota_X = 0$. **2.** $\iota_X \circ \iota_Y = -\iota_Y \circ \iota_X$. **3.** $\iota_{g\cdot X} = g\cdot\iota_X$ **4.** $f^*(\iota_X\omega) = \iota_{f^*X} f^*\omega$.

5. $\iota_X(\alpha \underset{\Phi}{\wedge} \beta) = (\iota_X\alpha)\underset{\Phi}{\wedge}\beta + (-1)^{\deg(\alpha)}\alpha\underset{\Phi}{\wedge}\iota_X\beta$ **6.** $\iota_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X\iota_Y - \iota_X\mathcal{L}_Y$

7. $\mathcal{L}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y]$ **8.** $\mathcal{L}_X[Y,Z] = [\mathcal{L}_XY,Z] + [Y,\mathcal{L}_XZ]$ **9.** $d\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_Xd$

10. $d^D\iota_X + \iota_Xd^D = D_X + \Sigma_X$, wobei $(\Sigma_X\omega)(X_1,\ldots,X_p) = \sum_{i=1}^p \omega(X_1,\ldots,(D_X - \mathcal{L}_X)X_i,\ldots,X_p)$

Wir kommen nun zu den ***basisabhängigen Darstellungen***.

SATZ 3.31
Es sei $\omega \in \Omega^r(\xi)$. Es sei $\mathbf{K} \in \{\mathbf{R},\mathbf{C}\}$. Es seien τ_M und ξ endlichdimensionale Bündel über M mit $\dim(\tau_M) = n$ und $\dim(\xi) = m$.
Dann hat ω die Darstellung:

$$\omega = \sum_{i=1}^m \omega^i \cdot s_i, \qquad \text{wobei} \qquad \omega^i \in \Omega^r(M_{\mathbf{K}}) \qquad \text{und} \qquad s_i \in \Gamma(\xi).$$

Ferner hat $\omega^i \in \Omega^r(M_{\mathbf{K}})$ die Darstellung

$$\omega^i = \sum_{1<i_1<\cdots<i_r<n} \omega^i_{i_1\cdots i_r}\, dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r},$$

wobei das Produkt induktiv nach Definition 3.16 definiert ist. Insbesondere gilt mit $\beta \in S_n$

$$dx^{\beta(i_1)}\wedge\cdots\wedge dx^{\beta(i_r)} = \operatorname{sgn}(\beta)\cdot dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r} \qquad \text{und} \qquad \bigwedge_{1\le i\le n} dx^i\wedge dx^i = 0.$$

BEWEIS:
Es sei $V \subset M$ eine trivialisierende Umgebung für ξ. Nach Voraussetzung existieren Basisschnitte $s_1,\ldots s_m \in \Gamma(\xi_M)$ und Basisfelder $t_1,\ldots t_n \in \Gamma(\tau_V)$. Folglich ist aufgrund $\dim(\xi) = m$

$$\omega_V(t_{i_1},\ldots,t_{i_r}) = \sum_{i=1}^m \omega^i_V(t_{i_1},\ldots,t_{i_r})\cdot s_i \in \Gamma(\xi_V) \cong \Gamma(V_{\mathbf{K}^m})$$

und

$$\omega_V^i(t_{i_1},\ldots,t_{i_r}) \in \Gamma(V_{\mathbf{K}}).$$

Da ω_V alternierend ist, hat auch ω_V^i für jedes $1 \le i \le m$ m diese Eigenschaft. Es sei nun $\omega^i \in \Omega^r(M_{\mathbf{K}})$. Wir setzen nun $\omega^i_{i_1\cdots i_r} := \omega^i(t_{i_1},\ldots,t_{i_r})$. Es seien $dx^1,\ldots,dx^n$ die zu $t_1,\ldots,t_n \in \Gamma(\tau_V)$ dualen Basisformen, also $dx^j(t_i) = \delta_i^j$. Es folgt

$$\omega^i = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} \omega^i_{i_1\cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r},$$

wobei

$$[(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{r-1}}) \wedge dx^{i_r}](t_{j_1},\ldots,t_{j_r}) = \sum_{\substack{\sigma \in S_r \\ \sigma(j_1) < \cdots < \sigma(j_{r-1})}} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot [(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{r-1}})(t_{\sigma(j_1)},\ldots,t_{\sigma(j_{r-1})})] \cdot dx^{i_r}(t_{\sigma(j_r)}) \cdot$$

induktiv mit Definition 3.16 4. definiert ist. Insbesondere gilt

$$dx^{\beta(i_1)} \wedge \cdots \wedge dx^{\beta(i_r)} = \operatorname{sgn}(\beta) \cdot dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \qquad \text{und} \qquad \bigwedge_{1 \le i \le n} dx^i \wedge dx^i = 0.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

SATZ 3.32
Es sei $\omega \in \Omega^r(\xi)$ und ∇ ein Zusammenhang auf ξ über M. Das Vektorraumbündel habe die Dimension m. Es sei $\omega = \sum_{i=1}^m \omega^i \cdot s_i$ in einer Trivialisierung V.
Dann ist

$$d^\nabla \omega = \sum_{i=1}^m (d\omega^i \cdot s_i + \omega^i \wedge d^\nabla s_i).$$

Insbesondere finden wir im Banachraum mit dem kanonischen Zusammenhang die Formel

$$d\omega(X_1,\ldots,X_r) = \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} \omega' \bullet X_i \bullet (X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots X_r).$$

BEWEIS:
Wir lassen den Index V der trivialisierenden Umgebung weg und arbeiten lokal im Banachraum.

$$\begin{aligned}
d^\nabla \omega(X_1,\ldots,X_r) &= \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} (\nabla \omega(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r))(X_i) \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i,X_j],X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_r) \\
&= \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} \left(\left(\omega(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r)\right)' \bullet X_i + \Gamma(\omega(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r))(X_i) \right) \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega(X_j'X_i - X_i'X_j, X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_r) \\
&= \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} \left(\omega' \bullet X_i \bullet (X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r) + \Gamma(\omega(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r))(X_i) \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} \sum_{j=1}^r \omega(X_1,\ldots,X_j' \cdot X_i,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r) \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega(X_j'X_i - X_i'X_j, X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_r) \\
&= \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} \left(\omega' \bullet X_i \bullet (X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r) + \Gamma(\omega(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r))(X_i) \right)
\end{aligned}$$

Setzen wir jetzt die lokale Darstellung ein und beachten, dass

$$\omega^j \cdot s_j(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r) = \omega^j(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r)\cdot s_j$$

gilt, so folgt nach Definition 3.16:

$$\begin{aligned}
d^\nabla\omega(X_1,\ldots,X_r) &= \sum_{i=1}^{r}(-1)^{i+1}\sum_{j=1}^{m}\Big((\omega^j)' \bullet X_i \bullet (X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r) \\
&\quad + \omega^j(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r)\cdot s_j' \cdot X_i \\
&\quad + \omega^j(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r)\Gamma(s_j)(X_i)\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{m}\Big(d\omega^j(X_1,\ldots,X_r)\cdot s_j \\
&\quad + \sum_{i=1}^{r}(-1)^{i+1}\omega^j(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r)\cdot d^\nabla s_j(X_i)\Big) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{m}(d\omega^j\cdot s_j + \omega^j \wedge d^\nabla s_j)\right)(X_1,\ldots,X_r).
\end{aligned}$$

Die Formel für einen Banachraum erhalten wir durch Gamma $\Gamma = 0$.

SATZ 3.33

Es sei $\omega \in \Omega^r(M_{\mathbf{K}})$, $\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n} \omega_{i_1\cdots i_r} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}$. Dann ist

$$d\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n} d\omega_{i_1\cdots i_r}\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_r}$$

wobei

$$\begin{aligned}
d\omega_{i_1\cdots i_r} &= \sum_{j=1}^{n} D_j\omega_{i_1\cdots i_r}dx^j \\
&= \sum_{j=1}^{n} t_j(\omega_{i_1\cdots i_r})dx^j.
\end{aligned}$$

Hierbei sind $t_1,\ldots,t_n$ die zu $dx^1,\ldots dx^n$ dualen Basisfelder.

BEWEIS:

Da d als Differential $\mathbf{K}-$ linear ist, genügt es die Aussage für $\omega = f\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}$ zu beweisen. Nach Satz 3.16 { 2.} ist

$$\begin{aligned}
d\omega &= d(f\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}) \\
&= df\wedge(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}) + f\,d(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}).
\end{aligned}$$

Es sei nun $X\in\Gamma(\tau_M)$, $X=\sum_{i=1}^{n}h_it_i$, $t_1,\ldots,t_n$ die zu $dx^1,\ldots dx^n$ dualen Basisfelder. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
df(X) &= \sum_{i=1}^{n} h_i df(t_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} h_i t_i(f) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\ \sum_{i=1}^{n} h_i t_i(f)\,dx^j(t_i) \\
&= \sum_{j=1}^{n} t_j(f)\ dx^j(X).
\end{aligned}$$

Offenbar gilt $df\wedge(dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_r}) = df\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_r}$. Es bleibt daher zu zeigen, dass $d(dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_r})=0.$ Dies geschieht durch Induktion nach r.

Für $r=1$ ist $d(dx^{i_1})=0$ nach Korollar 3.19. Sei nun die Aussage für $r-1$ bewiesen. Dann finden wir

$$d(x^{i_1}dx^{i_2}\wedge\ldots\wedge dx^{i_r})=dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_r}+x^{i_1}d(dx^{i_2}\wedge\ldots\wedge dx^{i_r})=dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_r}$$

und damit $d(dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_r})=dd(x^{i_1}dx^{i_2}\wedge\ldots\wedge dx^{i_r})=0$ nach Korollar 3.19.

Korollar 3.34

Es seien ∇ eine Ableitung für ξ über M und $\alpha\in\Omega^r(\xi)$. Es sei $f\in\mathscr{C}^p(N,M)$. Es seien $X_1,\ldots,X_r\in\Gamma(\tau_N)$. Zu jedem $X\in\Gamma(\tau_N)$ existiere ein $Y\in\Gamma(\tau_M)$ mit $T_nf(X(n))=Y(f(n))$. Dann gilt:

1. $f^*dx^i=d(f^*x^i)=d(x^i\circ f)=df_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial y^j}dy^j$, wenn $dx^1,\ldots dx^n$ die zu $t_1,\ldots,t_n$ dualen Basisfelder in einer Trivialisierung $f(V)\cap W\subset M$ sind.

2. $f^*d^\nabla\alpha=\sum_{i=1}^{m}\left(d(f^*\alpha)\cdot f^*s_i+f^*(\alpha^i)\wedge d^{f^*\nabla}f^*s_i\right)$, wenn $\dim(\xi_p)=m$ ist.

$f^*s_1,\ldots,f^*s_m$ sind die zurückgeholten Basisschnitte auf $f^*\xi$.

4. Etwas Vektoranalysis

Definition 4.1

Es sei M eine Mannigfaltigkeit der Klasse $\mathscr{C}^r$ und G eine nicht ausgeartete Metrik der Klasse $\mathscr{C}^r$. Es sei ∇ eine globale Ableitung auf M und $f\in\mathscr{C}^r(M)$.

- **a)** Nach Definition 3.2 gibt es genau ein Vektorfeld X mit $\iota_X G=df$. Das Vektorfeld X heißt ***Gradientenfeld*** und wird mit $\operatorname{grad}(f)$ bezeichnet. Gradientenfeld
- **b)** Die Abbildung $h_f^\nabla(X,Y):=\frac{1}{2}\left(\nabla((df)(X))(Y)+\nabla((df)(Y))(X)\right)$ ist symmetrisch und heißt ***Hessische Bilinearform*** von f. Mit anderen Worten: $h_f^\nabla\in S^2(\Gamma(\tau_M),\Gamma(M_{\mathbf{K}}))$. Hessische Bilinearform
- **c)** Es sei $H_f^\nabla\in\mathscr{L}(\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\tau}_M),\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\tau}_M))$ definiert durch $H_f^\nabla:=d^\nabla\operatorname{grad}(f)$.

Satz 4.2

Es sei (M,G) eine *PRM* und ∇ ein Zusammenhang auf M. Es seien $f,g\in\mathscr{C}^p(M)$, $X,Y\in\Gamma(\tau_M)$. Ferner $h\in\mathscr{C}^p(\mathbf{R})$. Dann gilt:

$$\operatorname{grad}(f+g)=\operatorname{grad}(f)+\operatorname{grad}(g) \quad (1)$$

$$\operatorname{grad}(fg)=f\cdot\operatorname{grad}(g)+\operatorname{grad}(f)\cdot g \quad (2)$$

$$\operatorname{grad}(h\circ f)=((dh)\cdot f)\operatorname{grad}(f) \quad (3)$$

$$h_f^\nabla(X,Y)=d(df(Y))(X)-df(\nabla_X Y)+\tfrac{1}{2}df(T(X,Y)) \quad (4)$$

Ist $\mathtt{C}$ der ***Levi-Civita***-Zusammenhang, so gilt außerdem: Levi-Civita

$$H_f^{\mathtt{C}}(X)=(d^{\mathtt{C}}\operatorname{grad}(f))(X)=\mathtt{C}_X\operatorname{grad}(f) \quad (5)$$

$$h_f^{\mathtt{C}}(X,Y)=G(\mathtt{C}_X\operatorname{grad}(f),Y)=G(X,\mathtt{C}_Y\operatorname{grad}(f)) \quad (6)$$

$$h_f^{\mathtt{C}}(X,Y)=G(H_f^{\mathtt{C}}(X),Y)=G(X,H_f^{\mathtt{C}}(Y)) \quad (7)$$

$H_f^{\mathtt{C}}$ ist somit selbstadjungiert.

BEWEIS:

(1): $\iota_{\mathrm{grad}(f+g)}G = d(f+g) = df + dg = \iota_{\mathrm{grad}(f)}G + \iota_{\mathrm{grad}(g)}G = (\iota_{\mathrm{grad}(f)} + \iota_{\mathrm{grad}(g)})G = \iota_{\mathrm{grad}(f)+\mathrm{grad}(g)}G$

(2): $\iota_{\mathrm{grad}(fg)}G = d(fg) = fdg + (df)g = f(\iota_{\mathrm{grad}(g)}G) + (\iota_{\mathrm{grad}(f)}G)g = \iota_{f\,\mathrm{grad}(g)}G + \iota_{\mathrm{grad}(f)g}G = \iota_{f\,\mathrm{grad}(g)+\mathrm{grad}(f)g}G$

(3): $\iota_{\mathrm{grad}(h\circ f)}G = d(h\circ f) = (h'\circ f)\cdot df = (h'\circ f)\cdot \iota_{\mathrm{grad}(f)}G = \iota_{(h'\circ f)\mathrm{grad}(f)}G$

(4):
$$\begin{aligned} h_f^{\nabla}(X,Y) &= \tfrac{1}{2}\big((\nabla_X df)(Y) + (\nabla_Y df)(X)\big) \\ &= \tfrac{1}{2}\big(X(df(Y)) - df(\nabla_X Y) + Y(df(X)) - df(\nabla_Y X)\big) \\ &= \tfrac{1}{2}\big(X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f) + Y(X(f)) - (\nabla_Y X)(f)\big) \\ &= \tfrac{1}{2}\big(X(Y(f)) + Y(X(f)) - (\nabla_X Y)(f) - (\nabla_Y X)(f) - T(X,Y)(f) + T(X,Y)(f)\big) \\ &= \tfrac{1}{2}\big(2X(Y(f)) - 2(\nabla_X Y)(f) + T(X,Y)(f)\big) \\ &= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f) + \tfrac{1}{2}T(X,Y)(f) \end{aligned}$$

(5): Ist offensichtlich nach Definition.

(6): Beachte $T^{\mathtt{c}}(X,Y) = 0$ und $X(G(Y,Z)) = G(\mathtt{c}_X Y, Z) + G(Y, \mathtt{c}_X Z)$.

$$\begin{aligned} h_f^{\mathtt{c}}(X,Y) &= X(Y(f)) - (\mathtt{c}_X Y)(f) \\ &= X(df(Y)) - (\mathtt{c}_X Y)(f) \\ &= X(G(\mathrm{grad}(f),Y) - (\mathtt{c}_X Y)(f) \\ &= G(\mathtt{c}_X\,\mathrm{grad}(f),Y) + G(\mathrm{grad}(f),\mathtt{c}_X Y) - (\mathtt{c}_X Y)(f) \\ &= G(\mathtt{c}_X\,\mathrm{grad}(f),Y). \end{aligned}$$

(6) und (7): Beachte $(d^{\mathtt{c}} s)(X) = \mathtt{c}_X s$. Dann ist die Aussage per Definition klar.

DEFINITION 4.3

Es sei M eine endlichdimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse $\mathscr{C}^r$, ∇ eine globale Ableitung auf M und $Y \in \Gamma^r(\tau_M)$. Die Abbildung $\mathrm{div}(Y) := \mathrm{Spur}(d^{\nabla}Y) \in C^{r-1}(M)$ heißt die ***Divergenz*** des Vektorfeldes Y. Divergenz

Ist zusätzlich G eine *PRM*, $f \in \mathscr{C}^r(M,\mathbf{K})$, so heißt $\Delta(f) := \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f))$ der ***Laplace-Operator*** von f. Laplace-Operator

SATZ 4.4

Es sei (M,G) eine PRM, $Y \in \Gamma(\tau_M)$, $t_1,\ldots,t_n \in \Gamma(\tau_M)$ eine Orthonormalbasis bezüglich G und $f \in \mathscr{C}^2(M)$. Dann gilt:

$$\mathrm{div}(Y) = \sum_{i=1}^{n}(t_i(G(Y,t_i)) - G(Y,\nabla_{t_i}t_i)) \qquad (8)$$

$$\Delta(f) = \mathrm{Spur}(H_f^{\nabla}) \qquad (9)$$

BEWEIS:

$$\mathrm{div}(Y) = \mathrm{Spur}(d^{\nabla}Y) = \sum_{i=1}^{n} G(\nabla_{t_i}Y,t_i) = \sum_{i=1}^{n}\big(t_i(G(Y,t_i)) - G(Y,\nabla_{t_i}t_i)\big)$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = \mathrm{Spur}(d^{\nabla}\,\mathrm{grad}(f)) = \mathrm{Spur}(H_f^{\nabla})$$

Kommen wir zur Definition der ***Rotation*** im 3-dimensionalen Raum. **Rotation**

DEFINITION 4.5

Es sei (M,G) eine PRM der Dimension 3. Es sei $t_1,\, t_2,\, t_3 \in \Gamma(\tau_M)$ eine orientierte Orthonormalbasis bezüglich G. Durch das innere Produkt $\iota_X G$ für $X \in \Gamma(\tau_M)$ ist eine Einsform $\iota_X G \in \Omega^1(\tau_M)$ zugeordnet. Es sei G^* die duale Metrik. Durch das innere Produkt $\iota_\alpha^* G^*$ für $\alpha \in \Omega^1(\tau_M)$ ist ein Vektorfeld $\iota_\alpha^* G^* \in \Gamma(\tau_M)$ zugeordnet. Es seien $dx^1,\, dx^2,\, dx^3$ die zu $t_1,\, t_2,\, t_3 \in \Gamma(\tau_M)$ dualen Basisschnitte. Es sei $*(dx^1 \wedge dx^2) := dx^3$, $*(dx^2 \wedge dx^3) := dx^1$ und $*(dx^3 \wedge dx^1) := dx^2$. $*$ ist der Stern-Operator. Er liefert einen Isomorphismus $* : \Omega^p(\tau_M) \to \Omega^{n-p}(\tau_M)$. Es gilt $*(*\omega) = (-1)^{(n-r)r}\,\mathrm{sgn}(G)\cdot\omega$.

Das Vektorfeld $\mathrm{rot}\, X$ ist definiert durch

$$\mathrm{rot}\, X = \iota^*_{*d(\iota_X G)} G^* .$$

Beachte, dass $dx^1,\, dx^2,\, dx^3$ eine Orthonormalbasis bezüglich G^* ist.

In Koordinaten wird dies wie folgt geschrieben. Sei $X = \sum_{i=1}^{3} f_i t_i$ mit $\mathscr{C}^r-$Funktionen f_i. Mit $\iota_X G = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} f_i g_{ij} dx^j$ folgt $d(\iota_X G) = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} D_k(f_i g_{ij})\, dx^k \wedge dx^j$. Ordnen liefert

$$\begin{aligned} d(\iota_X G) &= \left(D_2\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i3}\right) - D_3\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i2}\right)\right) dx^2 \wedge dx^3 \\ &+ \left(D_3\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i1}\right) - D_1\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i3}\right)\right) dx^3 \wedge dx^1 \\ &+ \left(D_1\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i2}\right) - D_2\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i1}\right)\right) dx^1 \wedge dx^2, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} *d(\iota_X G) &= \left(D_2\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i3}\right) - D_3\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i2}\right)\right) dx^1 \\ &+ \left(D_3\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i1}\right) - D_1\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i3}\right)\right) dx^2 \\ &+ \left(D_1\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i2}\right) - D_2\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i1}\right)\right) dx^3. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir, wenn $\iota_\alpha^* G^* = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} \alpha_i g^{ij} t^j$ ist

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\, X &= \iota^*_{*d(\iota_X G)} G^* \\ &= \sum_{j=1}^{3}\left(D_2\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i3}\right) - D_3\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i2}\right)\right) g^{1j} t^j \\ &+ \sum_{j=1}^{3}\left(D_3\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i1}\right) - D_1\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i3}\right)\right) g^{2j} t^j \\ &+ \sum_{j=1}^{3}\left(D_1\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i2}\right) - D_2\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i1}\right)\right) g^{3j} t^j. \end{aligned}$$

Ein letztes Ordnen bringt

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot} X &= \iota^*_{*d(\iota_X G)} G^* \\
&= \left(\left(D_2\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i3}\right) - D_3\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i2}\right)\right) g^{11} + \left(D_3\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i1}\right) - D_1\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i3}\right)\right) g^{21} + \left(D_1\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i2}\right) - D_2\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i1}\right)\right) g^{31} \right) t^1 \\
&+ \left(\left(D_2\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i3}\right) - D_3\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i2}\right)\right) g^{12} + \left(D_3\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i1}\right) - D_1\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i3}\right)\right) g^{22} + \left(D_1\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i2}\right) - D_2\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i1}\right)\right) g^{32} \right) t^2 \\
&+ \left(\left(D_2\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i3}\right) - D_3\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i2}\right)\right) g^{13} + \left(D_3\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i1}\right) - D_1\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i3}\right)\right) g^{23} + \left(D_1\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i2}\right) - D_2\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_{i1}\right)\right) g^{33} \right) t^3.
\end{aligned}
$$

Für die kanonischen Metriken erhalten wir wie gewohnt

$$\operatorname{rot} X = \iota^*_{*d(\iota_X G)} G^* = (D_2 f_3 - D_3 f_2) t^1 + (D_3 f_1 - D_1 f_3) t^2 + (D_1 f_2 - D_2 f_1) t^3.$$

DEFINITION 4.6

Es sei $G \in \Gamma(S^2(\tau_M^*))$ eine *PRM* auf M. Es sei $\omega \in \Omega^r(\xi)$ und $\mathtt{C}$ der *Levi-Cevità-*Zusammenhang. Es seien $t_1, \ldots, t_n \in \Gamma(\tau_M)$ orthonormale Basisfelder bezüglich *G*. Es seien $X_2, \ldots, X_r \in \Gamma(\tau_M)$. Die Abbildung $\delta^{\mathtt{C}} : \Omega^r(\xi) \to \Omega^{r-1}(\xi)$ definiert durch

$$(\delta^{\mathtt{C}} \omega)(X_2, \ldots, X_r) := -\sum_{i=1}^{n} (\mathtt{C}_{t_i} \omega)(t_i, X_2, \ldots, X_r)$$

heißt ***Kodifferential***.

Zeigen Sie, dass $\delta^{\mathtt{C}} \delta^{\mathtt{C}} = \mathbf{0}$.

Die Abbildung $* : \Omega^r(\xi) \to \Omega^{n-r}(\xi)$ definiert durch

$$(*\omega)(t_{i_{r+1}}, \ldots, t_{i_n}) := \omega(t_{i_1}, \ldots, t_{i_r})$$

heißt ***Hodge-Star-Operator***.

Zeigen Sie, dass $*(*\omega) = (-1)^{r(n-r)} \operatorname{sgn}(G) \cdot \omega$.

Zeigen Sie darüber hinaus, dass $\delta^\nabla \omega = (-1)^r *^{-1} d^\nabla * \omega$ für eine kovariante Ableitung ∇ gilt.