7. Ströme auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten

Definition 7.1
Es sei $\Xi_r^k(M)$ die k-Formen aus $\Omega_r^k(M)$, die einen kompakten Träger besitzen. Ein ***k-Strom*** ist ein Element des Dualraumes von $\Xi_r^k(M)$. Wir setzen $(\Xi_r^k(M))^* =: (\Xi_r^k)^*(M)$.

Bemerkung
Will man $\Xi_r^k(M)$ topologisieren, so ist dies wie folgt möglich:
Eine Folge $\omega_i \in \Xi_r^k(V), V \subset M$ konvergiert genau dann gegen $\omega \in \Xi_r^k(V)$, wenn $\overline{V \cap \bigcup_i \mathrm{supp}(\omega_i)}$ kompakt ist und alle partiellen Ableitungen $|D_j\omega_i - D_j\omega|$ gleichmäßig gegen null konvergieren.

Beachte:
Manchmal wird in der Literatur der hier definierte k-Strom auch als *(n-k)*-Strom definiert.

Beispiele 7.2
1. Jede n-dimensionale Kette c^n definiert einen n-Strom durch

$$c^n(\omega) := \int_{c^n} \omega$$

für $\omega \in \Xi_r^k(M)$.

2. Ist *M* orientierbar, so induziert jedes $\alpha \in \Xi_r^{n-k}(M)$ ein lineares Funktional durch

$$\alpha(\omega) := \int_M \omega \wedge \alpha$$

für $\omega \in \Xi_r^k(M)$.

3. Besitz *M* sogar eine riemannsche Metrik, so wird durch jede Form $\beta \in \Xi_r^k(M)$ ein *(n-k)*-Strom induziert

$$\beta(\omega) := \int_M \omega \wedge *\beta$$

für $\omega \in \Xi_r^k(M)$.

Definition 7.3
Für $\sigma \in (\Xi_r^k)^*(M)$ definieren wir den Rand des Stromes $\partial\sigma \in (\Xi_r^{k-1})^*(M)$ durch $\partial\sigma(\omega) := \sigma(d\omega)$.

Aufgabe
Man gebe für die obigen Beispiele die Ränder der Ströme und die Übergangsabbildungen explizit an.
Wir wollen noch ein weiteres Beispiel eines Stromes, der in der Elektrotechnik große Bedeutung hat, kennen lernen.

Definition 7.4
Eine ***Weyl-k-Dichte*** oder kurz ***k-Dichte*** ist ein Element aus $\Omega_r^k(M) \otimes |\mathcal{R}(M)|$, wobei $|\mathcal{R}(M)|$ die Menge der positiven Radon-Maße auf M ist. Die Menge der k-Dichten der Klasse C^r bezeichnen wir mit $\mathcal{W}_k^r(M)$.

Jede k-Dichte hat somit eine Darstellung $\boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\mu}$.

Daher tritt bei der Übergangsabbildung einer *k*-Dichte zusätzlich zu der Übergangsabbildung der Differentialform noch der Faktor $|(a_U^V)'(p)|^k,\ p \in M$ auf.

Satz 7.5
Es sei M eine n-dimensionale orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^r. Jede *k*-Dichte bestimmt in eindeutiger Weise einen *(n-k)*-Strom.

Beweis
1. Es gibt einen Isomorphismus $I^{n-k} : \Omega_r^{n-k}(M) \to \mathcal{W}_k^r(M)$ definiert durch

$$(I^{n-k}(\omega))(X_{j_1}, \ldots, X_{j_k}) := \omega(X_{i_1}, \ldots, X_{i_{n-k}})\mu(X_{i_1}, \ldots, X_{i_{n-k}}, X_{j_1}, \ldots, X_{j_k})$$

$$I^{n-k}\Big(\sum_{i_1<\cdots<i_{n-k}} \omega_{i_1,\ldots,i_{n-k}} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{n-k}}\Big) := \sum_{j_1<\ldots<j_k} \delta_{1,\ldots,n}^{i_1,\ldots,i_{n-k},j_1,\ldots,j_k} \omega_{i_1,\ldots,i_{n-k}} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} \otimes \mu$$

wobei μ das kanonische Volumenmaß auf M ist. Den inversen Isomorphismus bezeichnen wir mit I_k.

2. Nun definieren wir für $\iota \in \mathcal{W}_k^r(M)$ den (*n-k*)-Strom σ_ι durch

$$\sigma_\iota(\omega) := (-1)^{k(n-k)} \int_M \omega \wedge I_k(\iota).$$

Satz 7.6
Es sei $\delta_\nabla^{n-k} := (-1)^{k+1} I^{k+1} \circ d^\nabla \circ I_{n-k}$, dann gilt für $\omega \in \Xi_r^k(M)$: $\partial\sigma_\iota(\omega) = \sigma_\iota(d\omega) = \sigma_{\delta^{n-k}\iota}(\omega)$, kurz $\partial\sigma_\iota = \sigma_{\delta^{n-k}\iota}$.

Beweis
Folgt unmittelbar aus 7.5 zusammen mit $d(\omega \wedge I_{n-k}(\iota)) = 0$.

Bemerkung
Diese hier eingeführten Ströme spielen eine wichtige Rolle für die von de Rham eingeführte Homologie und Kohomologie.

Die Maxwellschen Gleichungen

Diese Gleichungen werden seit einigen Jahren sehr kritisch betrachtet. Maxwell übertrug die Gleichungen aus der Hydrodynamik und modifizierte sie unter der Kenntnis des Induktionsgesetzes. Hier konnten etliche Ungereimtheiten nachgewiesen werden. Trotzdem möchte ich sie wegen der eleganten Schreibweise aufführen. Sollten bessere und genauere Gleichungen zur Verfügung stehen, so werden sie dann korrigiert.

Es sei (M, g) eine pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit, die lokal ein Minkowski-Raum der Dimension vier ist.

Es sei $F \in \Omega_r^2(M),\ r \geq 1$ das elektromagnetische Feld, $G \in \mathcal{W}_2^r(M)$ die elektromagnetische Felddichte und $J \in \mathcal{W}_1^r(M)$ die Stromdichte.

Die Maxwellschen Gleichungen lauten: $dF = 0$ und $\delta G = J$.
Setzen wir M als einfach zusammenhängend voraus, so folgt aus $dF = 0$ die Existenz eines elektromagnetischen Potentiales $A \in \Omega_{r+1}^1(M)$ mit $dA = F$ (Lemma von Poincaré, Korollar 6.5). Dieses Potential A ist nur bis auf das Differential einer Funktion λ eindeutig bestimmt. Es gilt

also auch $d(A+d\lambda)=F$. Dies verwendet man zur sogenannten Eichtransformation (zum Beispiel Lorentz Eichung $\delta^2(I^2*(A+d\lambda))=0$).
Entsprechend folgt aus der zweiten Gleichung $\delta G=J$ die Kontinuitätsgleichung $\delta J=0$.
Der Zusammenhang zu der alten Bezeichnung in Vektorschreibweise ist wie folgt gegeben:

$$F_{0i}:=E^i \quad \text{und} \quad G_{0i}:=D^i \quad \text{für } i\in\{1,2,3\},$$
$$F_{kl}:=\delta_{123}^{klm}B^m \quad \text{und} \quad G_{kl}:=\delta_{123}^{klm}H^m \quad \text{für } k,l,m\in\{1,2,3\},$$
$$J_1:=\rho,\ J_i:=j^i \quad \text{für } i\in\{1,2,3\} \text{ und } A_1:=\varphi,\ A_i:=A^i \quad \text{für } i\in\{1,2,3\}.$$

Wir geben noch die sogenannten ***Energie-Impuls-Tensordichte*** an. Die Komponenten lauten:

$$T^{\alpha\beta}=\sum_{\alpha\beta}(G_{\alpha\beta}F_{\tau\sigma}g^{\tau\beta}-\frac{1}{4}G^{\tau\sigma}F_{\tau\sigma}g^{\alpha\beta}) \quad .$$

Man beachte, dass es sich hierbei nicht um einen Tensor im Sinne unserer Definition handelt, sondern um eine ***Tensordichte***. Ferner ist $G^{ij}:=\sum_{k,l}\sqrt{|g|}g^{ik}g^{jl}G_{kl}$. Im Vakuum ist also $G=I^2*F$.

Zum Abschluss sei noch an das ***Induktionsgesetz*** erinnert. Es lautet im $\mathbf{R}^3$:

$$\frac{d}{dt}\int_{g_t(M)}B_t=-\int_{\partial(g_t(M))}(E_t-\iota_{\dot g_t}B_t)$$

Hierbei ist $t\in\mathbf{R}$ und $\dot g_t$ das Vektorfeld bezüglich des Flusses g_t.
Man beachte, dass

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{g_t(M)}B_t&=\frac{d}{dt}\int_M(g_t)^*B_t\\&=\int_M((g_t)^*\dot B_t+(g_t)^*(L_{\dot g_t}B_t))\\&=\int_M((g_t)^*\dot B_t+(g_t)^*(d\circ\iota_{\dot g_t}+\iota_{\dot g_t}\circ d)B_t)\\&=-\int_M((g_t)^*(dE_t-d\circ\iota_{\dot g_t}B_t)\\&=-\int_M d((g_t)^*(E_t-\iota_{\dot g_t}B_t))\\&\underset{\text{Stokes}}{=}-\int_{\partial M}(g_t)^*(E_t-\iota_{\dot g_t}B_t)\\&=-\int_{g_t(\partial M)}(E_t-\iota_{\dot g_t}B_t)\end{aligned}$$

so dass nur noch $g_t(\partial M)=\partial(g_tM)$ zu verifizieren bleibt.
Dies ist aber richtig, denn $d(g_t)^*=(g_t)^*d$.

Außerdem ist zu beachten, dass zwei Fälle zu unterscheiden sind.

1. Die vom Magnetfeld durchsetzt Fläche wird deformiert, aber nicht durch den Raum bewegt. In diesem Fall muss g_t zusätzlich als Parametertransformation angesehen werden.

2. Die vom Magnetfeld durchsetzte Fläche wird nicht deformiert, aber durch den Raum bewegt. Hier ist g_t als lokaler Fluss zu deuten.

Die Superposition beider Fälle führt dann auf den allgemeinen Fall.

Beispiele

In beiden Fällen sei $B = K\,dx \wedge dy$ ein konstantes Magnetfeld „in positiver z–Richtung".

Zu 1. Es werde ein Leiter $\ell \parallel (0,1,0)\mathbf{R}$ über $M = [0,\infty)\times[0,a]\times\{0\}$ mit konstanter Geschwindigkeit v in positiver x-Richtung bewegt.
Gesucht ist die induzierte Spannung, die bei dieser Bewegung im Leiter entsteht.
Wir setzen hier einfach $t \geq 0$ voraus.
In diesem Fall ist $g_t(M) = [0,vt]\times[0,a]\times\{0\}$. Also

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{g_t(M)} B &= K\frac{d}{dt}\int_{\mathbf{0}}^{vt}\int_{\mathbf{0}}^{a} dx\wedge dy\\ &= K\frac{d}{dt}avt\\ &= Kav.\end{aligned}$$

Andererseits wollen wir g_t und M suchen. Wir wählen $M := [0,1]\times[0,1]\times\{0\}$, dann bekommen wir für die Abbildung $g_t(x_1,x_2,x_3) = (x_1vt, ax_2, x_3)$ und bestätigen $g_t(M) = [0,vt]\times[0,a]\times\{0\}$. Nun müssen wir $g_t^*(B)$ berechnen.

$$\begin{aligned}g_t^*(B) &= K\,d(x_1vt)\wedge d(ax_2)\\ &= K\,avt\,dx_1\wedge dx_2\end{aligned}$$

liefert

$$\frac{\partial}{\partial t}g_t^*(B) = K\,av\,dx_1\wedge dx_2,$$

also auch hier das richtige Ergebnis.

Wir können aber auch die rechte Seite der obigen Formel nehmen:

$$-\int_{\partial M} g_t^*(\boldsymbol{\iota}_{\dot g_t}(B)) \text{ mit } \dot g_t = x_1v\frac{\partial}{\partial x}.$$

Wir erhalten also:

$$-\int_{\partial M} Kx_1vg_t^*(dy) = -kva\int_{\partial M} x_1\,dx_2\,.$$

$$\partial M = \{0\}\times[0,1]+[0,1]\times\{1\}-\{1\}\times[0,1]-[0,1]\times\{0\}$$

liefert eine orientierungserhaltende Parametertransformation
$\Phi(s) = (0,s)$ für $s\in[0,1)$, $\Phi(s) = (s-1,1)$ für $s\in[1,2)$, $\Phi(s) = (1,3-s)$ für $s\in[2,3)$ und $\Phi(s) = (4-s,0)$ für $s\in[3,4)$. Wir erhalten damit:

$$-Kva\int_{\partial M} x_1\,dx_2 = Kva\int_2^3 ds = Kva\,.$$

Zu 2. Es sei $M = [-1,1]\times[-2,2]\times\{0\}$ und $g(t,x,y,z) = x, y\cos t, z\sin t)$ für $t\in\mathrm{R}$.

Gesucht ist $\frac{d}{dt}\int_{g_t(M)} B$.

Es ist

$$\begin{aligned}g_t^*(B) &= dx\wedge d(y\cos t)\\ &= \cos t\,dx\wedge dy - y\sin t\,dx\wedge dt\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t}(g_t^*(B)) = -\sin t\, dx \wedge dy\,.$$

Insgesamt also

$$\begin{aligned}\int_M \frac{\partial}{\partial t}(g_t^*(B)) &= \int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2} -\sin t\, dx \wedge dy \\ &= -8\sin t.\end{aligned}$$

Die rechte Seite der Formel sei als Übungsaufgabe empfohlen. Man beachte $\dot{g}_t(x,y,z) = -y\sin t\frac{\partial}{\partial y} + z\cos t\frac{\partial}{\partial z}$. Außerdem haben wir in beiden Fällen stillschweigend davon Gebrauch gemacht, die Ecken durch ε-Umgebungen etwas auszubeulen, damit die Parametertransformationen von der Klasse C^r mit $r \geq 1$ sind.